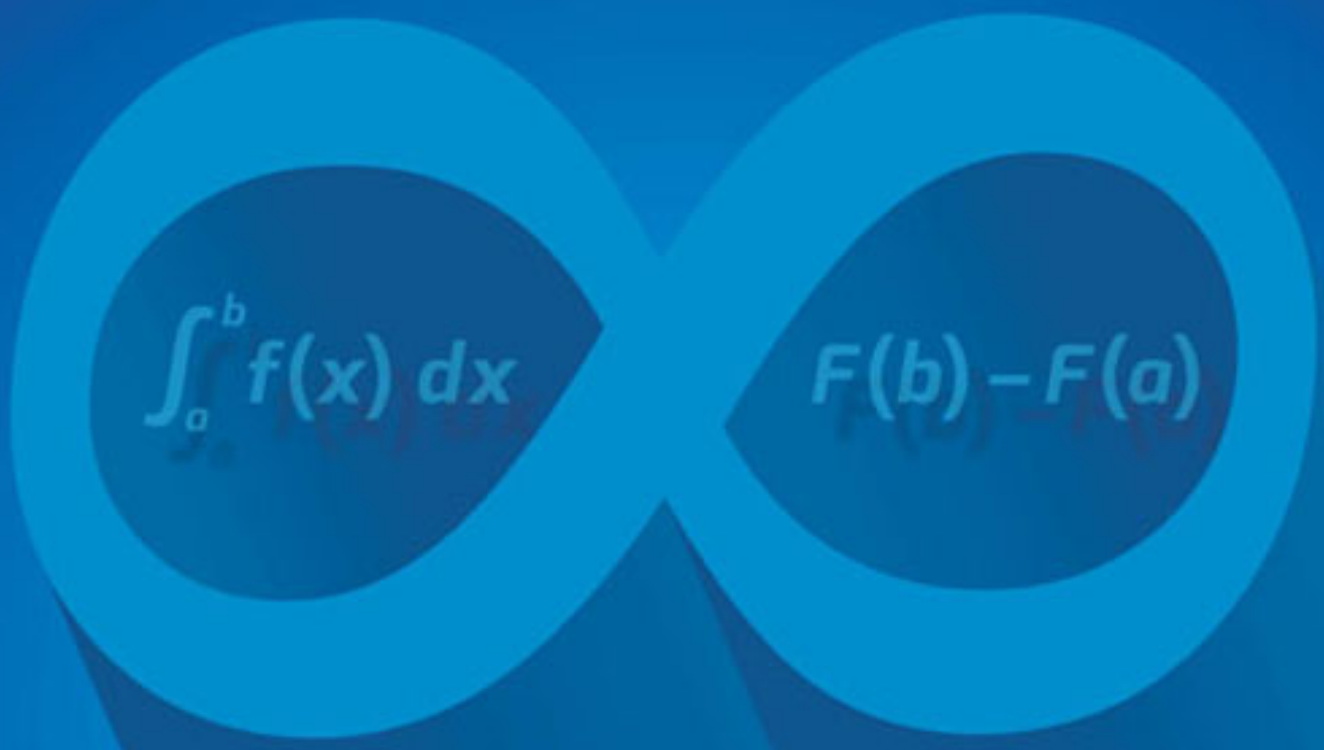


Lech Górniewicz
Roman Stanisław Ingarden

# ANALIZA MATEMATYCZNA DLA FIZYKÓW

WYDAWNICTWO NAUKOWE
UNIWERSYTETU MIKOŁAJA KOPERNIKA

**Lech Górniewicz**
**Roman Stanisław Ingarden**

# ANALIZA MATEMATYCZNA DLA FIZYKÓW

Wydanie piąte

WYDAWNICTWO NAUKOWE
UNIWERSYTETU MIKOŁAJA KOPERNIKA

Toruń 2012

ISBN 978–83–231–2924–0

© Copyright by Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika
Toruń 2012

**Wydawnictwo Naukowe**
**Uniwersytetu Mikołaja Kopernika**
ul. Gagarina 5, 87-100 Toruń

Redakcja: tel. 56 611 42 95, faks: 56 611 47 05
Promocja: tel. 56 611 48 09
e-mail: wydawnictwo@umk.pl
www.wydawnictwoumk.pl

Wydanie piąte

Projekt okładki: *Krzysztof Skrzypczyk*
Skład i łamanie w systemie TEX: *Maria Jolanta Szelatyńska*

Druk: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika

**Prof. dr hab. Roman Stanisław Ingarden**

**(1920–2011)**

# WSPOMNIENIE
# O PROFESORZE ROMANIE STANISŁAWIE INGARDENIE

Profesor dr hab. Roman Stanisław Ingarden był twórcą toruńskiej szkoły fizyki matematycznej, wieloletnim dyrektorem Instytutu Fizyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, autorem wielu książek i podręczników z dziedziny fizyki i matematyki, a także założycielem i redaktorem naczelnym dwóch prestiżowych, międzynarodowych czasopism naukowych: „Reports on Mathematical Physics" oraz „Open Systems and Information Dynamics".

Urodził się w Zakopanem w 1920 roku, w rodzinie wybitnego polskiego filozofa Romana Witolda Ingardena. Dzieciństwo i młodość spędził we Lwowie, gdzie krótko przed wojną rozpoczął studia z fizyki i filozofii na Uniwersytecie Jana Kazimierza. Wówczas to zetknął się – zarówno jako student, jak i na płaszczyźnie towarzyskiej – z zaprzyjaźnionymi z jego rodzicami wybitnymi polskimi matematykami, fizykami i filozofami, m.in. ze Stefanem Banachem, Hugonem Steinhausem, Juliuszem Schauderem, Stanisławem Saksem, Wojciechem Rubinowiczem, Kazimierzem Ajdukiwieczem i Leonem Chwistkiem. Prawdopodobnie właśnie wówczas ukształtowały się jego szerokie zainteresowania, wykraczające daleko poza uprawianą później zawodowo fizykę teoretyczną i obejmujące w szczególności lingwistykę, teorię poznania, logikę, historię nauki, a także biologię, biofizykę i informatykę.

Profesor Ingarden ukończył studia w Krakowie tuż po wojnie w 1946 r., po czym trafił jako asystent do tworzonej na Uniwersytecie Wrocławskim Katedry Fizyki Teoretycznej. Doktoryzował się w Warszawie trzy lata później pod opieką swojego lwowskiego nauczyciela, Profesora W. Rubinowicza. Jego rozprawa doktorska dotyczyła optyki geometrycznej z pionierskim wykorzystaniem pewnych metod geometrii różniczkowej, w szczególności tzw. geometrii Finslera. Później, w latach 1970–80, geometria Finslera pojawi się ponownie w pracach Profesora Ingardena, tym razem w powiązaniu z fizyką statystyczną i teorią informacji stanowiącą jego drugą pasję naukową.

Ukoronowaniem wieloletnich badań stało się wydanie w 1993 roku monografii *The theory of sprays and Finsler spaces with applications in physics and*

*biology* w wydawnictwie Kluwer Academic Publishers, wspólnie z P. Antonellim z Kanady i M. Matsumoto z Japonii.

W latach 50. Profesor Ingarden kierował organizacją Instytutu Niskich Temperatur PAN we Wrocławiu, zwyciężyła jednak jego dusza teoretyka i w latach 60. skupił się na pracy w Katedrze Fizyki Teoretycznej Uniwersytetu Wrocławskiego. Tam w 1964 roku uzyskał tytuł profesora zwyczajnego. Z tego okresu pochodzi zainteresowanie Profesora teorią informacji, wówczas postrzeganą niemal wyłącznie jako teoria kodowania i przesyłania danych. Profesor Ingarden uważał jednak, że informacja jest jednym z fundamentalnych pojęć fizycznych i że powinna w aksjomatyczny sposób pojawiać się w teoriach fizycznych. Początkowo myślał głównie o optyce, jednak z czasem w jego pracach teoria informacji zaczęła przenikać także do fizyki statystycznej, termodynamiki, a także do mechaniki kwantowej. W 1961 roku opublikował kilka prac, wspólnie z wrocławskim probabilistą K. Urbanikiem, o matematycznej równoważności pojęć prawdopodobieństwa i informacji. Okazało się w ten sposób, że informacja może być punktem wyjścia do budowy teorii statystycznych.

W 1976 roku ukazała się pionierska praca Profesora pt. *Quantum information theory*, wyprzedzająca o 20 lat eksplozję zainteresowania procesami przepływu informacji w mikroświecie. Moda na kwantową teorię informacji rozwinęła się w latach 90. w związku z wielkim postępem w technikach eksperymentalnych mechaniki kwantowej i rozbudzonymi nadziejami na zbudowanie kwantowego komputera.

W 1967 roku Profesor Ingarden przeniósł się na stałe z Wrocławia do Torunia. W 1969 roku został dyrektorem nowo utworzonego Instytutu Fizyki UMK i kierował nim do 1978 roku. Był jednocześnie kierownikiem Zakładu Fizyki Statystycznej i Matematycznej. W toruńskim zespole Profesora Ingardena powstało wiele ważnych prac dotyczących wspomnianych wyżej zastosowań geometrii Finslera w fizyce statystycznej, dynamiki kwantowych układów otwartych i geometrii przestrzeni stanów kwantowych, kwantowych uogólnień pojęcia entropii i wiele innych. Z inicjatywy i przy współautorstwie Profesora powstało także wiele podręczników obejmujących podstawowe kursy fizyki w nowoczesnym, geometrycznym ujęciu, np.: *Mechanika klasyczna*, *Fizyka statystyczna i termodynamika*, *Elektrodynamika klasyczna*, *Mechanika kwantowa*, a ponadto podręczniki matematyczne: niniejsza *Analiza matematyczna dla fizyków* oraz *Algebra z geometrią dla fizyków*.

W 1975 roku Profesor Ingarden wyjechał w swą pierwszą podróż naukową do Japonii, by od tej pory często tam wracać. Zafascynowany historią i kulturą tego kraju zaczął uczyć się języka japońskiego, a swoją pasję przeniósł na teren UMK, organizując i prowadząc lektorat japońskiego. Do ostatnich lat swego życia Profesor miał zwyczaj codziennego zapisywania pismem japońskim dwóch stron zeszytu, „by nie wyjść z wprawy i nauczyć się nowych znaków kanji". Z Jego inspiracji po latach na UMK powołana została Pracownia Języka i Kultury Japońskiej.

Po przejściu na emeryturę Profesor Ingarden nadal pracował naukowo, zajmując się głównie historią fizyki, prowadził także swoje ulubione zajęcia z języka japońskiego. Zmarł w Krakowie latem 2011 roku.

*Dr Miłosz Michalski*
Instytut Fizyki
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika
w Toruniu

Toruń, marzec 2012

## PRZEDMOWA DO WYDANIA PIĄTEGO

W roku 1971 ukazał się podręcznik Krzysztofa Maurina *Analiza*, cz. 1, wydany przez Państwowe Wydawnictwo Naukowe w Warszawie. Podręcznik ten zawierał nowoczesny wykład analizy matematycznej, jednakże zdaniem studentów oraz wykładowców był zbyt trudny, w szczególności dla studentów pierwszego roku matematyki, fizyki czy też nauk technicznych, którym, między innymi, był on dedykowany. Wydaje się, że w związku z tym w roku 1975 Profesor Roman Stanisław Ingarden zaproponował napisanie podręcznika wzorowanego w zakresie tematyki oraz nowoczesności wykładu na książce K. Maurina, ale w pełni przystępnego dla studentów matematyki, fizyki i nauk technicznych. W efekcie tej propozycji w roku 1981 ukazał się pierwszy tom podręcznika L. Górniewicza i R. S. Ingardena *Analiza matematyczna dla fizyków*, a w roku 1983 tom drugi – obydwa wydane przez Państwowe Wydawnictwo Naukowe w Warszawie. W związku z brakiem finansowania w roku 1992 Państwowe Wydawnictwo Naukowe odstąpiło swe prawa wydawnicze Wydawnictwu Naukowemu Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu. Drugie wydanie ukazało się w roku 1994, trzecie w roku 2000, a ostatnie, czwarte wydanie, w roku 2004.

Niniejsze, piąte wydanie, nie zawiera nowych koncepcji merytorycznych i dydaktycznych, dokonane zostały jedynie korekty zauważonych w wydaniu czwartym usterek technicznych oraz pewne niezbędne uzupełnienia.

Wydanie to ma jednak wyjątkowy charakter. Pragnę je w całości zadedykować Panu Profesorowi Romanowi Stanisławowi Ingardenowi jako wyraz pamięci oraz głębokiego szacunku zarówno naukowego, jak i osobistego.

*Lech Górniewicz*

Toruń, marzec 2012

Rozdział 1

# LICZBY RZECZYWISTE

W rozdziale tym chcemy zrealizować dwa cele, a mianowicie:

- uporządkować wiadomości Czytelnika w zakresie elementów teorii zbiorów i odwzorowań oraz teorii liczb rzeczywistych (paragrafy 1–3),
- przedstawić teorię ciągów i szeregów liczbowych (paragrafy 4–10).

Dlatego paragrafy 1–3 traktujemy jako informacyjne, a formułujemy i dowodzimy przede wszystkim te spośród trudniejszych twierdzeń, które będą istotne w dalszych częściach podręcznika. Zestaw zadań i komentarz uzupełniający do tego rozdziału jest zawarty w paragrafie 11.

## § 1. Oznaczenia logiczne

*Sumę logiczną* (*alternatywę*) dwóch zdań $p$, $q$ będziemy zapisywać $p \vee q$ (czytamy: $p$ lub $q$); *iloczyn logiczny* (*koniunkcję*) zdań $p$, $q$ zapisujemy $p \wedge q$ (czytamy: $p$ i $q$).

Zdanie „jeżeli $p$, to $q$" nazywamy *implikacją* i zapisujemy $p \Longrightarrow q$, implikację $p \Longrightarrow q$ uznajemy za fałszywą tylko w tym przypadku, gdy $p$ jest prawdziwe, a $q$ fałszywe. Jeżeli implikacje $p \Longrightarrow q$ i $q \Longrightarrow p$ są prawdziwe, to mówimy, że $p$ jest *równoważne* $q$ i fakt ten zapisujemy $p \iff q$ ($p \iff q$ czytamy również: $p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $q$).

Zdanie „nie $p$" zapisujemy: $\sim p$.

Spośród wielu praw rachunku zdań odnotujmy następujące:

$$\left.\begin{array}{l} \sim (p \vee q) \iff (\sim p \wedge \sim q) \\ \sim (p \wedge q) \iff (\sim p \vee \sim q) \end{array}\right\} \text{– prawa De Morgana,}$$

$$(p \Longrightarrow q) \iff (\sim q \Longrightarrow \sim p) \qquad \text{– prawo kontrapozycji.}$$

Mówimy, że przedmiot $a$ spełnia *funkcję zdaniową* $\mathcal{K}(x)$, jeżeli zdanie powstające z $\mathcal{K}(x)$ przez zastąpienie argumentu $x$ nazwą przedmiotu $a$, tj. zdanie $\mathcal{K}(a)$ jest prawdziwe.

Jeżeli dla każdego argumentu $x$ zdanie $\mathcal{K}(x)$ jest prawdziwe, to fakt ten zapisujemy: $\forall x : \mathcal{K}(x)$ (czytamy: dla każdego $x$ zachodzi $\mathcal{K}(x)$).

Zapis $\exists\, x : \mathcal{K}(x)$ oznacza, że dla jakiegoś $x$ zachodzi $\mathcal{K}(x)$ (czytamy: istnieje takie $x$, że $\mathcal{K}(x)$ jest prawdziwe).

Symbol $\forall$ nazywamy *kwantyfikatorem ogólnym*, a symbol $\exists$ *kwantyfikatorem szczegółowym*.

Prawdziwe są następujące twierdzenia (prawa logiczne) dotyczące operowania kwantyfikatorami:

$$\begin{aligned}
(\forall x : \mathcal{K}(x) \vee \forall x : \mathcal{P}(x)) &\Longrightarrow \forall x : (\mathcal{K}(x) \vee \mathcal{P}(x));\\
\exists\, x(\mathcal{K}(x) \wedge \mathcal{P}(x)) &\Longrightarrow (\exists\, x : \mathcal{K}(x) \wedge \exists\, x : \mathcal{P}(x));\\
\sim (\forall x : \mathcal{K}(x)) &\Longleftrightarrow \exists\, x : (\sim \mathcal{K}(x));\\
\sim (\exists\, x : \mathcal{K}(x)) &\Longleftrightarrow \forall x : (\sim \mathcal{K}(x)).
\end{aligned}$$

## § 2. Zbiory. Odwzorowania zbiorów

Zbiory oznaczać będziemy dużymi literami $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$. Elementy zbiorów oznaczamy małymi literami $a, b, c, \ldots, x, y, z$, przy czym piszemy $a \in A$ w przypadku, gdy $a$ jest elementem zbioru $A$, oraz $a \notin A$, gdy $a$ nie jest elementem zbioru $A$. *Zbiór pusty* oznaczać będziemy symbolem $\emptyset$. Symbolami $A \cup B$ i $A \cap B$ oznaczamy odpowiednio *sumę* i *iloczyn* (*przekrój*) zbiorów $A$ i $B$.

Zapis $\{x; \mathcal{K}(x)\}$ czytamy: zbiór tych (wszystkich) $x$, dla których $\mathcal{K}(x)$ jest zdaniem prawdziwym.

Stosując powyższe oznaczenia, mamy:

$$A \cup B = \{x; (x \in A) \vee (x \in B)\}, \qquad A \cap B = \{x; (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Zbiory $A$ i $B$ nazywamy *rozłącznymi*, jeżeli $A \cap B = \emptyset$. Odnotujmy znane własności działań $\cup$ i $\cap$:

$$\begin{aligned}
A \cap A &= A,\\
A \cup A &= A,\\
(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C),\\
(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C),\\
A \cap B &= B \cap A,\\
A \cup B\, B &\cup A,\\
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C),\\
A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C).
\end{aligned}$$

łączność

przemienność

rozdzielczość

Wypisane własności wynikają z odpowiednich praw dla sumy logicznej i iloczynu logicznego. Istnieje ścisły związek pomiędzy alternatywą $\vee$ i sumą mnogościową $\cup$, a także koniunkcją $\wedge$ i iloczynem mnogościowym $\cap$.

Jeżeli spełniony jest warunek: $\forall x((x \in A) \Longrightarrow (x \in B))$, to mówimy, że $A$ jest *podzbiorem* zbioru $B$ i fakt ten oznaczamy $A \subset B$ (lub $B \supset A$). Jeżeli $A \subset B$ i $B \subset A$, to mówimy, że zbiory $A$ i $B$ są *identyczne* (*równe*), co zapisujemy $A = B$.

Zbiór $A \setminus B = \{x; (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$ nazywamy *różnicą zbiorów* $A$ i $B$ (mówimy: $A$ minus $B$). W przypadku $B \subset A$ różnicę $A \setminus B$ nazywamy *dopełnieniem zbioru* $B$ w $A$.

Niech będą dane zbiory $A$ i $B$. Przypuśćmy, że każdemu elementowi $x \in A$ przyporządkowany jest dokładnie jeden element $y \in B$. Każde takie przyporządkowanie $f$ nazywamy *odwzorowaniem zbioru* $A$ w $B$ i oznaczamy:

$$f\colon A \longrightarrow B \quad \text{lub} \quad A \xrightarrow{f} B.$$

Wtedy zbiór $A$ nazywamy *dziedziną odwzorowania* $f$, a zbiór $B$ *przeciwdziedziną* $f$; ponadto przez $f(x)$ rozumieć będziemy element zbioru $B$ przyporządkowany (za pomocą $f$) elementowi $x \in A$.

Niech $f\colon A \longrightarrow B$ i $g\colon C \longrightarrow D$ będą dwoma odwzorowaniami. Mówimy, że odwzorowania $f$ i $g$ są równe (identyczne) wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki

$$A = C, \qquad B = D, \tag{1}$$

$$\forall x \in A : f(x) = g(x). \tag{2}$$

Zauważmy że warunki (1) gwarantują poprawność (2). Fakt, że odwzorowania $f$ i $g$ są równe zapisujemy: $f = g$.

(2.1) PRZYKŁAD. Definiujemy $\mathrm{Id}_A\colon A \longrightarrow A$, przyjmując: $\mathrm{Id}_A(x) = x$, dla każdego $x \in A$. Widoczne jest, że $\mathrm{Id}_A$ jest odwzorowaniem; $\mathrm{Id}_A$ nazywamy *tożsamościowym odwzorowaniem* zbioru $A$.

(2.2) PRZYKŁAD. Fakt, że $B \subset A$ wyznacza odwzorowanie, zwane *inkluzją*, $i\colon B \longrightarrow A$ zapisujemy: $i(x) = x$ dla każdego $x \in B$. Zgodnie z przyjętą definicją równość $\mathrm{Id}_A = i$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $A = B$.

(2.3) PRZYKŁAD. Niech $y_0$ będzie ustalonym elementem zbioru $B$. Określamy przyporządkowanie $f\colon A \longrightarrow B$, kładąc: $f(x) = y_0$ dla każdego $x \in A$. Akcentujemy mocno fakt, że w opisanym przyporządkowaniu każdemu $x \in A$ odpowiada dokładnie jeden element $f(x)$ (równy $y_0$), a zatem $f$ jest odwzorowaniem.

Przypuśćmy, że $y_0$ jest również elementem pewnego zbioru $C$. Mamy wtedy odwzorowanie $g\colon A \longrightarrow C$ dane wzorem: $g(x) = y_0$, dla każdego $x \in A$. Równość $f = g$ zachodzi, gdy $B = C$.

W dalszym ciągu poznamy wiele przykładów odwzorowań. Warto pamiętać o tym, że badaniu odwzorowań poświęcona jest w istocie cała matematyka.