O POJĘCIU DOWODU
W MATEMATYCE

MONOGRAFIE
FUNDACJI NA RZECZ NAUKI POLSKIEJ

FUNDACJA NA RZECZ NAUKI POLSKIEJ

Krzysztof Wójtowicz

O POJĘCIU DOWODU W MATEMATYCE

TORUŃ 2012

Książka uzyskała wyróżnienie w programie Monografie FNP.
Wydanie książki subwencjonowane przez
Fundację na rzecz Nauki Polskiej

Redaktor tomu
Kamil Dźwinel

Korekty
Anna Mądry

Projekt okładki i obwoluty
Barbara Kaczmarek

Printed in Poland

eISBN 978-83-231-6008-3
https://doi.org/10.12775/978-83-231-6008-3

WYDAWNICTWO NAUKOWE
UNIWERSYTETU MIKOŁAJA KOPERNIKA
Redakcja: ul. Gagarina 5, 87-100 Toruń
tel. +48 56 611 42 95, fax +48 56 611 47 05
e-mail: wydawnictwo@umk.pl
Dystrybucja: ul. Reja 25, 87-100 Toruń
tel./fax: +48 56 611 42 38, e-mail: books@umk.pl

www.wydawnictwoumk.pl

Wydanie pierwsze

Spis treści

Wstęp

Filozofia matematyki przeżywała burzliwy rozwój w pierwszych dekadach XX wieku, kiedy to wykrystalizowały się klasyczne stanowiska (formalizm, logicyzm i intuicjonizm). Później nastąpił okres pewnej stagnacji, jednak od przynajmniej 30 lat daje się zaobserwować swoisty renesans tej dyscypliny. Za prowizoryczną cezurę czasową w rozwoju dyskusji można przyjąć lata 80. – wtedy ukazały się podstawowe dla współczesnej dyskusji monografie. Dotyczyły one głównie problematyki ontologicznej, w szczególności sporu realizm–antyrealizm, który pod wpływem koncepcji Quine'a i jego argumentu z niezbędności rozgorzał z nową siłą. W efekcie powstało wiele oryginalnych koncepcji antyrealistycznych (np. Fielda, Chihary, Hellmana). Żywa dyskusja toczyła się także wokół problemu strukturalistycznej interpretacji matematyki (Shapiro, Resnik, Chihara).

W niniejszej pracy skupiam się jednak na innej problematyce, którą można określić jako metodologiczną: przedmiotem badań jest głównie proces tworzenia matematyki. Zgodnie z uproszczoną, lecz popularną wizją tej dziedziny nauki praca matematyka polega na dowodzeniu nowych twierdzeń w oparciu o przyjęte wcześniej aksjomaty. Wyróżnienie faz przyjmowania aksjomatów i dowodzenia twierdzeń ma charakter do pewnego stopnia umowny i nie odzwierciedla porządku historycznego powstawania teorii i pojęć matematycznych. Jest ono jednak użyteczne, gdyż w pewien sposób porządkuje obszar badań.

Niniejsza monografia jest poświęcona analizie statusu i swoistości dowodów matematycznych. Na proces dowodzenia w matematyce można patrzeć jako na pewnego typu argumentację, która jest ujęta w precyzyjnie skodyfikowane reguły. Jednak standardy dowodowe ewoluują, nie są niezmienne, pojawiają się nowe typy dowodów. Nieuchronnie mamy w związku z tym do czynienia z elementami uznaniowymi – przyjęcie pewnych reguł jako powszechnie akceptowanych odbywa się bowiem na etapie preteoretycznym. Co więcej, dowody matematyczne znane z praktyki są dalekie od wersji sformalizowanej. Powstaje zatem swoiste napięcie, prowadzące do ciekawych problemów filozoficznych.

Można wskazać kilka podstawowych grup zagadnień, które stanowią motywy przewodnie w książce (choć oczywiście w poszczególnych rozdziałach na pierwszy plan wysuwają się zagadnienia szczegółowe). Należą do nich:

1. Problem relacji między realnymi, znanymi z praktyki dowodami matematycznymi a tymi, które są przedmiotem zainteresowania teorii dowodu (traktowanymi jako formalne ciągi symboli).
2. Problem eksplanacyjnej roli dowodów matematycznych i rozumienia w matematyce.
3. Problem empirycznych elementów w dowodach matematycznych, w szczególności pytanie o status argumentacji odwołującej się do metod empirycznych (w tym także do najnowszych modeli obliczeń).

Zagadnienia te są podejmowane w poszczególnych rozdziałach pracy. Oto ich krótka prezentacja.

Rozdział 1. Dwie wizje dowodu. Uwagi historyczne

W rozdziale pierwszym zaprezentowano historyczne źródła kształtowania się różnych wizji dowodu jako procesu mającego charakter treściowy, przeciwstawionego dowodowi jako pewnej sformalizowanej procedurze. W myśl pierwszego z tych stanowisk dla dowodów konstytutywny jest składnik semantyczny o nieredukowalnym do reguł formalnych charakterze; w myśl drugiego – konstytutywna jest możliwość formalizacji. Jako historycznie ważnych reprezentantów tych dwóch wizji przedstawiam Kartezjusza i Berkeleya. Rozdział zawiera też uwagi historyczne, dotyczące np. prac Pascha czy Hilberta na temat geometrii, dyskusji między Hilbertem a Fregem etc. Sądzę, że przedstawienie na wybranych przykładach ewolucji sposobu myślenia o dowodzeniu pozwoli na wyraźniejsze ukazanie natury problemu.

Rozdział 2. Antyfundacjonalizm Lakatosa

Rozdział drugi jest poświęcony koncepcji Lakatosa. Badacz akcentuje te problemy, które nie są wyjaśnione – ani nawet podejmowane – w formalistycznej wizji dowodu matematycznego: znaczenie kontekstu odkrycia i opis realnych mechanizmów zdobywania wiedzy matematycznej, problem adekwatności formalnych parafraz czy wreszcie problem rozumienia pojęć matematycznych i eksplanacyjnej funkcji dowodów matematycznych. Lakatos ujmuje zagadnienie wiedzy matematycznej w sposób radykalnie odmienny od ujęcia dominującego w dotychczasowej dyskusji: jego zdaniem nie ma ona bowiem charakteru wiedzy ostatecznej i niezmiennej, lecz podlega rewizji, zaś samym twierdzeniom matematycznym nie powinniśmy przypisywać statusu niepodważalnych prawd, ale raczej hipotez, które – obrazowo mówiąc – muszą walczyć o przetrwanie. Są to poglądy bardzo odległe od wizji matematyki jako nauki ujmującej odwieczne i niezmienne prawdy, zaś koncepcja Lakatosa jest bardzo wyrazistym przykładem stanowiska antyfundacjonalistycznego. Pomimo pewnych uproszczeń tego ujęcia i nieco przesadnej radykalności, z pewnością jest ono ważne dla dyskusji dotyczącej istoty dowodu matematycznego. Ma też naturalne odniesienia do problematyki uzasadniania aksjomatów, która wprawdzie nie jest przedmiotem badań w niniejszej monografii, lecz stanowi również ważny i szeroko dyskutowany obszar badań w filozofii matematyki. Można powiedzieć, że koncepcja Lakatosa pełni tu rolę pewnego rodzaju klamry wskazującej na związki i analogie między zagadnieniami uzasadniania aksjomatów i dowodzenia twierdzeń, które w ujęciu czysto formalistycznym tworzą w zasadzie odrębne grupy problemów.

Rozdział 3. Dowody komputerowe

Kolejny rozdział jest poświęcony problematyce dowodów komputerowych; kanoniczny przykład stanowi tu dowód twierdzenia o czterech barwach. W rozdziale są analizowane m.in. następujące zagadnienia:

1. Problem zależności między dowodami znanymi z praktyki a ich sformalizowanymi wersjami. Ponieważ dowód komputerowy ma charakter w pełni sformalizowany, trudno mówić w takim przy-

padku o elementach treściowych (semantycznych). Można zatem w wyraźny sposób postawić problem zależności między dowodem w rozumieniu teorii dowodu (jako formalnego konstruktu) a praktyką argumentacyjną matematyków.

2. Problem wyjaśniania w matematyce i eksplanacyjny status dowodów matematycznych (w szczególności dowodów komputerowych). Chociaż w praktyce matematycy posługują się pojęciem wyjaśniania, termin ten nie ma jednoznacznie ustalonego sensu. W rozdziale przedstawiam pewne próby ujęcia tego zagadnienia (oparte m.in. na analizach Resnika i Mancosu). Proponuję również pewien eksperyment myślowy dotyczący dowodów komputerowych i badam problem ich mocy eksplanacyjnej.

3. Problem czynników empirycznych w procesie zdobywania wiedzy matematycznej. Użycie komputera przy dowodzeniu twierdzeń może być uważane za eksperyment fizyczny. Pojawia się w związku z tym kwestia, czy ten fakt ma istotne znaczenie z punktu widzenia dyskusji dotyczącej statusu wiedzy matematycznej. Nie ulega bowiem wątpliwości, iż matematyka jest niezbędna w naukach empirycznych, czyli niezbędna dla zdobywania wiedzy fizycznej. Można jednak postawić pytanie, czy owa zależność nie jest obustronna: czy wiedza fizyczna o świecie może być wykorzystywana w tworzeniu nowej wiedzy matematycznej? Czy nasza znajomość praw fizyki może nam ułatwić zdobycie wiedzy matematycznej i czy ten fakt zmienia jej status?

Problematyka dowodów komputerowych pozwala na wyraźne postawienie powyższych problemów, stanowiąc jednocześnie wstęp do dyskusji na temat teorii obliczeń kwantowych i hiperobliczeń oraz ich znaczenia dla określenia natury wiedzy matematycznej.

Rozdział 4. Teoria obliczeń kwantowych

Badania dotyczące dowodów komputerowych są dobrym punktem wyjścia do analiz dotyczących statusu (hipotetycznych) dowodów kwantowych. Teoria obliczeń kwantowych rozwija się w ostatnich latach bardzo dynamicznie (silnym impulsem było stworzenie przez Shora w 1994 roku szybkiego, tj. wielomianowego, algorytmu rozkładu liczby na czynniki pierwsze). Motywacji dla podjęcia badań w tym zakresie dostarcza problem złożoności obliczeniowej: istnieje bowiem szereg algorytmów klasycznych (najprostszym przykładem jest algorytm sprawdzania tautologiczności formuł klasycznego rachunku zdań), które mają złożoność wykładniczą, czyli w praktyce są bezużyteczne. Jednak w wypadku niektórych problemów można stworzyć algorytm operujący na innej strukturze danych, odwołujących się do specyfiki świata kwantowego. Podstawowym obiektem jest tam nie bit, a tzw. kubit (*qubit*), zaś przetwarzanie informacji to przetwarzanie ciągu kubitów (zdefiniowanych w odpowiedniej przestrzeni Hilberta).

W rozdziale czwartym są kontynuowane rozważania z rozdziału trzeciego, dotyczące kwestii empirycznych aspektów dowodzenia (w kontekście hipotetycznych dowodów kwantowych). Zapośredniczenie w teorii empirycznej jest tu *prima facie* znacznie głębsze niż w przypadku klasycznego komputera i pojawienie się algorytmów kwantowych wprowadza nową jakość do dyskusji na temat natury dowodu matematycznego i standardów matematycznej argumentacji. Ważnym zagadnieniem jest poznawcza wartość tak uzyskanych wyników. Przypuśćmy bowiem, że pewien problem matematyczny P został rozwiązany za pomocą komputera kwantowego i że, co więcej, nie jest znany szybki algorytm klasyczny pozwalający na jego rozwiązanie. Możemy sobie wyobrazić że komputer kwantowy po tygodniowej pracy ustalił, iż hipoteza Riemanna ma dowód i poinformował nas o tym. Czy uznamy, że posiadamy faktycznie wiedzę na temat hipotezy Riemanna i że status owej wiedzy nie różni się od statusu wiedzy np. na temat 4-kolorowalności grafów planarnych (uzyskanej za pomocą klasycznego komputera)? Zagadnienie rozumienia i eksplanacyjnej roli dowodu nabiera większej dramaturgii, zaś analizy dotyczące dowodów kwantowych wprowadzają nową jakość do dyskusji.

Rozdział 5. Hiperobliczenia a status dowodów matematycznych

Swoistą kulminacją wcześniejszych rozważań jest rozdział dotyczący niestandardowych modeli obliczeń wykraczających poza model turingowski (czyli tzw. hiperobliczeń). Dyskusja nad problematyką hiperobliczeń pozwala na wyraźne postawienie szeregu pytań dotyczących procesu zdobywania wiedzy matematycznej. Z obserwacji prowadzonych w tym rozdziale płyną następujące wnioski:

1. Hiperobliczenia ukazują możliwe empiryczne uwikłania matematyki. Przedstawione modele mają charakter teoretyczny, jednak pozwalają na wyraźniejsze uświadomienie sobie, jakie są f a k t y c z n e empiryczne uwikłania procesu dowodzenia.

2. Rozumienie w matematyce jest kategorią nieeliminowalną i istotną dla dyskusji na temat statusu wiedzy matematycznej (mówiąc swobodnie: nie ma wiedzy matematycznej bez rozumienia).

3. Istnieje hipotetyczna możliwość pogodzenia naturalizmu z odrzuceniem mechanicyzmu i wyjaśnienie intuicji matematycznej w duchu naturalistycznym. W szczególności odnosi się to do problemu uzasadniania aksjomatów – hiperobliczenia pokazują bowiem, że granica między uzasadnianiem aksjomatów a dowodzeniem twierdzeń może ulec pewnemu zatarciu.

***

Praca powstała w ramach grantu N N101 094136.

Dziękuję Fundacji na rzecz Nauki Polskiej za umożliwienie wydania książki i stworzenie komfortowych warunków do przeprowadzenia prac redakcyjnych.

ROZDZIAŁ 1

Dwie wizje dowodu. Uwagi historyczne

We wstępie do książki była mowa o dwóch aspektach rozumienia dowodu matematycznego, które dla uproszczenia można nazwać syntaktycznym i semantycznym (lub formalnym i treściowym). Istnieje pewne napięcie, czy wręcz rozdźwięk, pomiędzy znanym z praktyki matematycznej ujęciem dowodu a jego wizją jako obiektu dobrze zdefiniowanego (zrekonstruowanego) w teorii formalnej. Dowody znane z praktyki nie są sformalizowane, ale komunikatywne. Dowody sformalizowane nie są komunikatywne i nie występują w praktyce. Skoro tak jest, to warto zadać pytanie o relacje między nimi. To zaś wymaga, aby – przynajmniej fragmentarycznie – wskazać na elementy historycznego procesu, który doprowadził do ukształtowania się owego formalistycznego rozumienia dowodu. Przy okazji będzie można postawić zagadnienie, które z tez stanowiska formalistycznego stanowią nadużycie (motywowane względami zewnętrznymi wobec matematyki), a które faktycznie pozwalają lepiej zrozumieć naturę procesu matematycznej argumentacji. Celem tego rozdziału jest więc ukazanie kształtowania się owego formalnego punktu widzenia, który odegrał bardzo ważną rolę w refleksji nad matematyką i który – jak się wydaje – jest dominujący we współczesnym spojrzeniu na istotę dowodu matematycznego (a w każdym razie był dominujący do niedawna)[1]. Proces ten można w pewnym uproszczeniu określić jako odejście od poglądu, zgodnie z którym matematyczna argumentacja winna opierać się na intuicji, na rzecz poglądu, że musi mieć ona charakter czysto formalny (zaś rola intuicji zostaje mocno zredukowana).

---

[1] Prezentacja historyczna jest oparta w zasadniczej części na artykułach Wójtowicz (2007a, 2007b), zaś całe ujęcie jest inspirowane pracą Detlefsen 2005.

Mówiąc o formalizmie matematycznym, będę miał na myśli pewien sposób myślenia o matematyce, pewną wizję tego, czym jest matematyka i na czym polega jej uprawianie. Od razu należy podkreślić, że nie chodzi tu o tezę, iż faktycznie praktyka matematyczna sprowadza się do przekształcania symboli pozbawionych interpretacji (taka teza byłaby w oczywisty sposób fałszywa). Chodzi raczej o to, że w refleksji nad dowodem matematycznym jako specyficznym sposobem argumentacji w pewnym momencie zaczęło dominować (i zapewne nadal dominuje) akcentowanie czysto formalnych cech dowodów, czemu towarzyszą często tezy o charakterze normatywnym. Ma to oczywiście związek ze spektakularnym rozwojem logiki formalnej, która dostarczyła narzędzi do analizy rozumowań (nie tylko matematycznych). Niewątpliwie znaczącym impulsem był też rozwój teorii obliczeń i implementacja tworzonych modeli obliczeń. Odwołując się do jej pojęć, dowodzenie można opisać jako pewnego typu obliczenie formalne. Mówiąc o formalizmie, mam zatem na myśli raczej stanowisko o charakterze metodologicznym (czy może nawet metametodologicznym). Skorzystam z charakterystyki podanej przez Detlefsena, aby wskazać najważniejsze, konstytutywne dla formalistycznego sposobu myślenia o matematyce, punkty. W jego ujęciu wyróżnikiem formalizmu jest:

1. Odrzucenie (dość powszechnego do pewnego momentu w historii matematyki) przekonania o tym, że to intuicja i wiedza geometryczna stanowią fundament matematyki.

2. Odrzucenie klasycznej koncepcji dowodu matematycznego i wiedzy matematycznej, którą Detlefsen określa jako koncepcję genetyczną. Zgodnie z nią, uzyskujemy wiedzę na temat przedmiotu badań, gdy znamy jego przyczynę – w przypadku matematyki chodziłoby o przyczynę formalną.

3. Odrzucenie poglądu, w myśl którego w trakcie dowodu jest konieczny – mówiąc metaforycznie – stały ogląd intelektualny przedmiotu, którego dany dowód dotyczy. Ujęcie formalistyczne postuluje raczej abstrahowanie od intuicyjnego oglądu i od problemu znaczenia.

4. Uznanie, iż język pełni w rozumowaniach matematycznych funkcję nie tylko reprezentacjonistyczną, ale również instrumenta-

listyczną. Służy bowiem nie tylko do przekazywania myśli, lecz także do dokonywania pewnych operacji, które nie muszą być w pełni zinterpretowane, a mimo to pozwalają na wzbogacanie naszej wiedzy matematycznej.

5. Uznanie istnienia pewnej składowej „kreatywistycznej": matematyk ma pełną swobodę w tworzeniu narzędzi, które będą pomocne w osiąganiu jego celów poznawczych – tj. w rozwiązywaniu problemów matematycznych[2] (Detlefsen 2005: 236–237).

Podana wyżej koncepcja ma charakter raczej metodologiczny niż metafizyczny – tak rozumiane stanowisko formalizmu jest do pogodzenia z (przynajmniej słabą) formą realizmu matematycznego. Choć oczywiście trudno jest (zwłaszcza w przypadku matematyki) całkowicie oddzielić problematykę ontologiczną od metodologicznej, tutaj skupiam się na tej drugiej. Celem książki (a w szczególności niniejszego rozdziału) jest bowiem refleksja nad naturą i specyfiką matematycznej argumentacji.

Ponieważ praca nie ma charakteru monografii historycznej, referowane problemy traktuję wybiórczo, jako ilustrację ważnych momentów w rozwoju pewnego sposobu myślenia. Ograniczam się przy tym do matematyki nowożytnej, zatem naturalnym punktem wyjścia będzie tu stanowisko Kartezjusza. Można je uznać za wręcz modelowe dla semantycznego, a więc niezgodnego z formalistycznym, ujęcia rozumowań matematycznych.

---

[2] Ten warunek rozumiem w sposób następujący: jeśli mamy przekonanie, iż to intuicja ukazuje nam pewne obiektywne prawdy, to tym samym musimy zaakceptować daleko idące ograniczenia dotyczące tworzenia narzędzi matematycznych – muszą być one zgodne z naszymi przekonaniami odnoszącymi się do rzeczywistości matematycznej. Jednak jeśli uważamy, że teorie matematyczne są konstruowane w sposób formalny, zaś kwestia ich interpretacji (a już tym bardziej obiektywnej prawdziwości) nie jest istotna, to wtedy nie podlegamy żadnym ograniczeniom – z wyjątkiem oczywiście ograniczeń o charakterze czysto metodologicznym.

1. Kartezjusz – intuicja jako źródło wiedzy

Zasadnicze znaczenie dla naszych rozważań ma przyjęte przez Kartezjusza kryterium prawdy, które stanowi kamień węgielny jego epistemologii. Podstawą poznania ma być zdolność do intelektualnego ujmowania jako oczywistych pewnych prawd, które jawią się nam w sposób wyraźny i jasny. Mówi o tym pierwsza z podanych przez Kartezjusza czterech fundamentalnych dla naszego myślenia zasad[3]. To kryterium znajduje zastosowanie w matematyce: prawdy matematyczne jawią się nam w jasny i wyraźny sposób, a to właśnie stanowi gwarancję ich prawdziwości.

Źródłem wiedzy matematycznej (i w ogóle wiedzy) w ujęciu Kartezjusza jest więc rozum. Podstawowe czynności naszego umysłu, za pomocą których „możemy, nie obawiając się omyłki, dojść do poznania rzeczy" (Kartezjusz 1958: 12), to intuicja i dedukcja. Intuicję filozof określa jako „nie zmienne świadectwo zmysłów, lub zwodniczy sąd źle tworzącej wyobraźni, lecz tak łatwe i wyraźne pojęcie umysłu czystego i uważnego, że o tym, co poznajemy, zgoła już wątpić nie możemy, lub, co na jedno wychodzi, pojęcie niewątpliwe umysłu czystego i uważnego, że o tym, co poznajemy, zgoła już wątpić nie możemy" (Kartezjusz 1958: 12). Intuicyjne poznawanie (które obejmuje w szczególności poznanie matematyczne) stanowi więc pewien czysto intelektualny akt. Jest to bezpośrednie widzenie oczyma rozumu (Kartezjusz mówi o tym, iż poznanie to pochodzi „ze światła samego rozumu"). Dotyczy to również aktów akceptowania pewnych prawd matematycznych jako oczywistych – np. jako w oczywisty sposób ujmujących (czy wyjaśniających) treść pewnego pojęcia[4].

---

[3] „Nie przyjmować nigdy żadnej rzeczy za prawdziwą, zanim jej nie poznam z całą oczywistością jako takiej: to znaczy unikać starannie pośpiechu i uprzedzeń i nie obejmować swoim sądem niczego poza tym, co się przedstawia memu umysłowi tak jasno i wyraźnie, iż nie miałbym żadnego powodu podania tego w wątpliwość" (Kartezjusz 2002: 17).

[4] Nasuwa się skojarzenie z poglądami Gödla, który pisał o oczywistości aksjomatów, o tym, że narzucają się nam one jako prawdziwe: „Pomimo ich [obiektów teorii mnogości – przyp. K. W.] oddalenia od danych zmysłowych mamy coś

Drugą podstawową czynnością naszego umysłu jest dedukcja, dzięki której można z koniecznością, w sposób pewny, wysnuć wniosek z rzeczy już wiadomych. Jednak dedukcja nie jest bynajmniej przeciwstawiana intuicji. Do prowadzenia operacji dedukcyjnych jest bowiem konieczne intuicyjne postrzeganie prawdziwości dedukowanego w danym kroku twierdzenia (można by też powiedzieć: oczywistości i prawomocności danego kroku). Kartezjusz pisze tu o ciągłym ruchu myśli, w ramach którego w intuicyjny i wyraźny sposób ujmujemy poszczególne etapy (człony) rozumowania. „Zdania [...] poznaje się [...] już to przy pomocy intuicji, już to przy pomocy dedukcji; same zaś pierwsze zasady tylko przy pomocy intuicji; natomiast ich odległe wnioski jedynie przy pomocy dedukcji" (Kartezjusz 1958: 13–14).

Dla Kartezjusza metoda matematyczna stanowi wzór racjonalnego poznania. Należy wyraźnie podkreślić, że chodzi o metodę semantyczną, a za intuicyjnie oczywiste muszą być uznane nie tylko podstawowe założenia, lecz również wszystkie kroki procesu dedukcyjnego[5]. Dowody matematyczne w ujęciu Kartezjusza nie mogą więc mieć charakteru czysto formalnego. Formalne, symboliczne manipulacje mogą co najwyżej stanowić wsparcie dla argumentacji opartej na bezpośrednim postrzeganiu prawomocności kroków dowodowych. Fundament poznania matematycznego stanowi intuicyjny wgląd w przedmiot analiz[6]. Ten postulat intuicyjnego, treściowego

---

w rodzaju percepcji obiektów teorii mnogości, co widać z faktu, że aksjomaty narzucają się nam jako prawdziwe. Nie widzę powodu, aby mieć mniej zaufania do tego rodzaju percepcji, tj. do intuicji matematycznej, niż do percepcji zmysłowej, która pozwala nam budować teorie fizyczne, w oczekiwaniu, że przyszłe dane zmysłowe będą z nią zgodne, i co więcej oczekiwać, że problem, który teraz nie jest rozstrzygalny, jest mimo to sensowny i może zostać rozstrzygnięty w przyszłości" (Gödel 1947/1964: 271). Z punktu widzenia stanowiska Gödla, owe akty poznawcze mają pierwotny charakter i nie są sprowadzalne do żadnych operacji o charakterze składniowym.

5 „Wszelako owa oczywistość i pewność intuicji wymagana jest nie tylko dla samych wypowiedzi, ale także dla jakichkolwiek rozumowań" (Kartezjusz 1958: 13).

6 To racjonalne poznanie dotyczy nie tylko sfery prawd matematycznych, ale stanowi fundament naszego poznania. Poznanie matematyczne ma zatem niejako wzorcowy charakter.

ujmowania poszczególnych etapów rozumowania jest kwestionowany przez zwolenników (szeroko rozumianego) formalistycznego podejścia do matematyki.

Kartezjusz zwraca uwagę nie tylko na wymóg, aby każdy krok rozumowania był postrzegany jako oczywisty[7], ale też na to, że powinniśmy umieć ująć strukturę tego dowodu jako pewną całość. „Dla uzupełnienia nauki należy wszystkie i poszczególne rzeczy, które odnoszą się do naszego celu, przeglądnąć ciągłym i nieprzerwanym ruchem myśli i objąć je w dostatecznym i uporządkowanym wyliczeniu... Dlatego przebiegnę je kilkakrotnie swego rodzaju ciągłym ruchem wyobraźni, która widzi od razu człony poszczególne w chwili, gdy do innych przechodzi, aż się nauczę od pierwszego stosunku do ostatniego tak szybko przechodzić, iż będę mógł niemal zupełnie bez pomocy pamięci objąć jednym spojrzeniem całość" (Kartezjusz 1958: 31–32). O tym warunku globalnej ogarnialności (*global surveyability*) pisze Bassler[8]. Analizuje tam problem, czy dowody matematyczne dają się „ogarnąć" (na przykładzie dowodu twierdzenia o czterech barwach, który będzie przedmiotem szczegółowych rozważań w rozdziale trzecim), rozróżniając ogarnialność lokalną (oczywistość poszczególnych kroków) od globalnej (oczywistość rozumowania jako całości, którą intuicyjnie ujmujemy). Postulat globalnej ogarnialności dowodów matematycznych przypisuje właśnie Kartezjuszowi[9].

Niezależnie od trudności związanych z precyzyjnym ujęciem sensu owego postulatu globalnej ogarnialności, jest to z pewnością trafny opis psychologicznych zjawisk towarzyszących pracy matematyka. Poczucie, iż zrozumiało się ideę dowodu (swobodnie wyrażane w formie np. stwierdzenia, że wreszcie wszystkie elementy

7 „Jeśli w szeregu rzeczy, będących przedmiotem badania, napotyka się coś, czego nasz umysł nie może dość dobrze ująć intuicyjnie, należy przy tym zatrzymać się i nie badać rzeczy następnych, ale powstrzymywać się od daremnej pracy" (Kartezjusz 1958: 36).

8 W pracy Bassler 2006.

9 Fallis, analizując problem luk w dowodach matematycznych, mówi o *Cartesian story*, w myśl której dowody są pozbawione takich luk, zaś matematyk jest w stanie ująć wszystkie kroki dowodowe (Fallis 2003).

układanki do siebie pasują albo że wreszcie jest jasne, o co w tym dowodzie tak naprawdę chodzi) jest niewątpliwie kluczowe dla matematyka w jego pracy[10].

Poglądy Kartezjusza stanowią modelowy przykład treściowego ujęcia dowodu matematycznego. Jego wizja matematyki wpisuje się w racjonalistyczną epistemologię. Kartezjusz nie traktuje wiedzy matematycznej jako apriorycznego, szczególnego, wyróżnionego fragmentu naszej wiedzy, który jest niezależny od empirycznej wiedzy dotyczącej świata fizycznego. Uznaje swoistą ciągłość (czy jedność) wiedzy. Na przykład podstawowe prawdy dotyczące rozciągłości (jako kategorii charakteryzującej substancję materialną) są poznawane na drodze rozumowej. Można więc powiedzieć, że prawdy geometrii dotyczą realnego świata (ale w innym sensie niż później u Kanta). Takie ujęcie pozwala rozwikłać problem pogodzenia aprioryczności matematyki z jej stosowalnością. W ujęciu Kartezjusza to rozwiązanie można sformułować następująco: aprioryczność matematyki nie budzi wątpliwości – jej prawdy poznajemy bowiem na mocy „światła czystego rozumu", które pozwala nam w jasny i wyraźny sposób postrzegać prawdziwość twierdzeń tej dziedziny. Natomiast fakt, że geometria stosuje się do opisu świata, wynika stąd, iż podstawowym atrybutem substancji cielesnej jest rozciągłość, zaś kategoria rozciągłości jest fundamentem naszego poznania zasad geometrii. Intuicja pozwala nam na dotarcie do podstawowych prawd matematycznych, ale również pozwala nam na dotarcie do podstawowych prawd metafizycznych (w szczególności dotyczących istnienia Boga, naszej jaźni, świata zewnętrznego). Nasza wiedza matematyczna jest więc wpisana w naturalny sposób w ten cały system przekonań[11].

---

[10] O takich zjawiskach pisze np. Hadamard, nie oferując jednak wyjaśnienia mechanizmów, a raczej opis faktów (Hadamard 1964).

[11] Epistemologia matematyki jest więc ufundowana na całości systemu Kartezjusza, w którym – w ostatecznym rozrachunku – należy oprzeć się na zaufaniu do Boga, który nie jest zwodzicielem i wyposażył nas w zdolności poznawcze umożliwiające nam poznanie świata. „Przyrodzone światło rozumu" daje nam więc poznanie prawd matematycznych, a zarazem wiedzę o świecie fizycznym.

2. „Lingwistyczny instrumentalizm" Berkeleya

Charakterystyczne dla ujęcia semantycznego jest przekonanie, że język matematyczny pełni rolę nośnika pewnych obiektywnych treści i z tym wiąże się jego funkcja poznawcza. Można jednak na rolę języka matematycznego patrzeć zupełnie inaczej, co jest charakterystyczne dla stanowiska formalistycznego. W myśl tego poglądu język może stanowić narzędzie poznania (w szczególności poznania matematycznego), mimo iż nie pełni (a przynajmniej – nie w całości) funkcji deskryptywnej. W takim ujęciu językowi matematycznemu nie musimy przypisywać funkcji semantycznych (nie trzeba postulować, że reprezentuje on pewną pozajęzykową rzeczywistość). Dopuszczalne jest więc czysto formalne, instrumentalne użycie wyrażeń językowych, niepowiązane z ich własnościami semantycznymi. Taki sposób myślenia odnajdujemy w koncepcji Berkeleya.

Wizja matematyki Berkeleya wypływa z jego koncepcji filozoficznej, a w szczególności z połączenia immaterialistycznej, teistycznej metafizyki z naukowym instrumentalizmem. Choć filozoficzne stanowisko myśliciela jawi się niektórym jako dziwne (czy wręcz ekstrawaganckie), to należy pamiętać, że sam Berkeley utrzymywał, iż jego filozofia jest oparta na czysto zdroworozsądkowych analizach, a przyświeca jej idea usunięcia pewnych nieporozumień[12]. Część z nich bierze się stąd, że padamy ofiarą językowych złudzeń – w szczególności doktryny dotyczącej abstrakcyjnych idei ogólnych, która z kolei ma związek z naszym błędnym rozumieniem roli języka. Berkeley – jako zdecydowany nominalista – odrzuca tę doktrynę. Na pytanie, jak rozumieć nasze tezy dotyczące istnienia przedmiotów fizycznych, filozof odpowiada, że można je rozumieć tylko jako tezy dotyczące struktury dostępnych nam danych zmysłowych. Jego analizy mają w znacznej części charakter analiz semantycznych – w szczególności zasadę *esse est percipi* można interpretować jako eksplikację znaczenia terminu „istnienie". Sens wypowiedzi o istnieniu

[12] „Potrzeba nam tylko odsunąć zasłonę słów, aby posiąść najdorodniejsze drzewo poznania, którego owoc jest wyborny i znajduje się w zasięgu naszej ręki" (Berkeley 2004: p. 24, s. 21).

jest więc dany przez opisanie metody weryfikacji tych wypowiedzi i nic więcej się za nimi nie kryje – nie ma na przykład racji bytu teza o istnieniu substancji materialnej, będącej nośnikiem owych wrażeń. Można powiedzieć, że w tym sensie Berkeley jest wczesnym neopozytywistą. W duchu (radykalnego) pozytywizmu jest też utrzymane stanowisko autora *Traktatu o zasadach ludzkiego poznania* dotyczące statusu praw naukowych. Używane w fizyce terminy (takie jak np. grawitacja) pojawiają się tam z powodu ekonomii myślenia, dla wygody: pozwalają one skutecznie klasyfikować zjawiska i formułować przewidywania dotyczące zachowania się ciał. Jednak nie należy stąd wyciągać wniosku, że dotyczą one faktycznie istniejących przedmiotów czy też realnie przysługujących tym przedmiotom cech. To, że dana teoria naukowa sprawdza się w praktyce, nie znaczy wszakże, iż mamy tu do czynienia ze zgłębieniem natury rzeczy, że oto nasz umysł w ten sposób osiąga absolutną prawdę[13]. Prawa fizyki dotyczą jedynie struktury naszych wrażeń, które są w człowieku odciskane przez Boga w pewnym określonym porządku, niemającym jednak koniecznego charakteru. Zdaniem Berkeleya wiedza naukowa nie ma polegać na ukazywaniu takich ukrytych przyczyn, ale „na szerokości ujęcia, które pozwala na odkrycie w przyrodzie podobieństw, zgodności i dostosowania i na wyjaśnienie poszczególnych skutków przez sprowadzenie ich do ogólnych reguł" (Berkeley 2004: punkt 105, strona 66).

Taka wizja statusu praw naukowych ma istotny wpływ na rozumienie statusu matematyki. Oczywiście Berkeley nie kwestionuje jej roli w nauce. Twierdzi jednak, że wiedza matematyczna ma charakter czysto instrumentalny i że jej wartość polega j e d y n i e na użyteczności. Jako nominalista Berkeley odrzuca tezę o istnieniu abstrakcyjnych bytów, których miałyby dotyczyć twierdzenia ma-

---

13 „Mechanik posługuje się pewnymi abstrakcyjnymi i ogólnymi terminami, wyobrażając sobie w ciałach siłę, działanie, przyciąganie [...], które dla teorii, formuł, a także obliczeń dotyczących ruchu są wielce pożyteczne, chociaż na próżno by ich szukać w rzeczywistości i w faktycznie istniejących ciałach, podobnie jak na próżno by szukać tych rzeczy, które są fikcjami stworzonymi przez geometrów na drodze matematycznej abstrakcji" (*De motu*: 39, cyt. za: Copleston 1997: 263).

tematyczne. Dociekania matematyczne nie opisują żadnych fundamentalnych prawd, pełnią rolę pomocniczą w stosunku do nauki. O badaniach prowadzonych w ramach czystej matematyki Berkeley wypowiada się w sposób radykalny, przypisując im status zwykłych łamigłówek, które nie mają żadnego znaczenia z praktycznego punktu widzenia (Berkeley 2004: p. 119, s. 73). Jako działalność oderwana od zastosowań praktycznych, matematyka nie ma żadnej wartości[14]. Takie instrumentalistyczne stanowisko zajmuje Berkeley w odniesieniu do geometrii – różni się więc ono zdecydowanie od poglądów Kartezjusza, przekonanego o tym, że badania geometryczne dostarczają nam wiedzy o naturze przestrzeni. Taką tezę Berkeley odrzuca, uważając za absurdalne twierdzenie o nieskończonej podzielności przestrzeni (Berkeley 2004: p. 124, s. 76). Rozciągłość jest bowiem obecna tylko w naszych wyobrażeniach, zaś źródłem nieporozumienia jest doktryna dotycząca istnienia abstrakcyjnych idei ogólnych[15]. Odrzucenie tezy o tym, iż geometria opisuje faktycznie naturę przestrzeni fizycznej, nie narusza jednak podstaw tej dziedziny wiedzy. Berkeley jest bowiem instrumentalistą i wartości nauki upatruje wyłącznie w jej użyteczności; twierdzi więc, że to, co ma zastosowanie w praktyce, możemy uznać za obowiązujące na gruncie przyjętych przez nas zasad (Berkeley 2004: p. 131, s. 79). Widać tu kolejną istotną różnicę stosunku do ujęcia Kartezjusza: uzasadnieniem dla zdań matematyki jest ich użyteczność, a nie intuicyjna oczywistość. Matematyka nie ma więc tu oczywiście charakteru wiedzy obiektywnej – w tym sensie, że nie dotyczy żadnej obiektywnie istniejącej rzeczywistości pozajęzykowej. Twierdzenia o liczbach *de facto* nie opisują żadnych bytów abstrakcyjnych, lecz nazwy i znaki. Badamy je ze względu na to, że reprezentują przedmioty, które liczymy (Berkeley 2004: p. 122, s. 75).

---

[14] Berkeley stwierdza, że „nauka o liczbach powinna być całkowicie podporządkowana praktyce i [...] staje się ona jałowa i błaha, kiedy widzi się w niej jedynie przedmiot czystej spekulacji" (2004: p. 120, s. 74).

[15] „Tego, którego umysł opętała teoria abstrakcyjnych idei ogólnych, łatwo przekonać o tym, że [...] abstrakcyjnie podzielna rozciągłość jest nieskończenie podzielna" (Berkeley 2004: p. 125, s. 76).

Instrumentalistyczne stanowisko Berkeleya ma związek z jego koncepcją języka. Zdaniem filozofa język matematyczny służy nam jedynie do uzyskiwania pewnych wyników, mimo iż sam jest pozbawiony interpretacji. W jednej ze swoich prac Berkeley posługuje się obrazowym porównaniem matematyki do gry w karty: terminy matematyczne pełnią rolę żetonów. W trakcie samej gry możemy nimi manipulować, nie biorąc pod uwagę ich (ewentualnej) interpretacji, która zostanie nadana dopiero pod koniec rozgrywki[16]. Berkeley mówi tu więc o sytuacji, w której w rozumowaniach (głównie – matematycznych) możemy opierać się jedynie na czysto syntaktycznych regułach:

> Według rozpowszechnionego mniemania jedynym zadaniem języka jest komunikacja naszych idei i [...] każda nazwa obdarzona znaczeniem reprezentuje naszą ideę. [...] wystarczy chwila namysłu, aby zdać sobie sprawę, że nie jest rzeczą konieczną (nawet w najściślejszych rozumowaniach), aby nazwy obdarzone znaczeniem i reprezentujące idee, przy każdym użyciu wywoływały w umyśle te idee, które zastępują; bo przy czytaniu i w rozmowie używa się nazw przeważnie tak jak liter w algebrze, w której, choć każda cyfra oznacza jakąś szczegółową wielkość liczbową, nie jest koniecznym dla poprawności wyliczeń, aby na każdym kroku każda cyfra przywoływała na myśl tę szczegółową wielkość, którą reprezentuje (Berkeley 2004: p. 19, s. 17–18).

Zwróćmy uwagę na stwierdzenie Berkeleya, że nie jest konieczne ciągłe skupienie uwagi rozumującego podmiotu na znaczeniu symboli, którymi operujemy[17]. Stoi to w wyraźnej sprzeczności z treściową koncepcją dowodu matematycznego, w myśl której prowadzenie rozumowania matematycznego wymaga skupienia uwagi na semantycznych aspektach wyrażeń. Zdaniem Kartezjusza poszczególne

---

[16] W trakcie gry abstrahujemy od zewnętrznej interpretacji. Jeśli posługujemy się żetonami, to nie musimy wiedzieć, czy żeton z napisem np. „LXV" zostanie zamieniony na 65 dolarów czy 65 owiec. Konieczna jest natomiast oczywiście znajomość formalnych reguł posługiwania się żetonem w trakcie tej gry (np. żeton „LXV" jest wart więcej niż żeton „XXX").

[17] Nie chcę tu podejmować problemu, czy znajomość reguł użycia „wyrażeń karcianych" jest *de facto* rozumieniem.

kroki rozumowań dedukcyjnych są uprawomocnione przez intuicyjny wgląd i jest on warunkiem koniecznym poprawności rozumowania matematycznego, bowiem dedukcja również opiera się na intuicji. Dla Berkeleya taki wgląd jest zbędny; rozumowania matematyczne mogą być prawomocne niezależnie od tego, czy poszczególnym krokom możemy przypisać intuicyjną interpretację – w szczególności, czy intuicyjnie postrzegamy ich prawomocność. Wyrażenia języka matematycznego mogą funkcjonować, mimo iż nie mają odniesienia pozajęzykowego (a nawet nie towarzyszą im żadne idee)[18]. Język matematyczny może zatem stanowić jedynie pomocniczy konstrukt i być interpretowany instrumentalistycznie[19].

Z punktu widzenia Berkeleya, problem uzasadniania tez matematycznych stanowi wyłącznie problem praktyczny, dotyczący wyboru użytecznych narzędzi ułatwiających osiąganie naszych celów poznawczych. Owe cele nie obejmują oczywiście poznania nowych prawd dotyczących obiektów abstrakcyjnych – mówienie o czymś takim byłoby świadectwem ulegania złudzeniom. Zamiarem nauki jest jedynie poznanie porządku, w jakim jawią się nam zjawi-

---

[18] Berkeley pisze, iż używamy pewnych symboli matematycznych, nawet jeśli nie jesteśmy w stanie utworzyć żadnych idei związanych z tymi symbolami: „znak algebraiczny, który określa pierwiastek z liczby ujemnej, jest używany w operacjach logistycznych, choć nie jest możliwe utworzenie idei takiej wielkości" (cyt. za: Detlefsen 2005: 267). Możemy zatem abstrahować nie tylko od problemu istnienia pozajęzykowej reprezentacji pojęć przez system abstrakcyjnych bytów, ale nawet od problemu jakiejkolwiek mentalnej reprezentacji owych symboli. Dobrze ilustruje to przywołany przez Berkeleya przykład jednostki urojonej: możemy stosować teorię liczb zespolonych do dowodzenia twierdzeń dotyczących liczb rzeczywistych. Liczby zespolone pojawiają się w dowodach, lecz nie ma ich już w samych sformułowaniach dowodzonych twierdzeń.

[19] Posługując się współczesną terminologią techniczną, można – jako ilustrację – podać tu przykład zjawiska nietwórczości (konserwatywności) teorii. Przypomnijmy, że teoria T^* jest nietwórcza nad teorią T (ze względu na klasę zdań P), jeśli dowolne zdanie $\alpha \in P$, dowodliwe na gruncie teorii T^*, jest też dowodliwe na gruncie teorii T. Teoria T^* może być używana do (wygodniejszego) dowodzenia twierdzeń z klasy P i tym samym pełni pewną funkcję poznawczą, ale zarazem można ją traktować tylko jako pomocniczy, pozbawiony interpretacji instrument. Warto przypomnieć, że taką właśnie wizję matematyki (jako narzędzia nietwórczego w stosunku do teorii fizycznych) przedstawił Field w głośnej monografii (Field 1980).

ska. Matematyka pełni tu funkcję pomocniczą i to właśnie – ale tylko to! – stanowi dla niej uprawomocnienie. Podstawowe zasady matematyczne nie są uzasadniane przez odwoływanie się do intuicji; kryterium ich przyjęcia nie stanowi kartezjańska oczywistość, ale praktyczne znaczenie w nauce[20]. Rozumowania matematyczne przypominają posługiwanie się wspomnianymi wcześniej żetonami; twierdzeniom tej nauki nie można przypisywać statusu prawd obiektywnych, dotyczących pozajęzykowej rzeczywistości, a jedynie status wygodnych konwencji. Operowanie językiem zaś nie wiąże się z przypisywaniem (wszystkim) wyrażeniom interpretacji ani z intuicyjnym ich rozumieniem.

Stanowisko Berkeleya można uznać za bliskie neopozytywistycznej koncepcji matematyki jako swoistej składni języka nauki. Carnap posługując się rozróżnieniem na pytania wewnętrzne i zewnętrzne, przypisał twierdzeniom matematycznym charakter prawd czysto konwencjonalnych, które przyjmujemy tylko ze względu na wygodę i ekonomię myślenia. W szczególności zaakceptowanie określonego języka i akceptacja pewnych tez w nim formułowanych nie niesie za sobą przyjęcia tez egzystencjalnych. Carnap analizuje status języka, w którym mówimy o rzeczach, i stwierdza, że używanie tego języka nie pociąga za sobą konieczności uznania r e a l n o ś c i świata rzeczy (Carnap 1950: 235). Możemy bowiem ów język traktować czysto instrumentalnie – i z taką sytuacją mamy często do czynienia w nauce. W języku naukowym wprowadzamy bowiem pojęcia, które nie odnoszą się bezpośrednio do danych doświadczenia, ale ich użycie jest motywowane tym, że w bogatych językach w bardziej efektywny sposób można prowadzić rozumowania, formułować teorie i je uzasadniać. Oczywiście te uwagi odnoszą się też do problemu istnienia bytów abstrakcyjnych. Zdaniem Carnapa „decydującym pytaniem nie jest rzekomy ontologiczny problem istnienia obiektów abstrakcyjnych, ale raczej pytanie o to, czy użycie abstrak-

[20] Nie chcę tu twierdzić, że Berkeley negował to, iż pewne fakty mogą nam jawić się jako oczywiste. Chodzi natomiast o to, że sama oczywistość zasad matematycznych nie stanowi bynajmniej gwarancji ich prawomocności. Teorie matematyczne zyskują bowiem swoje uprawomocnienie jedynie przez zastosowania w nauce.

cyjnych form lingwistycznych, czy [...] użycie zmiennych wykraczających poza zmienne dla rzeczy (lub dane fenomenalistyczne), jest skuteczne i owocne dla celów [...] analizy, interpretacji, wyjaśniania lub konstruowania [...] języka naukowego" (Carnap 1950: 247). Możemy zatem posługiwać się językiem matematyki, uchylając kwestie istnienia (czy raczej – traktując je jako pozbawione sensu pseudopytania). Oczywiście, z punktu widzenia stanowiska Carnapa, dowód matematyczny nie był postrzegany jako ciąg intuicyjnych aktów, ale dawał się zrekonstruować metodami logiki formalnej[21].

Język matematyczny w ujęciu Berkeleya nie opisuje więc wiecznych i niezmiennych prawd matematycznych, ale stanowi pewnego rodzaju praktyczne narzędzie, służące do ekonomicznego i sprawnego zapisywania rozumowań naukowych. Są to przekonania zdecydowanie odmienne od poglądów Kartezjusza, dla którego rękojmię prawomocności poznania matematycznego stanowi swoista intuicja – zdolność naszego intelektu do bezpośredniego ujmowania zarówno podstawowych prawd, jak i prawomocności rozumowań. Można więc owe dwa stanowiska uznać za modelowe dla dwóch różnych wizji argumentacji matematycznej, które określimy roboczo jako „wizję formalistyczną" i „wizję rozumiejącą".

3. Peacock i Pasch – algebra i geometria punktu widzenia formalizmu

Kartezjusz źródła wiedzy upatrywał w intuicji matematycznej. O prawomocności dowodu i danej argumentacji muszą świadczyć analizy o charakterze treściowym, a nie formalnym. Pogląd „treściowy" był obecny w matematyce (i refleksji nad nią) przez bardzo długi czas. Można powiedzieć, że jest to naturalny punkt widzenia, zwłaszcza jeśli uwzględni się podstawową rolę geometrii w rozwoju ma-

[21] Podobne – w odniesieniu do matematyki – jest stanowisko Hempla, który określił matematykę jako „teoretyczną sokowirówkę". Jej zadaniem jest ułatwienie nam rozumowań, jednak zdania tej dyscypliny naukowej są pozbawione faktycznej treści (Hempel 1945: 379).

tematyki. Rola intuicyjnego oglądu w rozumowaniach geometrycznych jest oczywista, a szereg intuicyjnych dowodów geometrycznych sprowadza się niejako do dostrzeżenia pewnych faktów[22]. Wyraz takiego „wyobrażeniowego" myślenia stanowi stwierdzenie Ponceleta: „W zwykłej geometrii [...] opisywana jest figura, nigdy nie tracimy jej z oczu, zawsze rozumujemy z użyciem wielkości i form, które są rzeczywiste, i nigdy nie dochodzimy do wniosków, które nie mogą być odzwierciedlone w wyobraźni lub przed naszymi oczyma za pomocą obiektów zmysłowych" (cyt. za: Detlefsen 2005: 265)[23]. Jednak stopniowo coraz większe znaczenie zyskuje inny sposób myślenia o procesie wnioskowania w matematyce. Można powiedzieć, że w poszukiwaniu istoty dowodu matematycznego – i zarazem sformułowania uprawomocniających go zasad – kryterium intuicyjności i oczywistości przestało wystarczać: po prostu w szeregu przypadków okazało się, że intuicje mogą być zwodnicze. Zaczęto więc poszukiwać owych kryteriów w postaci zobiektywizowanych, niezależnych od naszego intuicyjnego pojmowania reguł formalnych. W tym nowym ujęciu odchodzi się od wizji dowodu matematycznego jako procesu opierającego się na niezawodnych i jasnych intuicjach, które prowadzą nas przez wszystkie stadia dowodu. Na dowód zaczynamy patrzeć jak na – mówiąc dzisiejszym językiem – czysto syntaktyczny konstrukt. Kontemplacja wiecznych prawd matematycznych zostaje zastąpiona przez mechanicznie, nieodwołujące się do intuicji działania na symbolach. Taka zmiana nie nastąpiła oczywiście w sposób nagły, raczej była wynikiem pewnej ewolucji, w której stopniowo odchodzono od postulatu treściowej kontroli nad przedmiotem rozu-

[22] Jako przykład przytoczmy twierdzenie mówiące o tym, że każda krzywa zamknięta rozcina płaszczyznę na dwie części. Intuicyjnie jest ono absolutnie oczywiste (choć jego dowód jest nietrywialny). W wielu dowodach geometrycznych odwołujemy się do wyobrażeń typu „wyobraźmy sobie, że po tej krzywej porusza się punkt" albo „wyobraźmy sobie, że ten okrąg się powiększa, aż dotknie prostej" etc.

[23] Można powiedzieć, że mamy tutaj wręcz „wizualizacyjne" rozumienie dowodu. Szereg faktów geometrycznych ma dla nas absolutnie oczywisty charakter, np. to, że odcinek ma dokładnie jeden środek. Rota jako przykład takiego oczywistego faktu, którego dowód w gruncie rzeczy polega na „wejrzeniu" w geometryczną sytuację, podaje twierdzenie Desargue'a (Rota 1997).

mowania na rzecz postulatu postępowania zgodnie z pewnymi regułami, które nie są treściowo powiązane z przedmiotem analizy i mają charakter niejako zewnętrzny (i najczęściej – bardziej ogólny). Mówiąc o tej zmianie paradygmatu, nie mam na myśli tego, że kiedyś matematycy starali się rozumieć prowadzone przez siebie dowody, a teraz tylko dokonują przekształceń – byłby to oczywisty fałsz. Co więcej, sami badacze w praktyce posługują się kryteriami oczywistości czy intuicyjnej prawdziwości. Chodzi o to, że w analizach metodologiczno-filozoficznych punkt ciężkości zdecydowanie przesunął się, a przedmiotem analiz stały się w dużym stopniu czysto formalne własności dowodów.

W procesie owej „algebraizacji wizji dowodów matematycznych", czyli odchodzenia od poglądu treściowego na rzecz poglądu formalistycznego, istotną rolę odegrał oczywiście rozwój samej algebry. W tym kontekście trzeba wspomnieć o pracach Peacocka[24]. Jego główne dzieło, *Treatise on Algebra* (1830), miało ambicje ugruntowania algebry jako dyscypliny naukowej[25]. W jego ujęciu jest ona „nauką dotyczącą kombinacji dowolnych znaków i symboli zdefiniowanych za pomocą dowolnych praw" (Peacock 1830: 78). Punktem wyjścia była arytmetyka, jednak wyrażenia arytmetyczne stały się przedmiotem badania same w sobie, w oderwaniu od ich pierwotnej interpretacji[26]. Badanie formalnych własności wyrażeń jest algebraicznym uogólnieniem arytmetyki. Jednak podlega ono pewnym ograniczeniom – prawdy arytmetyczne muszą bowiem zostać zacho-

---

[24] Nie twierdzę oczywiście, że przed Peacockiem nie było takich czysto formalnych zastosowań algebry; mam jednak na myśli fakt, że badacz ten w jawny sposób sformułował określone zasady metodologiczne i można go traktować jako reprezentanta pewnego sposobu myślenia o matematyce. Określa się go zresztą mianem założyciela szkoły symbolicznej (do której należeli też De Morgan i Boole, por. Macfarlane 2009: 6).

[25] Należy pamiętać, że jeszcze w 1796 roku, w pracy *Principles of Algebra*, Frend protestował przeciwko używaniu liczb ujemnych, zarzucając metaforyczność wyjaśnieniom opartym na analogiach z długiem, co miało świadczyć o nienaukowości (por. Macfarlane 2009: 4). Widoczna była zatem konieczność rygorystycznego, naukowego ugruntowania algebry.

[26] „Algebra symboliczna przyjmuje reguły algebry arytmetycznej, ale usuwa ograniczenia tejże" (cyt. za: Macfarlane 2009: 7).

wane i – mówiąc obrazowo – to one stanowią probierz tego, czy dana konstrukcja algebraiczna jest dopuszczalna. Arytmetyka ma charakter dyscypliny „sugerującej" prawa algebry (*suggesting science*), składa się bowiem z oczywistych p r a w d, zaś algebrę tworzą użyteczne poznawczo z a ł o ż e n i a. Peacock odróżniał tu algebrę arytmetyczną od algebry symbolicznej. Wybór praw dla tej drugiej jest motywowany ich przydatnością do rozwiązywania problemów – a warunkiem tej przydatności jest to, że zachowują prawdy arytmetyki (Peacock mówił tu o *Principle of Permanence of Equivalent Forms*). Reguły algebry mają charakter arbitralny, nie wynikają z zasad arytmetyki, nie są wybierane z myślą o tym, aby opisać pewien dany uprzednio przedmiot[27]. Przyjęcie tego typu zasad metodologicznych ma też oczywiście istotny związek z pojmowaniem natury matematycznych rozumowań. Ujęcie Peacocka przypomina tu stanowisko Berkeleya: etapy pośrednie mogą być pozbawione interpretacji i pełnić rolę czysto instrumentalną, zaś ustalenie interpretacji jest konieczne dopiero w końcowym stadium rozumowania, aby można było podać jego wynik (dokładnie tak, jak to się dzieje w przekształceniach algebraicznych). Rozumowanie matematyczne może więc zawierać elementy manipulacji symbolami niezależnie od tego, czy te symbole są zinterpretowane. Ma więc charakter czysto symboliczny, a nie treściowy, i nie musimy być zdolni do rozumowego, intuicyjnego ujęcia poszczególnych kroków wnioskowania (jak postulował to w swoich *Prawidłach kierowania umysłem* Kartezjusz)[28]. Należy jednak podkreślić, że Peacock nie twierdził, iż matematyka to czysto formalna

[27] Warto tu przypomnieć składową „kreatywistyczną" stanowiska formalistycznego, wyróżnioną przez Detlefsena. Prawa algebry są w dużym stopniu dowolne (jedynie sugerowane przez prawa arytmetyki), motywowane chęcią rozwiązywania istniejących problemów matematycznych. Matematyk ma więc swobodę w tworzeniu narzędzi, ograniczany jest tu tylko wymogami o charakterze metodologicznym.

[28] Ściśle rzecz biorąc – do nadania tym krokom interpretacji. Trudno bowiem zaprzeczyć, że także w skrajnie formalistycznym ujęciu musimy umieć rozpoznać fakt, iż pewna operacja dokonana na symbolach jest zgodna z przyjętymi przez nas regułami. W tym przypadku jednak nie odwołujemy się do intuicji w takim sensie, jak rozumiał ją np. Kartezjusz, ale raczej do intuicji w bardzo zredukowanym znaczeniu (tak jak pojmował ją np. Hilbert).

gra symboli. W rozumowaniach matematycznych zostają wprowadzone elementy czysto formalne, ale zasadniczym celem poznawczym nadal pozostaje dochodzenie do p r a w d matematycznych. Formalizm Peacocka nie jest więc formalizmem skrajnym[29].

Badania Peacocka dotyczące algebraizacji arytmetyki stanowiły jeden z etapów kształtowania się nowego poglądu na naturę rozumowań matematycznych. Podobna zmiana myślenia zachodziła także w przypadku geometrii. Niewątpliwie znaczącym impulsem było tu pojawienie się geometrii nieeuklidesowych[30]. W tej nowej sytuacji teza głosząca, że geometria jest nauką o przestrzeni (fizycznej), opartą na naszych intuicjach, przestała mieć rację bytu. Geometria stawała się bowiem dziedziną wiedzy o pewnych strukturach oderwanych od poglądowych interpretacji, a stanowiących modele dla poszczególnych systemów geometrycznych (traktowanych w sposób czysto hipotetyczny)[31]. Nastąpiło więc odejście od idei, iż teoria matematyczna opisuje pewien dany uprzednio i intuicyjnie ujmowany model zamierzony, na rzecz myślenia w kategoriach możliwych interpretacji dla teorii[32]. W sytuacji, gdy intuicja geometryczna przestała stanowić rękojmię (i warunek) poprawności dowodu, coraz bardziej

29 Warto posłużyć się tu współczesną analogią: matematyk-realista jest przekonany o obiektywnym istnieniu rzeczywistości matematycznej, której dotyczą twierdzenia. Może jednak zgodzić się na użycie komputera w dowodzie, który dokonuje pewnych czysto symbolicznych operacji. Zarazem jednak ów badacz może twierdzić, że wynik tych czysto symbolicznych operacji ma pewną obiektywną treść (np. teorioliczbową).

30 Prace Pascha powstawały w momencie, gdy od dawna były znane modele dla geometrii nieeuklidesowych, zaś Riemann w swojej słynnej pracy *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (1858) dał początek nowemu, ogólniejszemu ujęciu geometrii. To niewątpliwie sprzyjało myśleniu o geometrii w terminach czysto formalnych.

31 Coffa zauważa w odniesieniu do problemu geometrii nieeuklidesowych, iż po raz pierwszy w historii społeczność naukowców musiała zaakceptować (i to nie jedynie w prowizoryczny, roboczy sposób) istnienie całego zestawu wzajemnie sprzecznych teorii dotyczących jednego zagadnienia. Wyjaśnienie tej nowej sytuacji stanowiło niewątpliwie wyzwanie dla filozofii matematyki (Coffa 1986: 8).

32 Gray twierdzi, że geometria sferyczna początkowo w ogóle nie była postrzegana jako model właściwy g e o m e t r i i, bowiem geometria dotyczy prostych na płaszczyźnie (lub w przestrzeni), a nie krzywych na kuli (Gray 1989: 171).

wyraźna stawała się potrzeba ustalenia obowiązujących standardów uprawiania matematyki, w szczególności usunięcia niejasności dotyczących metod dowodowych.

Analizy Peacocka można odnieść do problemu statusu elementów intuicyjnych w rozumowaniach arytmetycznych, natomiast w odniesieniu do geometrii w jawny sposób takie standardy sformułował Pasch[33]. Jego prace dotyczą statusu (i *de facto* eliminacji) elementów intuicyjnych w dowodach geometrycznych. Zdaniem Pascha warunkiem pełnej ścisłości dowodu jest możliwość abstrahowania od sensu pojęć geometrycznych (w szczególności też od diagramów – tj. ilustracji – i wszelkich elementów poglądowych). Jest wprawdzie rzeczą użyteczną i dopuszczalną myślenie w trakcie dowodu o tym, do czego te pojęcia się odnoszą, jednak nie jest to w ogóle konieczne, a co więcej, może stanowić źródło błędów i nieścisłości w dowodach.

> Jeśli geometria ma naprawdę być nauką dedukcyjną, proces wnioskowania musi we wszystkich fragmentach być niezależny od znaczenia pojęć geometrycznych, podobnie jak musi być niezależny od diagramów; pod uwagę mogą być brane jedynie relacje wyrażane w twierdzeniach i definicjach. W czasie wnioskowania jest użyteczne i dopuszczalne, ale nie konieczne myślenie o znaczeniach terminów; faktycznie, jeśli jest to konieczne, to w ten sposób widoczna staje się niepoprawność dowodu (Pasch 1882: 98).

W takim ujęciu, w samym procesie dowodzenia nie musimy (a nawet nie powinniśmy) opierać się na intuicyjnym oglądzie przedmiotu badań, ale traktować dowód czysto formalnie, jak symboliczne rozwiązywanie równania czy dokonywanie pewnych formalnych operacji na wyrażeniach algebraicznych. Jest to niewątpliwie ujęcie

---

33 M. Pasch (1843–1930) zajmował się geometrią. W pracy *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882) podał aksjomatyczne sformułowanie tej dyscypliny (które stało się inspiracją dla późniejszej aksjomatyzacji Hilberta). Odkrył tam m.in., iż geometria Euklidesa opierała się – jako na nieuświadomionym założeniu, przyjmowanym za oczywiste – na tzw. aksjomacie Pascha (w uproszczeniu: prosta nieprzechodząca przez żaden z wierzchołków trójkąta, ale przecinająca jeden bok trójkąta, musi przeciąć jeszcze przynajmniej jeden bok).

skrajnie odmienne od przywoływanej wcześniej koncepcji Ponceleta (w myśl której mamy „przed oczyma wyobraźni" badany przedmiot).

Potrzeba ustalenia standardów (i proces faktycznego ich tworzenia) dotyczyła oczywiście nie tylko geometrii czy algebry – podobny proces zachodził w przypadku np. analizy. Pierwotnie operowano w niej intuicyjnie rozumianym pojęciem wielkości nieskończenie małych, ale koncepcja ta ustąpiła miejsca podejściu opartemu na definicji epsilonowo-deltowej (należy pamiętać, że definicje ciągłości Cauchy'ego czy Heinego zostały sformułowane dopiero w XIX wieku!). To umożliwiło uwolnienie się od argumentacji odwołującej się do intuicji – na rzecz argumentacji opartej na obliczeniach i formalnych przekształceniach wyrażeń.

Poglądy Pascha dotyczące geometrii są utrzymane w duchu bardzo rygorystycznym (Freudenthal nazywa Pascha „ojcem ścisłości w geometrii" – Freudenthal 1962: 619). Rzeczywiście, jego zdaniem odwołania do intuicji w dowodzie geometrycznym świadczą o tym, że dowód ten zawiera luki. Powinien on bowiem dać się zrekonstruować w czysto formalny sposób, a sam proces dowodzenia winien mieć charakter zobiektywizowany i wolny od elementów wyobrażeniowych oraz odwołań do czysto intuicyjnej akceptacji faktów. Postulowany przez Pascha ideał ścisłości znajduje swoją realizację w pracach Hilberta.

4. *Grundlagen der Geometrie* Hilberta

W *Grundlagen der Geometrie* (1899) Hilbert podał aksjomatyczne ujęcie geometrii, które pozwoliło (przez wykorzystanie technik geometrii analitycznej) na konstrukcję modelu dla aksjomatów geometrii klasycznej i wykazanie w ten sposób semantycznej niesprzeczności tej aksjomatyki. Wersja Hilberta opiera się na terminach pierwotnych, takich jak punkt, prosta, płaszczyzna, oraz na predykatach pierwotnych wyrażających *leżenie między* (trójargumentowa relacja między punktami). Zawiera też dwuargumentowe predykaty *leżenia na* (punktu na prostej, punktu na płaszczyźnie, prostej na płaszczyźnie) oraz dwuargumentowe predykaty *przysta-*

wania (przystawania odcinków, przystawania kątów). Aksjomatyka Hilberta zawiera trzy grupy aksjomatów (incydencji, uporządkowania, przystawania), aksjomat równoległości oraz aksjomaty ciągłości. Okazuje się, że taka aksjomatyka definiuje z dokładnością do izomorfizmu strukturę izomorficzną z $\mathbf{R}^3$ (z naturalną interpretacją terminów pierwotnych). Ujęcie Hilberta pozwoliło na wykazanie niezależności od siebie aksjomatów (przez podanie modeli dla różnych wersji tej aksjomatyki, w których usuwano pewien aksjomat, zastępując go np. jego negacją). W ujęciu analitycznym terminy geometryczne (punkt, prosta etc.) interpretowano jako odpowiednie podzbiory, np. $\mathbf{R}^3$; nie była przy tym konieczna wizualizacja ani intuicyjne przedstawienie sobie tych obiektów[34]. Jest to procedura faktycznie bardzo odległa od rozumowań odwołujących się do naszego rozumienia przestrzeni[35]. Hilbert realizował program, w ramach którego rola intuicji przestrzennej została zredukowana do roli czysto pomocniczej, zaś intuicyjna interpretacja terminów geometrycznych nie jest konieczna dla prowadzenia dowodów. Te bowiem winny mieć charakter czysto formalny. W literaturze można spotkać stwierdzenia, że *Grundlagen der Geometrie* zadały śmiertelny cios koncepcji geometrii jako nauki o przestrzeni, opierającej się na intuicyjnych przekonaniach. Faktycznie, Hilbert nie nakłada żadnych warunków dotyczących natury obiektów składających się na modele dla systemu aksjomatów geometrycznych; nie

34 Warto jednak odnotować pracę Meikle, Fleuriot (2003), w której autorzy podają aksjomaty Hilberta formalizacji w systemie dowodzenia ISAR, wykazując, iż rozumowania badacza również (nieświadomie) odwoływały się do elementów intuicyjnych, wbrew deklaracji całkowitej formalizacji.

35 Sprawdzenie pewnego faktu za pomocą technik geometrii analitycznej może w ogóle nie wiązać się z tym, że potrafimy sobie tę geometryczną sytuację przedstawić (co jest oczywiste np. wtedy, gdy rozważamy problemy dotyczące przestrzeni o większej niż 3 liczbie wymiarów). Na przykład problem styczności krzywych ma interpretację analityczną jako problem istnienia rozwiązania układu równań i może być rozstrzygnięty czysto analitycznie, bez odwołań do poglądowej interpretacji. Z kolei korzystanie z tradycyjnych technik geometrycznych wymaga najczęściej przedstawienia sobie tej sytuacji i zrozumienia jej geometrycznych aspektów. Ilustruje to różnice między czysto formalnym a treściowym konstruowaniem dowodów matematycznych.

żąda w szczególności, aby interpretacja miała naturalny charakter[36]. Można tu więc mówić o pojawieniu się nowej, abstrakcyjnej koncepcji matematyki. Jej cechą charakterystyczną jest uniezależnianie się od intuicyjnego znaczenia terminów i koncentracja na badaniu czysto logicznych zależności między zdaniami matematycznymi[37].

W takim duchu uprawia geometrię Hilbert. W *Grundlagen* nie zajmuje się problemem, czym tak naprawdę są punkt, prosta, płaszczyzna etc., bowiem jego ujęcie ma charakter wyłącznie aksjomatyczny. Można powiedzieć, że w miejsce pojęcia prawdy geometrycznej, opisującej pewne obiektywne, dane uprzednio zależności przestrzenne, pojawia się pojęcie prawdy zrelatywizowanej do pewnego systemu spełniającego aksjomaty. Zależności logiczne między zdaniami geometrii zaczynają być badane w oderwaniu od ich zamierzonej interpretacji, jako zjawiska czysto metamatematyczne. W takim ujęciu podstawowym przedmiotem badań geometrii jest to, czy dane zdanie β jest prawdziwe w tych dziedzinach przedmiotowych (dziś powiedzielibyśmy: modelach), w których prawdziwe są inne zdania $\alpha_1,\ldots\alpha_n$. Nie stawiamy przy tym żadnych ograniczeń dotyczących natury tych dziedzin – w szczególności nie musimy intuicyjnie przypisywać charakteru geometrycznego obiektom zawartym w ich obrębie[38]. Geometria staje się nauką dotyczącą dowolnych dziedzin, w których prawdziwe są stosowne aksjomaty. Nawet jeśli

---

[36] Hilbert miał powiedzieć, że przy prawidłowej aksjomatyzacji geometrii powinniśmy być w stanie zamiast o punktach, prostych i płaszczyznach mówić o stołach, krzesłach i kuflach piwa (por. Shapiro 1996: 156). Geometria analityczna umożliwia konstruowanie takich modeli w terminach liczb rzeczywistych, ale też mogą mieć one zupełnie inny charakter.

[37] Tego typu styl uprawiania matematyki charakteryzuje Bernays w następujący sposób: „[rozumowania] są używane nie tylko po to, aby wspomóc naszą intuicję w badaniach dotyczących figur przestrzennych; zależności logiczne są raczej badane dla nich samych i w rozumowaniach jest dopuszczalne jedynie odwoływanie się do tych własności danej figury, które zostały jawnie założone lub które wynikają logicznie z założeń i aksjomatów" (Bernays 1967: 497).

[38] Znów będzie wygodnie odwołać się do przykładu geometrii analitycznej: zbiór $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: y=x^2\}$ można badać, abstrahując od jego geometrycznej interpretacji jako paraboli; podobnie można czysto analitycznie badać zbiór liczb zespolonych $\{e^{i\varphi}: \varphi\in[0,2\pi)\}$, abstrahując od jego geometrycznej interpretacji jako okręgu etc.

są one motywowane pewnymi intuicjami, to intuicyjne rozumienie terminów geometrycznych nie jest konieczne dla dowodzenia twierdzeń (choć oczywiście może być heurystycznie pomocne). Dziś takie ujęcie jest dla nas oczywiste, zaś teoria modeli – w której podstawowy przedmiot badań stanowi właśnie zależność między zdaniami pewnego języka formalnego a różnego typu modelami dla tych zdań – jest podstawowym działem (meta)matematyki. Jednak prace Hilberta pojawiły się w określonym kontekście historycznym i można uznać je za przełomowe.

W rygorystycznych dowodach Hilberta nie ma już śladu „jasnego i wyraźnego widzenia" Kartezjusza (ani kantowskich kategorii czasu i przestrzeni), twierdzenia geometrii nie są uzasadniane przez intuicyjny wgląd, ale dowodzi się ich w sposób formalny, w oderwaniu od interpretacji. W miejsce intuicyjnego oglądu prawdziwości mamy formalne dowody – można rzec: formalne operacje na symbolach. Interpretacja pojawia się dopiero na końcu – i tu może się okazać, że dowód oczywistego skądinąd faktu, iż odcinek ma dokładnie jeden środek, zajął kilka stron żmudnych rachunków[39].

5. Hilbert a Frege

Charakterystyczne dla podejścia aksjomatycznego jest uznanie, że to dopiero aksjomaty definiują znaczenia terminów. Nie ma więc sensu pytać o to, jaka jest istota obiektów geometrycznych, z a n i m zostaną podane opisujące je aksjomaty. To one precyzują sens pojęć, takich jak np. „punkt", „prosta", „płaszczyzna" etc. Aksjomaty pozwalają więc na wprowadzenie nowych terminów do matematyki w sposób niezależny od ich intuicyjnego rozumienia[40]. Stanowisko

[39] W tym przykładzie różnica między intuicyjnym a formalnym ujęciem jest wyraźna: to, że odcinek ma jeden środek jest absolutnie oczywiste, natomiast jako czysto formalne zdanie wymaga takiego samego dowodu jak każde (również trudne i nieoczywiste) inne twierdzenie geometryczne. Intuicja nie sankcjonuje tutaj prawomocności.

[40] Oczywiście Hilbert nie twierdził, że nie mamy intuicyjnego rozumienia pojęć geometrycznych i że do tego intuicyjnego rozumienia nie odwołujemy się

to radykalnie różni się od poglądu, w myśl którego pierwotna jest jakaś (nawet niesprecyzowana formalnie) semantyka, zaś ujęcie aksjomatyczne stanowi dopiero dalszy etap działań.

Stanowisko Hilberta warto skonfrontować ze stanowiskiem Fregego w tej kwestii. Frege – ojciec założyciel logicyzmu – niewątpliwie uważał badania logiczne i formalizację języka matematycznego za niezwykle ważne. Zarazem jednak miał odmienny pogląd na naturę języka matematycznego i rozumowań matematycznych. Zdaniem Fregego to definicje powinny wyjaśniać znaczenia używanych terminów, zaś zadaniem aksjomatów jest już wyrażanie p r a w d. Definicje przez postulaty nie wywiązują się natomiast z żadnego z tych zadań. Nie można ich uznać ani za prawdziwe definicje, ani za aksjomaty. Te drugie (oraz twierdzenia) nie powinny bowiem zawierać żadnych terminów, których sens nie byłby znany już uprzednio.

Zdaniem Hilberta definicja przez postulaty ma jednocześnie definiować terminy i ujmować prawdy na ich temat. Twierdzi on, że nie ma sensu poszukiwanie znaczeń terminów geometrycznych uprzednich w stosunku do zasad (czyli aksjomatów) opisujących podstawowe zależności między obiektami geometrycznymi (czyli – w ujęciu Hilberta – dowolnymi obiektami spełniającymi pewne zależności). Przy takim podejściu nie ma innego sposobu ustalenia znaczenia terminu niż przez wskazanie, jaka jest jego relacja względem innych terminów. Natomiast natura obiektów, do których odnoszą się aksjomaty, nie jest ustalona, gdyż nie jest to konieczne w badaniach matematycznych[41]. W jednym z listów do Fregego Hilbert pisał, że teoria matematyczna stanowi pewnego rodzaju budowlę (rusztowanie), w którym mamy podstawowe pojęcia wraz z relacjami między nimi (por. Shapiro 1996: 162). Taki sposób myślenia jest oczy-

---

w dowodach. Chodzi o to, że – z metodologicznego punktu widzenia – jest dopuszczalne czysto formalne, aksjomatyczne wprowadzanie terminów, zaś pytanie o ich sens będzie dobrze postawione d o p i e r o po podaniu ich formalnej definicji.

41 Shapiro zauważa, że jest to punkt widzenia bliski poglądom współczesnych strukturalistów, zdaniem których nie można mówić o własnościach wewnętrznych obiektów matematycznych, a jedynie o ich relacji do innych obiektów z danej struktury matematycznej (Shapiro 2005b).

wiście istotnie różny od ujęcia treściowego, w myśl którego mamy dostęp poznawczy do zamierzonego przedmiotu badań geometrycznych (np. do przestrzeni fizycznej). Frege uważał, że geometria ma pewien przedmiot badań, którym jest przestrzeń, zaś Hilbert badał logiczne konsekwencje aksjomatów, które uważał za uwikłane definicje pojęć geometrycznych. Dopuszczał wprowadzanie terminów w sposób czysto aksjomatyczny, bez uwzględniania ich ewentualnej interpretacji.

Oczywiście należy pamiętać o tym, że zabiegi Hilberta miały – w dużym stopniu – charakter metodologiczny. Nie twierdził on przecież, iż obiekty geometrycznie nie są przedmiotem zainteresowania geometrii – posługiwał się natomiast metodą aksjomatyczną, aby ugruntować geometrię jako ścisłą naukę i uwolnić dowody od domieszki subiektywizmu (stanowi to niejako wstępny etap późniejszego programu Hilberta dla całej matematyki). Jednak niezależnie od tego zastrzeżenia, warto podkreślić, że w takim ujęciu nadanie interpretacji nie jest konieczne dla posługiwania się językiem matematycznym (czy jego fragmentami). A zatem pewne części języka matematycznego mogą odgrywać ważną rolę w rozumowaniach matematycznych, mimo iż nie zostały wprowadzone w oparciu o rozważania treściowe, wywodzące się z jakiejś formy matematycznej intuicji, ale wyłącznie dlatego, że spełniają pewne warunki formalne. Nie jest niezbędne preteoretyczne, intuicyjne rozumienie tych pojęć. Jedyne kryterium stanowi tu formalna niesprzeczność postulatów charakteryzujących sens pojęć – poza tym swoboda matematyka nie jest niczym skrępowana.

Takie stanowisko wydaje się bliskie czysto formalistycznej wizji matematyki jako swoistej gry symboli, zaś rozumowań matematycznych – jako działań mechanicznych. Frege zdecydowanie odrzuca punkt widzenia, w myśl którego działalność matematyczna polega na manipulowaniu symbolami pozbawionymi znaczenia. Jego argumentację można przedstawić w następujący sposób: jeśli uznamy, że faktycznie wyrażenia arytmetyczne są pozbawione pozajęzykowego odniesienia, tym samym musimy uznać, że stwierdzenia arytmetyczne nie mogą wyrażać żadnych treści. Jednak wówczas arytmetyka nie może być nigdzie zastosowana – i tym samym nie można uznać jej za naukę. Tak właśnie jest w przypadku szachów: nie stanowią one nauki, bo nie wyrażają myśli. Nie można „wiedzy szachowej" zastosować do innych dziedzin. Inaczej jednak jest w przypadku arytmetyki: zdania arytmetyczne wyrażają myśli, nie są jedynie zbiorami symboli, które przekształcamy zgodnie z jakimiś arbitralnymi regułami. „To stosowalność podnosi arytmetykę do rangi nauki" (Frege 1903: §91). Zdaniem Fregego rozumowania nie mogą mieć czysto symbolicznego charakteru. Winny być więc oparte na przesłankach, które są czymś więcej niż tylko zbiorami niezinterpretowanych symboli (którymi manipulujemy zgodnie z pewnymi regułami):

> wnioskowanie nie składa się z symboli. Możemy jedynie powiedzieć, że przejście od jednej grupy symboli do drugiej może sprawiać wrażenie [podkr. K. W.], jak gdyby dane było nam pewne wnioskowanie. Jednak wnioskowania nie przynależą po prostu do królestwa znaków; stanowią raczej uzasadnienie sądu oparte o pewne prawa logiki w oparciu o pewne uprzednio zaakceptowane przesłanki. Każda z tych przesłanek wyraża określoną myśl uznaną za prawdziwą, zaś wniosek polega na tym, że pewna określona myśl zostanie uznana za prawdziwą [...]. Czym jest wnioskowanie formalne? Możemy powiedzieć, że w pewnym sensie każde wnioskowanie jest formalne, gdyż odbywa się zgodnie z pewnymi ogólnymi prawami wnioskowania; w innym sensie, każde wnioskowanie jest nieformalne, gdyż zarówno przesłanki, jak i wniosek mają pewną myślową treść, których połączenie ujawnia się tylko w tym wnioskowaniu (Frege 1906: 387; cyt. za: Detlefsen 2005: 302).

Analiza formalnych aspektów wnioskowań, w szczególności symbolizacja, ma ukazać zależności pojęciowe, jakie leżą u ich podłoża. Nie można tu więc mówić o radykalnym formalizmie, bowiem chodzi o wykorzystanie analiz formalnych dla uchwycenia zależności, które wykraczają poza zależności czysto formalne. Można powiedzieć, że w ujęciu Fregego jest widoczne napięcie pomiędzy treściowymi a formalnymi aspektami dowodu, zaś ujęcie formalistyczne ma sens o tyle, o ile jest motywowane chęcią odkrycia obiektywnych związków między pojęciami. Istotą rozumowania matematycznego jest odkrywanie tych związków. Same zaś wnioskowania muszą być oparte na przesłankach mających myślową treść.

6. Program Hilberta

Na przełomie XIX i XX wieku nastąpił dynamiczny rozwój matematyki – powstawały coraz bardziej abstrakcyjne jej działy, tworzyły się zręby współczesnej logiki. Jednocześnie toczyły się dyskusje dotyczące tego, jakie metody dowodowe są dopuszczalne i gdzie są właściwie granice matematyczności. Warto tu przypomnieć znamienny fakt: kiedy Hilbert podał w roku 1888 niekonstruktywne rozwiązanie problemu Gordana[42], to podobno sam Gordan miał stwierdzić, że ten sposób argumentacji nie jest matematyką, lecz teologią[43]. Nie było wówczas jasne, jakie reguły argumentacyjne wchodzą w grę w matematyce (czy są dopuszczalne również metody niekonstruktywne) i jakie pojęcia matematyczne winny być uznane za podstawowe. Pojawiały się głosy postulujące arytmetyzację całej dziedziny, czyli ugruntowanie wszystkich dyscyplin matematycznych na arytmetyce – poglądy tego typu reprezentowali (znacznie wcześniej) Abel, Euler, Lagrange, Gauss, Dirichlet, zaś w czasach Hilberta – Kronecker czy Poincaré (por. Sieg 1984). Dynamiczny rozwój logiki formalnej i sukcesy metody aksjomatycznej w ujęciu pewnych teorii matematycznych stanowiły impuls dla tworzenia się programu redukcji matematyki do czystej logiki – z drugiej zaś strony, radykalnie odmienne postulaty reformy matematyki zgłaszali intuicjoniści. Nie ulega też wątpliwości, że ważnym impulsem dla rozwoju współczesnej matematyki było stworzenie przez Cantora teorii mnogości[44]. Teoria ta, ze swymi silnymi i wysoce abstrakcyjnymi założeniami, wykraczała poza akceptowane wówczas ramy uprawiania dyscypliny

---

42 Chodziło o problem dotyczący istnienia bazy dla systemu form kwadratowych.

43 Podobno później Gordan przyznał, że teologia też ma swoje zalety.

44 Niekiedy Cantora określa się wręcz mianem „ojca współczesnej matematyki". Niezależnie od tego, czy faktycznie rola Cantora była aż tak znacząca, nie ulega wątpliwości, że powstanie teorii mnogości otworzyło przed matematyką nowe perspektywy.

i nie została przyjęta przez społeczność matematyków z otwartymi ramionami (przynajmniej w początkowej fazie swojego istnienia)[45].

Można powiedzieć, że w matematyce zaszła swoista rewolucja pojęciowa, była widoczna ofensywa nowych, abstrakcyjnych metod i ujęć. W naturalny sposób pojawiała się potrzeba wyjaśnienia problemów nie tylko technicznych, lecz również fundamentalnych kwestii metodologicznych i filozoficznych. Dyskusja toczyła się np. wokół pewnika wyboru, aksjomatu kontrowersyjnego ze względu na swój wysoce niekonstruktywny charakter[46]. Rozwój logiki i możliwość precyzyjnego, formalnego ujęcia treści opisywanych do tej pory intuicyjnie umożliwił wyjaśnienie pewnych kwestii, ale zarazem ukazywał paradoksy wynikające z nie dość skrupulatnej aksjomatyzacji.

Sformułowany przez Hilberta program stanowi próbę rozwiązania trudności i uprawomocnienia matematyki przez znalezienie dla niej niepodważalnego fundamentu. Trudności powstawały w szczególności w związku z pojawieniem się niekonstruktywnych metod teorii mnogości z jej silnymi i abstrakcyjnymi postulatami egzystencjalnymi. Hilbert teorię mnogości określa jako „najwspanialszy owoc matematycznego ducha i w ogóle jedno z najwyższych osiągnięć rozumu ludzkiego" (Hilbert 1926: 167). Jednak aby móc

---

[45] Warto pamiętać o tym, że Cantor sięgał także do inspiracji o charakterze filozoficznym, a pojęciu nieskończoności aktualnej nadawał interpretację teologiczną. To również musiało budzić opór w środowisku matematyków. Opis religijnych motywacji Cantora można znaleźć w pracach: Murawski (1984), Purkert (1989).

[46] Niebawem jednak okazało się, że pewnik wyboru umożliwia uzyskanie wielu ważnych i ciekawych wyników. Bez niego nie dałoby się udowodnić szeregu ważnych twierdzeń matematycznych, takich jak np. lemat Kuratowskiego–Zorna, który jest wykorzystywany w wielu działach matematyki. Zermelo pisał więc, iż „ten aksjomat [...] był używany z powodzeniem w najróżniejszych częściach matematyki [...]. Tak obszerne użycie tego aksjomatu może być wyjaśnione jedynie przez jego oczywistość [...]; stanowi on z pewnością konieczne źródło zasad matematycznych" (Zermelo 1908: 187). Inne trudności związane z samą teorią mnogości dotyczą np. przyjęcia istnienia aktualnej nieskończoności, wraz z całą potężną hierarchią zbiorów nieskończonych, czy uznanie dopuszczalności metod niekonstruktywnych, w szczególności dopuszczalności operacji zbioru potęgowego jako operacji tworzenia nowych obiektów matematycznych.

korzystać z czystym sumieniem z całego bogactwa jej technik, konieczne jest wyjaśnienie, jaką rolę w matematyce odgrywa pojęcie nieskończoności (i uprawomocnienie użycia go). Nieskończoność (aktualna) nie ma przecież odpowiednika w świecie fizycznym, choć jest jednym z najważniejszych pojęć matematycznych (Hilbert 1926: 190). Wyjaśnienie tego zagadnienia jest ważne dla matematyki; Hilbert twierdzi nawet, że stanowi to problem poznawczy o podstawowym charakterze, wykraczającym poza ramy tej dziedziny[47]. Droga do wyjaśnienia pojawiających się trudności nie może oczywiście prowadzić przez eliminację spornej, budzącej kontrowersję części matematyki. Na przykład Brouwer postulował odrzucenie części założeń, na których opiera się klasyczna matematyka (na przykład prawa wyłączonego środka). Jednak tego typu propozycje prowadziłyby do osłabienia matematyki i do jej okaleczenia. Hilbert przeciwstawiał się więc takiemu sposobowi myślenia: „To co robił Weyl i Brouwer, to nic innego jak pójście w ślady Kroneckera! Próbują oni uratować matematykę wyrzucając z niej wszystko, co sprawia kłopot. [...] Jeśli zgodzimy się na takie propozycje, to ryzykujemy utratę wielu największych naszych skarbów" (cyt. za: Murawski 1993)[48]. Nastawienie Hilberta jest zupełnie inne; jego cel to uprawomocnienie całej matematyki, wraz z jej silnymi metodami (w szczególności teoriomnogościowymi): „Gdzie tylko są jakieś widoki powodzenia, tam chcemy dokładnie badać owocne definicje i metody dedukcji. Chcemy je pielęgnować, wzmocnić i czynić użytecznymi. Z raju, który stworzył nam Cantor, nikomu nie wolno nas wypędzić. [...] Musimy ustanowić w matematyce taką samą pewność wnioskowań, jaka ma miejsce w elementarnej teorii liczb, gdzie nikt nie ma żadnych wątpliwości, i gdzie paradoksy i sprzeczności powstają jedynie przez naszą nieuwagę" (Hilbert 1926: 170). Kluczem do osiągnięcia tego celu

47 „Definitywne wyjaśnienie natury nieskończoności stało się koniecznością nie tylko ze względu na specjalne znaczenie tej kwestii dla tej czy innej nauki, ale także dla uczczenia samego umysłu ludzkiego" (Hilbert 1926: 163; cyt. za: Murawski 1993).

48 Warto tu także przytoczyć uwagę Hilberta dotyczącą Brouwera: „Brouwer nie dokonuje – jak sądzi Weyl – rewolucji; jest to jedynie powtórka próby puczu" (cyt. za: Smorynski 1977: 823).

miało być wykorzystanie metody aksjomatycznej i osiągnięć logiki formalnej[49].

W programie Hilberta można (oczywiście w pewnym uproszczeniu) wyróżnić trzy etapy[50]:

1. W pierwszym z tych etapów zostanie wskazany pewien fragment matematyki, który można uznać za ugruntowany finitystycznie. Musi być on na tyle obszerny, aby dało się w nim opisać (sformalizować) operacje na skończonych ciągach znaków.

2. Drugi krok polega na sformalizowaniu matematyki w jednym systemie formalnym. Formuły w tym systemie mają być skończonymi ciągami symboli, możliwy więc będzie ich opis za pomocą metod finitystycznych (które zostały scharakteryzowane w pierwszym etapie).

3. Trzeci etap pracy ma polegać właśnie na udowodnieniu niesprzeczności tego systemu formalnego za pomocą niekontrowersyjnych metod finitystycznych.

Mamy więc tutaj do czynienia z próbą oparcia epistemologii matematyki na możliwie bezpiecznych podstawach. Wyraźnie mówi o tym następujący fragment:

> Już [Kant – przyp. K. W.] uczył [...] że matematyka posiada treść pewną i niezależną od jakiejkolwiek logiki, i że w związku z tym nigdy

---

[49] Powszechnie twierdzi się, że program Hilberta nie może zostać zrealizowany ze względu na wyniki Gödla. Nie jest to do końca oczywiste, ponieważ nie wiadomo do końca jak interpretować pojęcie metody finitystycznej używane przez Hilberta. Detlefsen twierdzi np., iż program Hilberta nie został obalony (Detlefsen 1986, 1990). Mówi się też o częściowych realizacjach tego programu, np. w ramach badań nad tzw. matematyką odwrotną (por. Simpson 1988). Przedmiotem jej badań jest problem rekonstrukcji możliwie dużych fragmentów matematyki w słabych teoriach (podsystemach arytmetyki drugiego rzędu; por.: Murawski 1993, Simpson 1988, Wójtowicz 2003). Mówi się też o zrelatywizowanym programie Hilberta, w którym jest istotne znalezienie teoriodowodowych redukcji silniejszych teorii do słabszych (por. Feferman 1988). W takim ujęciu „część matematyki M jest reprezentowana w teorii formalnej T_1, która opiera się (*justified*) o system pojęć (*foundational or conceptual framework*) S_1. Teoria T_1 jest redukowana teoriodowodowo do teorii T_2, która jest oparta o inny, bardziej fundamentalny system pojęć S_2" (Feferman 1988: 364).

[50] Ich opis można znaleźć np. w Simpson (1988).

> nie może zostać ugruntowana w oparciu o samą tylko logikę. Dlatego też próby Fregego i Dedekinda nie doprowadziły do niczego. Jako warunek wstępny stosowania wnioskowań logicznych i wykonywania operacji logicznych dane jest już coś w przedstawieniu (*in der Vorstellung*): [mianowicie] pewne pozalogiczne konkretne obiekty, które jawią się jako doświadczane bezpośrednio przed wszelkim myśleniem [...]. W szczególności w matematyce przedmiotem naszych rozważań są konkretne znaki, których kształt [...] jest bezpośrednio jasny i rozpoznawalny (Hilbert 1926: 170–171; cyt. za: Murawski 1986).

Punktem wyjścia jest więc pewnego typu intuicja, choć rozumiana inaczej niż czynili to Kant czy Kartezjusz. Ta „konkretna intuicja" umożliwia dostęp poznawczy do ciągów symboli i operacji na tych symbolach. Stanowi to niejako kamień węgielny teorii dowodu, która – zdaniem Hilberta – miała posłużyć jako ugruntowanie całej matematyki i stanowić rdzeń jego programu[51].

Z punktu widzenia dyskusji dotyczącej statusu dowodu matematycznego (z podkreśleniem kwestii nadawania interpretacji poszczególnym krokom dowodowym), ważny jest warunek nietwórczości sformułowany przez Hilberta. Badacz ten, wyróżniając realną i idealną część matematyki (niezależnie od tego, że nie jest w pełni jasne, jakie było tu kryterium), wskazywał na fakt, iż zdania matematyki realnej są poznawczo bezpieczne, natomiast warunkiem, który niejako rozciąga te gwarancje bezpieczeństwa na zdania matematyki idealnej, jest warunek nietwórczości. Mówiąc swobodnie, warunek ten głosi, że dowody tych twierdzeń matematyki realnej, które możemy przeprowadzić za pomocą metod matematyki idealnej, mają uprawomocnienie w tej pierwszej. W języku bardziej technicznym, warunek nietwórczości teorii T^* nad teorią T, ze względu na klasę zdań P, głosi po prostu, że dowolne zdanie α z klasy P, które jest dowodliwe środkami teorii T^*, jest też dowodliwe wewnątrz teorii T (innymi słowy, T^* może co najwyżej ułatwić dowody, ale nie pozwala na udowodnienie niczego nowego). Pojawia się naturalne

---

[51] Jest to ujęcie zdecydowanie różne np. od poglądów Gödla, który podkreślał znaczenie swoistej nieredukowalnej, semantycznej intuicji dotyczącej pojęć matematycznych, a nie jedynie operacji na symbolach.

zagadnienie, jaki jest status takich wnioskowań, a także – jaki jest status teorii T*. Trudno tutaj uciec od pytań ontologicznych (zwłaszcza jeśli jesteśmy realistami w odniesieniu do wyjściowej teorii T): czy można korzystać z narzędzi T*, traktując ją czysto instrumentalistycznie, czyli odmawiając jej interpretacji? Czy można traktować dowody wewnątrz T jako semantyczne, a dowody wewnątrz T* jako czysto formalne? Realista uzna zarówno T, jak i T* za teorie zinterpretowane, radykalny formalista uzna zarówno T, jak i T* za teorie czysto formalne, natomiast ciekawy problem powstaje w przypadku stanowiska pośredniego, częściowego instrumentalizmu, jakim – jak się wydaje – jest stanowisko Hilberta. Akceptował on wizję języka matematyki, w myśl której pewne jego fragmenty mogą mieć istotne znaczenie poznawcze, mimo iż nie posiadają interpretacji pozajęzykowej. Dopuszczał w trakcie dowodzenia nowych twierdzeń dokonywanie manipulacji znakami, przy której abstrahujemy od ich interpretacji (czy ogólniej: od treści używanych pojęć)[52]. Przypomnijmy, że w takim duchu były prowadzone badania geometryczne: z punktu widzenia samego procesu dowodzenia intuicyjna interpretacja terminów (jako geometrycznych bądź analitycznych – lub jakichkolwiek innych) nie była warunkiem poprawności dowodu. Warunki owe były bowiem zdefiniowane w terminach czysto formalnych.

Taka wizja matematyki jest bardzo odległa od treściowej (czy rozumiejącej) koncepcji dowodu (w stylu Kartezjusza). Specyficzna intuicja, umożliwiająca jasne i wyraźne „chwytanie" pojęć matematycznych (oraz ujmowanie w intelektualnym oglądzie poszczególnych kroków matematycznego rozumowania), ustępuje miejsca wi-

[52] Można znów odwołać się do stosowania technik analitycznych przy dowodzeniu twierdzeń geometrycznych. Figury geometryczne interpretujemy jako zbiory par (ogólniej: *n*-tek) liczb rzeczywistych, a fakty geometryczne – jako fakty o pewnych równaniach algebraicznych. Przy opisie tych równań stosujemy techniki np. analizy zespolonej (które nie mają już geometrycznego odpowiednika), ale ostateczne wyniki tych rozważań można znów interpretować geometrycznie. Ogólniej: po sformalizowaniu geometrii w postaci teorii T_G, możemy ją zanurzyć w jakiejś silniejszej teorii T i korzystać również z technik niedostępnych w pierwotnej teorii T_G.

zji, w której wnioskowanie o charakterze materialnym (treściowym) zostaje zastąpione przez procedury o charakterze formalnym (Hilbert 1926). Przypomnijmy tutaj warunek „globalnej ogarnialności" Kartezjusza, czyli postulatu ujęcia w jednym akcie intelektualnym całej idei rozumowania. W myśl stanowiska formalistycznego taki postulat nie ma racji bytu; wprost przeciwnie – chodzi o rozbicie dowodu na fragmenty tak, aby każdy z nich mógł zostać zaakceptowany w oparciu o czysto formalne warunki. Reguły dowodowe mogą dotyczyć bowiem tylko takich elementarnych kroków.

Program Hilberta można interpretować jako stanowisko wyłącznie metodologiczne – sam autor nie odmawiał wszak sensu pojęciom matematyki idealnej. Raczej starał się traktować je tak, j a k g d y b y były one pozbawione znaczenia. Poglądy Hilberta wyrażają przy tym swoisty poznawczy optymizm. W jednej ze swoich prac stwierdza, że każdy dobrze postawiony problem matematyczny może być rozwiązany – zgodnie z jego słynnym powiedzeniem: w matematyce nie ma żadnego *ignorabimus*[53]. Przy czym przez rozwiązanie problemu matematycznego badacz rozumiał bądź udziele-

[53] W pracy McCarty (2004) przedstawiono ten aspekt stanowiska Hilberta, kontrastując go z poglądami Paula du Bois-Reymonda (wybitnego matematyka XIX wieku, autora wielu ważnych osiągnięć w dziedzinie równań różniczkowych, rachunku wariacyjnego, analizy funkcjonalnej i topologii). Brat Paula, Emil du Bois-Reymond, był fizjologiem, który w 1872 roku sformułował tezę *ignorabimus*: nauka jest obarczona wewnętrznymi ograniczeniami, pewne problemy nie zostaną nigdy rozwiązane. Paul du Bois-Reymond reprezentował podobne stanowisko w odniesieniu do matematyki. Był przeciwnikiem arytmetyzacji matematyki i formalizmu (McCarty uważa go za bezpośredniego poprzednika Brouwera). Zdaniem du Bois-Reymonda w matematyce można wyróżnić dwie podstawowe tradycje: idealistyczną i empirystyczną, które prowadzą do zasadniczo różnych sposobów jej uprawiania (stanowiąc zarazem odbicie fundamentalnego problemu wszelkiej filozofii, nie tylko filozofii matematyki). Nie jest możliwe podanie rozstrzygającego argumentu na rzecz takiego lub innego sposobu patrzenia na matematykę. Przypomnijmy też, że Kant pisał o dręczących ludzki umysł pytaniach, „których nie może uchylić, albowiem zadaje mu je własna jego natura, ale na które nie może odpowiedzieć, albowiem przewyższają one wszelką jego możność" (Kant 1957, A vii: 7). Stanowisko Hilberta odnośnie do tego problemu ma więc zupełnie „niekantowski" charakter.

nie konkretnej odpowiedzi na zadane pytanie, bądź w y k a z a n i e, że taka odpowiedź nie może być odnaleziona[54].

7. Uwagi końcowe

Jako podsumowanie rozważań dotyczących zmiany poglądów na naturę dowodu matematycznego i roli elementów intuicyjnych w dowodzeniu twierdzeń, przytoczę opinię Hahna:

> Ponieważ intuicja okazała się zwodnicza w tak wielu przypadkach i ponieważ twierdzenia akceptowane na mocy intuicji okazywały się fałszywe (na mocy wnioskowania logicznego), matematycy stawali się coraz bardziej sceptyczni w odniesieniu do intuicji. Uznali, że nie jest rzeczą bezpieczną akceptowanie jakiegokolwiek stwierdzenia matematycznego [...] na intuicyjnych przekonaniach. Pojawiło się dążenie do wyeliminowania intuicji z rozumowań matematycznych i całkowitej formalizacji matematyki. [...] każde nowe pojęcie matematyczne miało być wprowadzane przez czysto logiczne definicje; każdy matematyczny dowód przeprowadzany za pomocą czysto logicznych środków (Hahn 1980: 93).

Hahn formułuje swoje tezy w bardzo radykalny sposób. Sugeruje rewolucyjną zmianę w myśleniu samych matematyków o dowodzeniu – jakoby rzeczywiście przestali się oni odwoływać do intuicji, a prowadzili czysto formalne rozumowania. Tak jednak nie jest, zaś uwagę Hahna należy odnieść raczej do refleksji filozoficznej nad matematyką i można się zgodzić, że faktycznie w pewnym momencie nastąpił zwrot w takim właśnie kierunku. Istotną rolę odegrał tutaj oczy-

[54] Używając dzisiejszej terminologii, można powiedzieć, że rozwiązanie problemu mogło pojawić się bądź na poziomie samej teorii, bądź na metapoziomie. Detlefsen zauważa w tym kontekście, iż dopuszczenie jako rozwiązania właśnie takiej negatywnej odpowiedzi (można powiedzieć – metaodpowiedzi) rodzi pewne problemy metodologiczne: czy jest konieczne znalezienie d o w o d u braku odpowiedzi, czy też chodzi jedynie o sformułowanie pewnego a r g u m e n t u? W tym sensie nie do końca jest jasne, gdzie leży granica pomiędzy *ignorabimus* a *nie ma ignorabimus* (Detlefsen 2005: 285).

wiście rozwój logiki formalnej, która dostarczyła narzędzi do badań metamatematycznych – co z kolei dało impuls powstaniu takich stanowisk w filozofii matematyki jak logicyzm czy formalizm. Hahn mówi o tym, że w nowym, rodzącym się paradygmacie każdy matematyczny dowód ma być możliwy do przeprowadzenia za pomocą czysto logicznych środków. To, czy poszczególne kroki dowodowe są prawomocne, staje się więc przedmiotem jurysdykcji logiki, nie zaś samej matematyki, a już tym bardziej intuicji. Dowody matematyczne mogą być traktowane w sposób czysto formalny, jako operacje symboliczne. „Żądanie, aby każda formuła z osobna była interpretowalna, nie jest rozsądne; wprost przeciwnie, natura teorii jest taka, że nie musimy opierać się na intuicji czy [jej – przyp. K. W.] znaczeniu w środku dowodu" (Hilbert 1928: 475). Mówiąc nieco żartobliwie, w miejsce „Widzę!" pojawia się „Wyszło z obliczeń!" (choć oczywiście w realnych procesach dowodowych zawsze będziemy dążyć do intuicyjnego uchwycenia owych wyników, nie zadowalając się konstatacją, że taka oto formuła pojawiła się na końcu ciągu formalnych przekształceń). W takim ujęciu należałoby się zgodzić ze stwierdzeniem, iż nie ma nic specyficznie matematycznego w działalności matematycznej.

Logicyzm czy (co oczywiste) formalizm, odebrały intuicji matematycznej rolę arbitra, wprowadzając w to miejsce logikę (również traktowaną formalnie). Oba te nurty miały charakter silnie normatywny – w tym sensie, że punktem wyjścia dla nich była nie realna praktyka matematyczna, lecz raczej pewna wyidealizowana wizja matematyki i dowodu matematycznego, pewnego typu konstrukt idealny, który stał się następnie przedmiotem analiz (i zarazem swoistym wzorcem ścisłości)[55]. Kiedy więc Hahn mówi o matematykach, to należy pamiętać, że ma na myśli raczej filozofów podejmujących refleksję nad tą dziedziną nauki. Z drugiej strony, należy oczywiście

[55] Oczywiście z takim postawieniem sprawy nie zgodziliby się intuicjoniści, dla których działalność matematyczna stanowi swobodną aktywność umysłu, niedającą ująć się w formalne ramy. Intuicjonizm również miał silne ambicje normatywne – w pewnym sensie najsilniejsze ze wszystkich prądów filozoficznych, ponieważ postulował radykalną reformę matematyki. Jak jednak wiadomo, taka reforma nie dokonała się.

przyznać, że równolegle z tym procesem nastąpił pewien wzrost samoświadomości metodologicznej i rygoryzmu w samej matematyce. Współcześnie zaś ów czysto formalny aspekt dowodów uwidacznia się w oczywisty sposób przy okazji tworzenia dowodów komputerowych.

Inną istotną zmianą jest odejście od myślenia o teoriach matematycznych w kategoriach zamierzonych interpretacji. Bardzo wyraźnie widać to na przykładzie geometrii, która pierwotnie była traktowana jako nauka o jasno określonym przedmiocie badań, a która w ujęciu Hilberta stała się nauką o dowolnych strukturach relacyjnych spełniających pewne warunki. W takim ujęciu „natura" owych struktur nie może być ujęta inaczej, jak tylko przez te aksjomaty (Bernays 1967: 497). W przypadku geometrii czysto logiczne rozumowania ugruntowane na aksjomatach nie stanowią tylko wsparcia dla odwołujących się do intuicji badań figur przestrzennych, ale są właściwym sposobem argumentacji i jedyną podstawą do formułowania twierdzeń na temat zjawisk geometrycznych. Podobnie rzecz się ma także w przypadku innych teorii matematycznych.

Znane jest stwierdzenie Poincarégo, iż logika czasem rodzi potwory (Poincaré 1952: 125). Można powiedzieć, że to algebraizacja i formalizacja matematyki wprowadziła takie właśnie monstra na salony matematyczne. Intuicja przestaje być rękojmią prawdziwości twierdzeń nawet wtedy, gdy subiektywnie nie mamy absolutnie żadnych wątpliwości[56]. Obecnie raczej oskarżymy intuicję o to, że jest błędna i zwodnicza, niż samą matematykę o to, iż jest uprawiana w niewłaściwy sposób. Jeśli posłużymy się rozróżnieniem dowodów na te wymuszające zgodę na daną tezę i te oświecające umysł, to swoistym *novum*, które przynosi nam stanowisko formalizmu, jest właśnie wprowadzenie kategorii dowodu wymuszającego zgodę. Choć taki dowód nie musi być rozumiany intuicyjnie, to jednak wzbogaca

---

[56] Przykładem może być (wspomniane wcześniej) twierdzenie Jordana, głoszące, iż każda krzywa zamknięta dzieli płaszczyznę na dwie części. Mimo iż sprawia ono wrażenie oczywistego, to zostało zaakceptowane dopiero po przedstawieniu (wcale niełatwego) dowodu, który nie miał już charakteru poglądowego. Innym przykładem (o którym wcześniej też była mowa) jest twierdzenie, że odcinek ma dokładnie jeden środek.

naszą wiedzę matematyczną i pełni istotną rolę w budowaniu gmachu wiedzy matematycznej.

Należy jednak wyraźnie podkreślić, że formalizm można rozumieć nie jako stanowisko skrajne („matematyka jako gra szklanych paciorków"), ale w szerszym sensie, jako stanowisko, dla którego jest charakterystyczne odejście od „treściowego", intuicyjnego rozumienia dowodu matematycznego – czy, mówiąc jeszcze ostrożniej, dostrzeżenie aspektu czysto formalnego w dowodach matematycznych. Taka zachowawcza wersja formalizmu jest z pewnością bardziej owocna filozoficznie. Skłania do podjęcia refleksji dotyczącej naszej zdolności do rozpoznania, że rozumowanie przebiega zgodnie z pewnymi regułami, a także do zidentyfikowania źródła owych reguł. Nie ulega przecież wątpliwości, iż reguły te mają swoje źródło i jest nim nasza zdolność do preteoretycznego ujęcia pewnych zasad jako właściwych. Celem teorii dowodu ma być właśnie opisanie (uchwycenie) naszego procesu rozumienia, „stworzenie protokołu reguł, zgodnie z którymi przebiega nasze myślenie. Myślenie, tak się składa, przebiega równolegle do mówienia i pisania: tworzymy wypowiedzi i umieszczamy je jedną za drugą" (Hilbert 1928: 475). Hilbert podkreśla, że reguły naszego myślenia tworzą system, który jesteśmy w stanie odkryć i precyzyjnie opisać[57]. Jeśli więc nawet dowodzenie uznać za swoistą grę symboli, to jest to gra prowadzona w oparciu o reguły, które ujmują sposób naszego myślenia. Tak rozumiane stanowisko „słabego formalizmu" nie wiąże się z całkowitym zanegowaniem roli intuicji w matematyce (w duchu cytowanej wcześniej radykalnej wypowiedzi Hahna), ale raczej ze zwróceniem uwagi na pewne metodologiczne aspekty uprawiania tej nauki[58]. Z tego

---

[57] Nie ma tu więc oczywiście żadnego „matematycznego mistycyzmu". Myślenie matematyczne jest ujmowalne w precyzyjne reguły; można powiedzieć, że jest – w swobodnym sensie tego słowa – algorytmizowalne.

[58] Pewnego typu intuicyjne, preteoretyczne ujęcie podstawowych dla danej dziedziny prawd jest konieczne, aby w ogóle ta dyscyplina mogła zaistnieć. Aksjomatyzacja stanowi znacznie późniejszy etap. Mówiąc o tej eliminacji intuicji, mam raczej na myśli to, że intuicja rozumiana w najprostszy – poniekąd naiwny – sposób (np. jako wizualizacja), nie jest uważana za wiarygodny środek dowodowy. Dyskusji tego typu problemów jest poświęcona praca Fefer-

punktu widzenia formalizacja jest zabiegiem, który ułatwia uzyskanie intersubiektywnie sprawdzalnych wyników i stanowi zarazem argument na rzecz tej intersubiektywności właśnie. O prawomocności dowodu ma bowiem decydować to, czy spełnia on pewne formalne warunki, a nie to, czy nasze „jasne i wyraźne widzenie" każe nam zaakceptować dane rozumowanie.

Formalistyczna wizja matematyki ma (do pewnego stopnia) swoją implementację w postaci matematyki sformalizowanej tak, aby mogła być przedmiotem obróbki komputerowej. Mam tu na myśli zarówno dowody wspomagane komputerowo, jak i automatyczne systemy dowodzenia twierdzeń i prace nad rekonstrukcją matematyki w takich systemach[59]. W tym wypadku bardzo wyraźnie jest widoczne napięcie między treściowym a formalnym rozumieniem dowodu. Hilbert mówił ostrożnie o tym, że nie możemy żądać, aby każda formuła z osobna była interpretowalna. W przypadku dowodów sformalizowanych i przeprowadzanych za pomocą komputerów mamy jednak sytuację wręcz odwrotną: jedynie bardzo nieliczne formuły mogą być przez nas zinterpretowane, gdyż po prostu (po rozbiciu dowodu na elementarne kroki) jest ich zbyt wiele. Rozwój logiki formalnej oraz teorii obliczeń (i oczywiście nauk empirycznych) dały możliwość zastosowania komputerów w dowodzeniu twierdzeń. Specyfiką matematyki jest to, że duża jej część poddała się takiej formalnej obróbce, co wyróżnia ją spośród innych dziedzin, w których mamy do czynienia z argumentacjami (medycynie, prawie, ekonomii, biologii etc.) – tam próby formalizacji rozumowań nie przynoszą rezultatów choćby porównywalnych z formalizacją w matematyce.

Formalistyczne ujęcie matematyki wpisuje się w szeroko rozumiany paradygmat fundacjonalistyczny w filozofii tej dziedziny. Podstawowe dla tego sposobu myślenia jest kryterium o charakterze metafilozoficznym, dotyczące zadań stawianych filozofii matematyki. W takim ujęciu pełni ona rolę w znacznym stopniu normatywną,

---

man (2000), która wyraźnie stwierdza, że intuicja nie została wyeliminowana z matematycznych rozważań.

[59] Przykładem jest rozwijany w Białymstoku projekt formalizacji matematyki w systemie *Mizar*.

zaś metodologia matematyki musi opierać się na metamatematyce rozumianej jako dyscyplina formalna (czy wręcz – ma redukować się do niej). Celem analiz miałoby więc być poszukiwanie podstawowych zasad, dzięki którym matematyka zyskałaby status wiedzy pewnej. Do tego paradygmatu można zaliczyć formalizm Hilberta (którego cel to ugruntowanie matematyki klasycznej przez oparcie jej na niebudzącej wątpliwości części) oraz logicyzm (którego ambicję stanowi redukcja matematyki do logiki przez ugruntowanie prawd matematycznych jako prawd logicznych). Mówiąc w pewnym uproszczeniu, dla tego nurtu jest charakterystyczne postrzeganie teorii matematycznych jako sformalizowanych, ze zdefiniowanymi czysto formalnie regułami wnioskowania. W takim ujęciu dowód matematyczny jest utożsamiany z ciągiem formuł, a nie z nieformalną (lecz realną!) argumentacją odwołującą się do naszego rozumienia pojęć matematycznych. Typowe dla tego sposobu postrzegania matematyki jest silne roszczenie normatywne. Można stwierdzić, że filozofia matematyki uprawiana w ramach tego nurtu ma ambicję podania racjonalnej rekonstrukcji procesu matematycznej argumentacji, abstrahując od zjawisk np. psychologicznych czy społecznych – w szczególności od empirycznych aspektów działalności matematycznej.

Tradycja ta zdominowała filozofię matematyki pierwszej połowy XX wieku, jednak od dłuższego czasu można zaobserwować wzrost aktywności szeroko rozumianego nurtu o wyraźnie antyfundacjonalistycznej orientacji. Naczelną zasadą metafilozoficzną jest tu przypisanie filozofii matematyki charakteru deskryptywnego, a nie normatywnego. Punkt wyjścia stanowi praktyka matematyczna, z uwzględnieniem czynników psychologicznych czy społecznych, zaś celem jest opisanie tego zjawiska, a nie rekonstrukcja w ramach dobranego uprzednio (uznanego za bezpieczny) systemu pojęć czy konstruowanie „systemów zabezpieczeń" dla matematyki. Zwłaszcza na proces dowodzenia w matematyce zaczyna się patrzeć nie jako na formalny, wyidealizowany konstrukt, ale jak na pewnego typu argumentację, której celem jest przekonanie matematyków do określonych tez. W rozważaniach podejmuje się więc w szczególności problem empirycznych czy społecznych uwikłań dowodów matematycznych[60]. W takim ujęciu badania filozoficzne powinny uwzględniać również sam proces tworzenia matematyki i kontekst odkrycia, który w ramach ujęcia fundacjonalistycznego jest w zasadzie pomijany. W kontekście odkrycia mamy do czynienia z bogatym, dynamicznym procesem tworzenia nowych pojęć, koncepcji, walką z niejasnościami i zmaganiami z oporną materią. Ważnym reprezentantem tego nurtu jest Lakatos. Jego ujęcie matematyki (choć samo obarczone słabościami) stanowi silną odpowiedź na formalistyczno-fundacjonalistyczne rozumienie matematyki i miało niewątpliwy wpływ na przełamanie hegemonii tego sposobu myślenia. Lakatosa można uznać za jednego z najważniejszych współczesnych prekursorów nurtu antyfundacjonalistycznego. Następny rozdział jest poświęcony analizie jego koncepcji.

Akcentowanie formalnych, składniowych aspektów dowodu przygotowuje nas do analiz dotyczących statusu poznawczego dowodów komputerowych – zarówno tych standardowych (jak dowód twierdzenia o czterech barwach), jak i tych, które (na razie) pozostają w sferze czystej teorii, ale odwołują się do ciekawych teoretycznych modeli obliczeń. Te badania pozwalają również na lepsze ukazanie napięcia między różnymi wizjami dowodu matematycznego, a także na podjęcie analiz dotyczących takich pojęć jak np. wyjaśnianie w matematyce i dyskusji na temat empirycznych aspektów matematycznego poznania. Tym zagadnieniom są poświęcone rozdziały trzeci, czwarty i piąty.

---

[60] Niekiedy prowadzi to do koncepcji skrajnych, jak np. ujęcie dowodu w ramach społecznego konstruktywizmu.

ROZDZIAŁ 2

Antyfundacjonalizm Lakatosa

Przedmiotem analiz w tym rozdziale jest koncepcja Lakatosa[1]. Jego prace na temat filozofii matematyki są mniej znane niż prace dotyczące ogólnej metodologii nauki, zasługują jednak na uważną lekturę[2]. Dostarczyły bowiem znaczących impulsów pewnemu sposobowi uprawiania filozofii matematyki – nawet jeśli niektóre tezy Lakatosa uznamy za skrajne, zaś analizowane przez niego przykłady za nieco jednostronne.

Koncepcja Lakatosa stanowi wyrazisty przykład stanowiska antyfundacjonalistycznego w filozofii matematyki. Lakatos akcentuje te zagadnienia, które nie są wyjaśnione – ani nawet podejmowane – w formalistycznej wizji dowodu matematycznego: problem rozumienia pojęć matematycznych i ich swoistej dynamiki, znaczenie kontekstu odkrycia i opis realnych mechanizmów zdobywania wiedzy matematycznej, problem adekwatności formalnych parafraz czy wreszcie problem rozumienia i eksplanacyjnej funkcji dowodów matematycznych. Istotnym walorem koncepcji Lakatosa jest to, że nie opiera się ona na czysto spekulatywnych rozważaniach, bowiem badacz analizuje konkretne przykłady twierdzeń i pojęć matematycznych. Pomimo pewnych uproszczeń tego ujęcia, nieco przesadnej radykalności, z pewnością jest ono inspirujące dla dyskusji dotyczą-

---

1 Przy prezentacji koncepcji Lakatosa wykorzystuję fragmenty pracy Wójtowicz (2007).

2 Najbardziej szczegółowa monografia poświęcona filozofii matematyki Lakatosa to Koetsier (1991). Dobrą prezentację i ważne uwagi krytyczne zawiera praca Feferman (1978). W języku polskim była dostępna do niedawna tylko praca Lakatos (2002; oryginalnie opublikowana w roku 1978); teraz jest dostępna również podstawowa praca Lakatosa dotycząca tej problematyki (Lakatos 2005; oryginalnie opublikowana w roku 1976). Wszystkie odniesienia do tekstów Lakatosa podaję za tymi polskimi tłumaczeniami.

cej natury dowodu matematycznego. Ma też naturalne odniesienia do problematyki uzasadniania aksjomatów, stanowiąc pewnego rodzaju klamrę wskazującą na związki między zagadnieniami uzasadniania aksjomatów i dowodzenia twierdzeń, które w ujęciu czysto formalistycznym stanowią w zasadzie odrębne grupy problemów.

W swoich badaniach dotyczących matematyki Lakatos kładzie nacisk głównie na kwestie metodologiczne, na zagadnienia sposobu uprawiania matematyki i śledzenia mechanizmów jej rozwoju. Jego główna teza głosi, że w rozwoju tej dziedziny można wskazać mechanizmy podobne do tych rządzących rozwojem nauk empirycznych. Mamy tu bowiem do czynienia ze swoistą dynamiką pojęć, których sens nie jest ustalony raz na zawsze, ze stawianiem i testowaniem hipotez, z mechanizmami falsyfikacji, które prowadzą do obalania teorii matematycznych etc. Lakatos ujmuje problem wiedzy matematycznej w sposób radykalnie odmienny od ujęcia klasycznego. Odmawia jej charakteru wiedzy ostatecznej i niezmiennej – zdaniem Lakatosa, podlega ona rewizji, same zaś twierdzenia matematyczne powinniśmy traktować jako hipotezy, które – obrazowo mówiąc – muszą walczyć o przetrwanie. Jest to bardzo odległe od wizji matematyki jako nauki ujmującej odwieczne i niezmienne prawdy. W poglądach filozoficznych Lakatosa na matematykę widać silny wpływ koncepcji Poppera, w myśl której rozwój teorii naukowych nie ma charakteru kumulatywnego, lecz jest procesem, w którym istotną rolę odgrywa obalanie obowiązujących teorii i tworzenie nowych – mających charakter hipotez wyjaśniających. Zdaniem Poppera teorie naukowe mają charakter niepewny, zaś naszym zadaniem jest poddawanie ich ciągłym testom, bowiem nie można liczyć na znalezienie dla nich ostatecznych uzasadnień. W podobny sposób Lakatos postrzega teorie matematyczne: zawsze występuje w nich element niepewności, każdorazowo stykamy się jedynie ze (słabiej lub gorzej uzasadnionymi) hipotezami, a nie ostatecznymi prawdami. Również w rozwoju teorii matematycznych mamy do czynienia z elementem falsyfikacji, odrzucaniem przyjętych wcześniej hipotez, ze swoistą walką o przetrwanie na placu (naukowej) bitwy. Sens pojęć matematycznych nie jest przy tym zadany z góry, ale dopiero kształtuje się w ramach pewnego procesu rozwojowego.

To wszystko ma stanowić o zasadniczym podobieństwie matematyki do nauk empirycznych. Należy przy tym podkreślić, że w ujęciu Lakatosa rozwój dyscypliny ma charakter racjonalny; w szczególności odrzucenie danej hipotezy (czy nawet teorii) matematycznej wynika z wewnętrznej logiki jej rozwoju. Lakatos pozostaje w tradycji internalistycznej – nie odwołuje się w swojej koncepcji do kategorii społecznych czy kulturowych (nie przypomina więc ona np. mocnego programu socjologii wiedzy)[3].

Stanowisko Lakatosa określa się często jako stanowisko *quasi*-empiryzmu matematycznego. To określenie wywodzi się od podanej przez niego klasyfikacji nauk na euklidesowe i *quasi*-empiryczne. Kryterium tego podziału stanowi charakterystyczny, podstawowy dla danej nauki mechanizm uzasadniania zdań, podział ów ma więc charakter metodologiczny. Należy tu podkreślić, że stanowisko Lakatosa jest istotnie różne od *quasi*-empiryzmu Quine'a, który również bardzo silnie akcentował związki matematyki z naukami empirycznymi. Quine jednak, analizując relacje między matematyką a naukami empirycznymi, poszukiwał odpowiedzi na pytania o zobowiązania ontologiczne teorii naukowych (co doprowadziło go do przyjęcia stanowiska matematycznego realizmu). Lakatosa natomiast interesują wewnętrzne mechanizmy rozwoju matematyki, a pozostaje on empirystą metodologicznym, nie angażując się bezpośrednio w dyskusje ontologiczne czy epistemologiczne.

1. Nurt formalistyczny a żywa matematyka

W rozdziale pierwszym przedmiotem analiz były zależności między dwoma różnymi ujęciami matematyki, z podkreśleniem ewolucji formalistycznego rozumienia dowodu matematycznego. Koncepcję Lakatosa można traktować jako reakcję na ten kierunek rozwoju – badacz jest bowiem zdecydowanym przeciwnikiem szko-

---

3 Podkreśla to praca Ernest (1997), w której autor próbuje sformułować koncepcję inspirowaną pracami Lakatosa, ale utrzymaną w duchu społecznego konstruktywizmu *à la* Bloor. Przyznaje jednak, że sam Lakatos się do niej nie skłaniał.

ły, w myśl której matematykę utożsamia się z jej formalną idealizacją, zaś filozofię matematyki sprowadza się do metamatematyki (Lakatos 2005: 17)[4]. Odrzuca w szczególności reprezentowaną np. przez Carnapa koncepcję matematyki jako składni języka nauki (któremu towarzyszy program sprowadzenia rozważań filozoficznych do badań metanaukowych). O koncepcji tej dziedziny w wydaniu pozytywizmu logicznego Lakatos wypowiada się krytycznie, twierdząc, że była wręcz szkodliwa dla historii i filozofii matematyki (Lakatos 2005: 19). Formalizm matematyczny, jego zdaniem, opiera się na dogmatach pozytywizmu logicznego, zgodnie z którymi tylko tautologie logiczne lub zdania weryfikowalne empirycznie mają sens. Lakatos zauważa jednak, że matematyka nieformalna nie spełnia żadnego z tych dwóch warunków – tym samym zwolennik logicznego pozytywizmu powinien uznać, że jest ona po prostu pozbawiona sensu (Lakatos 2005: 19). Należy podkreślić, że Lakatos – choć określany mianem matematycznego *quasi*-empirysty – nie deklaruje się jako empirysta w kwestii natury wiedzy matematycznej. Autor *Dowodów i refutacji* odrzuca też interpretację wiedzy matematycznej jako czysto tautologicznej – według niego zdania matematyczne nie są tautologiami, ale mają pewną treść. Możemy więc – wbrew opinii radykalnych formalistów – mówić o wiedzy matematycznej, a nie tylko o znajomości reguł manipulowania symbolami.

Lakatos określa formalizm matematyczny jako ostatnie ogniwo w łańcuchu dogmatystycznych filozofii matematyki (Lakatos 2005: 22). Przez „dogmatyzm" zaś rozumie przeświadczenie, że możemy osiągnąć prawdziwą i pewną wiedzę matematyczną. Dogmatyzmowi przeciwstawia sceptycyzm, w myśl którego takiej pewnej wiedzy nie możemy posiąść (lub nie możemy wiedzieć, że taką wiedzę osiągnęliśmy). Zdaniem Lakatosa matematyka w swoim dotychczasowym rozwoju była swoistym bastionem dogmatyzmu, zaś kryzysy w jej podstawach prowadziły jedynie do przeformułowań obowiązujących teorii, ale nie do zmiany samego sposobu uprawiania tej dyscypliny. Epistemologiczny dogmatyzm ugruntował złudny obraz matematyki jako wie-

---

4 Lakatos interpretuje więc stanowisko formalistyczne w nieco węższy sposób niż przyjęty przeze mnie w poprzednim rozdziale.

dzy autorytatywnej, niezawodnej i niepodważalnej. Lakatos twierdzi: „Większość sceptyków zrezygnowała z oblegania tej niezdobytej twierdzy epistemologii dogmatystycznej" – i jednocześnie formułuje postulat: „Czas najwyższy podjąć wyzwanie" (Lakatos 2005: 22). Formalistyczna wizja dowodu matematycznego jako ciągu operacji formalnych w z góry ustalonym języku jest – jego zdaniem – całkowicie nietrafna. Nawiązując do analiz z rozdziału pierwszego, można powiedzieć, że Lakatos jest bliski wizji procesu dowodzenia jako swoistego procesu argumentacyjnego, który nie daje się adekwatnie odzwierciedlić przez zabieg formalizacji.

Przedmiotem zainteresowania Lakatosa są teorie matematyczne w oryginalnych wersjach, w jakich zostały stworzone przez samych autorów, a nie w odmianach zrekonstruowanych w systemach formalistów. Badacz z dezaprobatą cytuje następującą uwagę Tarskiego: „Rzecz jasna, nie wszystkie nauki dedukcyjne przybierają postać nadającą się na przedmiot badań naukowych. Nie mają takiej postaci [...] te nauki, które nie są oparte na dokładnie określonych podstawach logicznych, nie mają sprecyzowanych reguł inferencji i których twierdzenia są zazwyczaj wysłowione w dwuznacznych i nieścisłych terminach języka potocznego – słowem: nauki, które nie są sformalizowane" (Tarski 1930; cyt. za: polskim tłumaczeniem J. Zygmunta 2001: 31–32). Zdaniem Tarskiego przedmiotem naukowego opisu może być dopiero sformalizowana wersja teorii matematycznych. Takie ujęcie jest zdaniem Lakatosa całkowicie błędne: należy bowiem uwzględnić fakt, że matematyka nie jest wszakoż tworzona jako sformalizowany system. Podstawę rozumienia jej istoty stanowi bowiem analiza realnych procesów, jakie w niej zachodzą, a nie tylko „produktu finalnego", czyli teorii matematycznych w ich ostatecznej wersji[5]. Z tego też powodu, rzetelnie uprawiana filozofia matematyki musi uwzględniać historię jej rozwoju. Lakatos parafrazuje znane powiedzenie Kanta, twierdząc, iż historia matematyki bez filozofii staje się ślepa, zaś filozofia matematyki ignorująca rzeczywiste

---

[5] Na przykład, zgodnie z koncepcją Lakatosa, dla zrozumienia tego, czym jest geometria, ważna jest analiza procesu kształtowania się pojęć geometrycznych, a nie jedynie rozważanie np. aksjomatyki Hilberta.

zjawiska historyczne – pusta (Lakatos 2005: 19). I faktycznie, ważne miejsce w rozważaniach Lakatosa zajmuje analiza historii rozwoju pojęć matematycznych.

Podstawową rolę w omawianej koncepcji odgrywa rozróżnienie nauk na euklidesowe i *quasi*-empiryczne[6]. Podział ten ma odzwierciedlać mechanizmy uzasadniania tez danej nauki. To, czy dany system ma charakter euklidesowy, czy też *quasi*-empiryczny jest uzależnione bowiem od tego, w jaki sposób są weryfikowane tezy tego systemu (mówi się tu o przepływie wartości prawdziwości). W systemie euklidesowym punktem wyjścia są aksjomaty, zaś logika jest narzędziem dowodu. W systemie *quasi*-empirycznym logika pełni funkcję narzędzia krytyki: tutaj fałszywość tzw. stwierdzeń bazowych (pojęcie to zostanie wyjaśnione dalej) prowadzi do wykazania fałszywości przyjętych założeń (Lakatos 2002: 224). Dokonany przez Lakatosa podział nauk opiera się więc na kryterium o charakterze metodologicznym, a nie treściowym: ważny jest sposób uzasadniania twierdzeń danej nauki, mechanizmy jej rozwoju, a nie kryteria o charakterze ontologicznym (dotyczące przedmiotu badań matematyki) czy epistemologicznym (dotyczące źródeł wiedzy matematycznej). Na przykład, logicyzm i formalizm można zaliczyć (mimo głębokich różnic) do nurtu euklidesowego. Zdaniem logicystów (np. Fregego i Russella) twierdzenia matematyczne dają się wyprowadzić z aksjomatów o charakterze czysto logicznym, które stanowią podstawowe prawdy. W myśl stanowiska Hilberta podstawowe prawdy dotyczą stosunkowo słabych systemów formalnych i to one stanowią podstawę matematyki, pozwalając na rekonstrukcję bardziej złożonych pojęć. Jednak w przypadku obu tych stanowisk wspólny pozostaje sposób myślenia: rozwój tej dziedziny nauki należy opisywać jako przejście od podstawowych prawd do wyprowadzanych z nich wniosków.

6 W polskim tłumaczeniu *Dowodów i refutacji* jest używany termin „euklidejskie", z kolei w innej pracy (Lakatos 2002) – termin „euklidesowe", przy którym pozostanę.

Lakatos w żywy sposób krytykuje ujęcie euklidesowe. Pozwolę sobie (tytułem ilustracji pełnego ekspresji stylu autora) przytoczyć dłuższy fragment:

> Metodologia euklidejska wypracowała pewien obowiązujący styl wykładu. [...] Wykład [...] rozpoczyna się od podania ustalonej z drobiazgową starannością listy aksjomatów, lematów i/lub definicji. Te aksjomaty i definicje sprawiają często wrażenie sztucznych i zagadkowo zawiłych. Nie dowiadujemy się nigdy, jak te zawiłości powstały. Po wyliczeniu aksjomatów i definicji następują starannie zredagowane twierdzenia. Są one obciążone wymyślnymi warunkami; wydaje się wprost niemożliwe, aby ktokolwiek je odgadł. Po twierdzeniu następuje dowód.
>
> Zgodnie z euklidejskim rytuałem, student matematyki zobowiązany jest do uczestniczenia w tych magicznych sztuczkach, bez zadawania pytań ani na temat tego, skąd się one wzięły, ani tego, jak się takie hokus-pokus robi. [...] W stylu deduktywistycznym wszystkie twierdzenia są prawdziwe i wszystkie wnioskowania prawomocne. Matematykę prezentuje się jako stale powiększający się zbiór wiecznych, niezmiennych prawd. Kontrprzykłady, refutacje, krytyka nie mają absolutnie prawa wstępu (Lakatos 2005: 216).

Zdaniem Lakatosa jest to ujęcie całkowicie błędne i wpycha matematykę w ślepy zaułek. Taki styl uprawiania (i wykładania) matematyki odcina ją bowiem od motywacji, które prowadzą do tworzenia określonych pojęć matematycznych i kształtowania się metod ich argumentacji[7]. Deduktywistyczny styl uprawiania matematyki ukrywa te mechanizmy, zaś rezultat końcowy zostaje uznany za niezawodny (Lakatos 2005: 217). Takie widzenie dyscypliny opiera się na błędnym przekonaniu, że podstawowym sposobem matematycznego rozwoju jest dedukcja, że to logika dostarcza adekwatnych narzędzi opisu procesu tworzenia wiedzy matematycznej. O zwolennikach takiej wizji matematyki Lakatos pisze, iż wyobrażają sobie

[7] Na podobny fakt zwraca uwagę np. Rota, który pisze, iż to, co jest ukryte przy aksjomatycznej prezentacji teorii, jest przynajmniej tak ważne dla naszego rozumienia matematyki jak to, co usiłuje ukazać owa aksjomatyczna prezentacja (Rota 1997: 192).

oni, że matematyk rozpoczyna pracę, ustalając definicje i aksjomaty w sposób arbitralny, a następnie z tych definicji i aksjomatów wyprowadza twierdzenia. Jest to ujęcie błędne i Lakatos stawia sobie za cel wykazanie, iż podobnie jak logika odkrycia naukowego nie jest indukcyjna (co wykazał Popper), tak również logika odkrycia matematycznego nie jest dedukcyjna (Lakatos 2005: 217–218). Właściwy opis tych mechanizmów daje nam tzw. styl heurystyczny. Eksponuje on sytuację problemową, w której doszło do sformułowania hipotez, definicji i dowodów, w przeciwieństwie do stylu deduktywistycznego, który całkowicie odrywa definicje i dowody od ich „dowodów-przodków", przestawiając je w sztuczny i arbitralny sposób „jakby się wzięły z sufitu" (Lakatos 2005: 219). Dominacja takiego poglądu jest dla matematyki wręcz szkodliwa[8]. Ukazanie heurystycznych mechanizmów rozwoju (od pierwotnej hipotezy, przez dowód, kontrprzykłady aż do definicji i twierdzeń) pozwoliłoby bowiem na odejście od obowiązującej wizji uprawiania matematyki i zarazem przeciwdziałałoby jej degeneracji. Sprawia to jednak trudność ze względu na dominację stylu deduktywistycznego i atomizację wiedzy matematycznej (Lakatos 2005: 232–233).

Ujęcie Lakatosa jest bardzo radykalne – krytykując matematykę euklidesową, zdaje się twierdzić, że prowadzi ona do błędnego ujęcia nauczania matematyki i że dobry podręcznik matematyki powinien być napisany w stylu heurystycznym (skoro – zgodnie z przytoczonym wyżej fragmentem – ów „euklidesowy rytuał" jest niewłaściwy i wręcz szkodliwy). Zamiast gotowych definicji, które wyskakują niczym królik z kapelusza już na pierwszej stronie podręcznika, zamiast gotowych dowodów przedstawiających końcowy efekt pracy (i niepozwalających nam ujrzeć samych zmagań matematyka z oporną materią), adept dyscypliny powinien uczyć się jej przez „rozpoznanie walką", zgodnie z metodologią dowodów i refutacji.

Jeśli tak interpretować stanowisko Lakatosa, to wydaje się ono zbyt skrajne. Pytanie o to, jak skutecznie nauczać matematyki, ma cha-

---

8 Lakatos pisze o okresach stagnacji w rozwoju teorii, kiedy to „teoria dominuje na scenie, nie mając żadnych rywalek ani też nie będąc zagrożoną przez potwierdzone próby jej obalenia. Może to powodować, że zapominamy o możliwości poddawania krytyce założeń bazowych" (Lakatos 2005: 239).

rakter empiryczny i nie podejmuję się tu go rozstrzygać – przypuszczam jednak, że podręczniki pisane w duchu *Dowodów i refutacji* byłyby zmorą studentów. Sądzę, że w znacznie większym stopniu niż obowiązujące „euklidejskie" podręczniki prowadziłyby do zniechęcenia słuchaczy, zaś samą matematykę wpędziłyby w ślepy zaułek. Zdaniem Fefermana forma wywodów Lakatosa (najeżonych szczegółami historycznymi, pozornymi wynikami, uwagami krytycznymi, kontrprzykładami) jest męcząca, zaś „prześledzenie dowodów do końca wymaga determinacji, a nie dostarcza dodatkowego zrozumienia" (Feferman 1978: 311). Opinię tę uważam za absolutnie trafną (choć oczywiście student matematyki mógłby przestudiować heurystyczny podręcznik w charakterze ciekawego uzupełnienia). Lakatos akcentuje sam proces tworzenia wiedzy matematycznej, zarazem jednak zdaje się ignorować fakt, że dowód w ostatecznej wersji ukazuje sieć zależności pojęciowych i logicznych, których zidentyfikowanie było celem matematyka. Kontekst odkrycia i tworzenia pojęć matematycznych jest niewątpliwie ważny dla zrozumienia motywacji, ale jednocześnie przedstawianie wszystkich szczegółów może pełnić funkcję – z dydaktycznego punktu widzenia – odwrotną do oczekiwanej[9].

Lakatos mówi o degeneracji matematyki – jego zdaniem dominacja ujęcia euklidesowego (deduktywistycznego) jest dla matematyki szkodliwa. Nie wiadomo jednak, w czym owa szkodliwość miałaby się przejawiać. Patrząc na rozwój matematyki, trudno dostrzec w niej objawy degeneracji czy stagnacji (choć oczywiście pewne jej gałęzie mają charakter zamknięty, np. geometria elementarna). Lakatos w swoich analizach dokonuje pewnego zabiegu perswazyjne-

---

[9] Uwagi Lakatosa nie są czysto teoretyczne – wszak podejmowano próby nauczania matematyki w abstrakcyjnym, aksjomatycznym stylu już na poziomie szkolnym (była to dydaktyczna porażka). Wydaje się dość oczywiste, że edukowanie w zakresie np. geometrii elementarnej w duchu *Grundlagen der Geometrie* Hilberta (zupełnie bez rysunków i wyjaśniania sensu pojęć pierwotnych) byłoby z dydaktycznego punktu widzenia szkodliwe. Istnieją podręczniki np. geometrii różniczkowej, w których konkretne przykłady rozmaitości (jak sfera czy torus) pojawiają się sporadycznie, a już problemy o charakterze praktycznym nie występują wcale. Przeciwko takim ujęciom słusznie występuje Lakatos, popadając jednak w drugą skrajność.

go, ustawiając sobie – jako łatwego przeciwnika – kogoś, kto uprawiając matematykę, w ogóle nie myśli o motywacjach, o głębokich związkach między pojęciami, o tym, czy pojęcia są naturalne, czy nie, a jedynie wypisuje aksjomaty, a następnie dedukuje z nich twierdzenia. Jednak takich matematyków chyba po prostu nie ma. Uwagi Lakatosa w odniesieniu do rzeczywistych procesów rozwojowych w matematyce nie są trafne – trudno byłoby wskazać jakikolwiek historyczny przykład ważnej dziedziny matematycznej, która faktycznie rozwijałaby się w duchu euklidesowym (nawet jeśli w takim duchu będzie prezentowana w monografii). Interpretowane literalnie tezy Lakatosa należy postrzegać jako mocno przesadzone – jednak jeśli oddzielimy je od polemicznej retoryki, to można je uznać za zasadne w odniesieniu do sposobu uprawiania „oficjalnej" refleksji nad matematyką, w której w pewnym momencie zaczęła dominować wizja bliska formalizmowi.

2. Zdania bazowe i falsyfikatory heurystyczne

Punktem wyjścia w badaniach matematycznych są tzw. zdania bazowe. W ujęciu euklidesowym za takie bazowe zdania należałoby uznać aksjomaty, jako pierwotne w porządku logicznym. Lakatos natomiast bierze za nie te zdania matematyczne, które najwcześniej (w porządku historycznym, a nie logicznym) uznajemy za prawdziwe. Nie są to aksjomaty teorii formalnej, ale stwierdzenia, które przyjmujemy w matematyce nieformalnej, mające swoje źródło w praktyce matematycznej, w naszym intuicyjnym, preformalnym rozumieniu pojęć i ujmowaniu pewnych podstawowych prawd matematycznych. One dopiero mogą stanowić punkt wyjścia etapu aksjomatyzacji teorii, który jest znacznie późniejszy i następuje dopiero wtedy, gdy już dość dobrze rozumiemy sieć zależności pojęciowych w naszej nieformalnej matematyce[10]. W procesie tworzenia teorii matematycz-

---

[10] Można jako przykład przytoczyć aksjomatyzację geometrii w stylu Hilberta: formalizacja, polegająca na wskazaniu (możliwie nielicznych) pojęć pierwotnych, relatywnie do których definiuje się pozostałe pojęcia, oraz aksjomatów,

nej mamy do czynienia z podobnymi mechanizmami jak w procesie tworzenia teorii empirycznej (Lakatos ma tu na myśli opis w duchu Poppera). Punkt wyjścia stanowią bowiem swoiste *explananda*, którymi są tezy matematyki niesformalizowanej. Ewentualne aksjomaty teorii sformalizowanej mogą stanowić zaś hipotezy wyjaśniające – i taki jest *de facto* ich status. W matematyce mamy więc do czynienia raczej z testowaniem owych aksjomatów, a nie (tylko) z dedukowaniem twierdzeń (Lakatos mówi tutaj o retransmisji fałszu). W ten proces testowania hipotez wyjaśniających nieuchronnie jest wpisana możliwość ich obalenia (na podobieństwo popperowskiego mechanizmu falsyfikacji hipotez naukowych). Aksjomaty są więc uzasadniane w oparciu o to, czy dobrze potrafią ująć nasze przekonania matematyczne nabyte w fazie tworzenia matematyki preformalnej. To właśnie matematyka preformalna, intuicyjna, stanowi dla nich ostateczne kryterium. Podstawowym mechanizmem w rozwoju matematyki uprawianej w duchu *quasi*-empirycznym jest poszukiwanie śmiałych hipotez, które będą miały możliwie dużą siłę wyjaśniającą. Następnie poddaje się je krytyce i selekcjonuje: w wyniku działania mechanizmu falsyfikacji pewne z nich zostają odrzucone, sfalsyfikowane przez konfrontację z „danymi empirycznymi", którymi są zdania bazowe. Można więc powiedzieć, że metodologia *quasi*-empiryczna ma spekulatywny charakter (Lakatos 2002: 224–225). Należy podkreślić, że status zdań bazowych w matematyce jest oczywiście całkowicie odmienny od zdań bazowych (potencjalnych falsyfikatorów) w naukach empirycznych – nie są to bynajmniej stwierdzenia czasowo-przestrzenne (Lakatos 2002: 233)[11]. Źródłem zdań bazowych jest nieformalna praktyka matematyczna, zaś ewentualna falsyfikacja teorii odbywa się przez konfrontację z tą praktyką.

Istotną rolę w koncepcji Lakatosa odgrywa pojęcie falsyfikatora – tym mianem określa on zdania matematyczne, które mogą słu-

jest możliwa dopiero wtedy, kiedy dobrze rozumiemy sytuację geometryczną, gdy znamy wiele wyników szczegółowych. Podobnie odbywała się aksjomatyzacja np. teorii prawdopodobieństwa czy mechaniki klasycznej.

[11] *Quasi*-empiryzm Lakatosa nie jest więc w żadnej mierze empiryzmem w stylu Milla czy (współcześnie) Kitchera, którzy uważają, że matematyka jest po prostu idealizacją danych empirycznych.

żyć do obalenia (sfalsyfikowania) danej teorii. Odnotowuje istnienie falsyfikatorów czysto logicznych – a mianowicie zdań wewnętrznie sprzecznych (o strukturze $p \wedge \neg p$). Falsyfikatory logiczne odgrywają oczywistą rolę: teoria generująca sprzeczność musi zostać odrzucona i nie ma potrzeby tego faktu dalej analizować[12]. Jednak oprócz falsyfikatorów czysto logicznych, ważną rolę odgrywają w matematyce także falsyfikatory innego typu: zdania bazowe, którym w nieformalnej praktyce matematycznej przypisaliśmy wartość logiczną i które chcemy zachować (lub odrzucić) w formalnej wersji tworzonej teorii. Takie twierdzenie teorii niesformalizowanej, które falsyfikuje teorię sformalizowaną, Lakatos nazywa „falsyfikatorem heurystycznym" (Lakatos 2002: 233)[13]. Formalizacja ma za zadanie uchwycić daną w ramach matematyki nieformalnej treść. Należy tu wyraźnie podkreślić, że treści tej nie definiuje jej sformalizowana wersja, lecz jest ona dana już uprzednio. Gdybyśmy uznali, że dopiero sformalizowana teoria aksjomatyczna określa przedmiot swoich badań, wówczas nie byłoby innych falsyfikatorów poza czysto logicznymi. To założenie o posiadanej uprzednio treści umożliwia wprowadzenie pojęcia falsyfikatora heurystycznego[14].

Lakatos rozważa problem falsyfikatorów heurystycznych dla teorii aksjomatycznej na przykładzie teorii mnogości. Ich rolę mogłyby pełnić pewne zdania arytmetyczne, na przykład hipoteza Goldba-

---

12 W literaturze pojawiają się propozycje, aby niejako włączyć sprzeczność do matematyki na pewnym poziomie (np. Priest: 1997, 2000). Jednak odgrywają one rolę raczej marginalną.

13 Mechanizm ten można opisać tak: niech T_N oznacza nieformalną, zaś T_F formalną wersję teorii matematycznej; α_N niech będzie zdaniem z T_N, zaś α_F jego formalnym odpowiednikiem. Gdyby okazało się, że T_F dowodzi $\neg\alpha_F$, zaś T_N dowodzi α_N, to zdanie α_N byłoby właśnie heurystycznym falsyfikatorem teorii T_F. Należy tu odnotować pewną subtelność: zdania α_N oraz α_F byłyby *de facto* dwoma różnymi zdaniami, sformułowanymi w różnych językach. Aby mówić tu o mechanizmach falsyfikacji w duchu Lakatosa, musielibyśmy dysponować dobrym kryterium stwierdzania, że zdania te są faktycznie swoimi odpowiednikami. Jednak w praktyce zazwyczaj potrafimy utożsamić nieformalną i sformalizowaną wersję twierdzenia.

14 W polemice Hilberta z Fregem dotyczącej mechanizmów definiowania pojęć i natury definicji przez postulaty (o której mowa w rozdziale pierwszym), Lakatos stanąłby więc po stronie Fregego.

cha. Uznalibyśmy ją za falsyfikator, gdyby zaszła koniunkcja dwóch warunków:

1. Zostałaby rozstrzygnięta w matematyce nieformalnej.
2. Zostałaby w inny sposób rozstrzygnięta w ZFC.

Gdyby tak faktycznie było, byłby to ewidentny argument, iż ZFC nie stanowi adekwatnej formalizacji naszej matematyki nieformalnej, w ramach której dowodzimy w szczególności twierdzeń teorioliczbowych. Bardzo wątpię jednak w to, czy faktycznie można podać przekonujący przykład zdania ilustrującego mechanizm falsyfikacji, o którym mówi Lakatos. Byłoby ono bowiem twierdzeniem matematyki nieformalnej, którego negacja byłaby z kolei twierdzeniem ZFC. Tym samym znaczyłoby to, że wyniki np. geometrii algebraicznej czy analizy rzeczywistej i zespolonej, wykorzystywane w teorii liczb, okazały się niezgodne z aksjomatami teorii mnogości ZFC – czyli że „zwykła matematyka" jest po prostu sprzeczna z teorią mnogości. Nie ma jednak na razie danych, które mogłyby o takiej sprzeczności świadczyć – a tym bardziej o tym, że takim zdaniem, wyrażającym ową sprzeczność, jest hipoteza Goldbacha.

Lakatos wskazuje też inne zdania arytmetyczne, które mogą pełnić rolę potencjalnych falsyfikatorów dla pewnych teorii, stanowiących wzmocnienia dla teorii mnogości. Problem rozważa w kontekście aksjomatów istnienia dużych liczb kardynalnych. Zdania te są niezależne od ZFC, zaś teorie typu ZFC+A (gdzie A oznacza jakiś aksjomat tego typu) są silniejsze od ZFC. Lakatos twierdzi, że zdaniami testowymi, potencjalnymi falsyfikatorami dla tych aksjomatów, mogą być pewne (mające finitystyczny charakter) zdania dotyczące równań diofantycznych (Lakatos 2002: 235)[15].

Nie jest dla mnie w pełni jasne, jaki mechanizm falsyfikacji miał tu na myśli Lakatos. Wiadomo, że istnieją zdania arytmetyczne niezależne nie tylko od PA, ale również od ZFC. Przykładem takiego zdania jest zdanie Con_{ZFC}, wyrażające niesprzeczność teorii mnogości ZFC (na mocy wyników Gödla, jest ono nierozstrzygalne w teorii

[15] Równania diofantyczne to wielomiany, w których współczynnikami są liczby całkowite i dla których poszukujemy rozwiązań tylko w liczbach całkowitych.

mnogości ZFC)[16]. Podobna sytuacja ma miejsce ze zdaniami arytmetycznymi typu Con_{ZFC+MC}, $Con_{ZFC+V=L}$, Con_{ZF+AD} etc., które wyrażają niesprzeczność odpowiednich teorii (i które są w tych teoriach niedowodliwe). Wydaje się więc kuszące stwierdzenie, że nasza wiara w niesprzeczność takich teorii może być testowana przez bezpośrednią analizę zdań arytmetycznych typu Con_T. Hipotetyczny scenariusz falsyfikacji wyglądałby następująco:

1. Rozważamy dodanie do ZFC nowych aksjomatów, np. aksjomatu istnienia liczby mierzalnej (MC).

2. Rozważamy zdanie Con_{ZFC+MC} – jest to zdanie arytmetyczne, wyrażające (dzięki odpowiedniemu kodowaniu) niesprzeczność teorii ZFC+MC.

3. Jeśli w nieformalnej matematyce potrafilibyśmy podać argumenty świadczące o fałszywości zdania Con_{ZFC+MC}, byłby to ważny argument na rzecz odrzucenia teorii ZFC+MC. Uznalibyśmy wówczas, że została ona sfalsyfikowana (heurystycznie) przez zdanie arytmetyczne.

Sądzę, że taki mechanizm musiał mieć na myśli Lakatos, pisząc o heurystycznej falsyfikacji silnych aksjomatów nieskończoności – nie są bowiem znane żadne przykłady zdań o k o n k r e t n e j treści teorioliczbowej, które byłyby niezależne od ZFC (a tym bardziej od ZFC+MC). Takie niezależne zdania powstają bowiem przez kodowanie pewnych faktów metamatematycznych[17]. Jeśli przyjmiemy taką interpretację wypowiedzi Lakatosa, to można stwierdzić, iż popełnia on tutaj błąd (a przynajmniej nadużycie). Zauważmy, że to, jakim zdaniem jest Con_{ZFC+MC} zależy od przyjętej metody kodowania. Wszak istnieje ich wiele: wystarczy chociażby zmienić kolej-

---

[16] Za pomocą arytmetyzacji składni („gödelizacji") możemy sformułować zdania arytmetyczne wyrażające niesprzeczność teorii sformalizowanych, takich jak np. ZFC+MC (aksjomat istnienia liczby mierzalnej). Zdania takie (standardowo oznaczane przez Con_T, gdzie T jest interesującą nas teorią) mówią o równaniach diofantycznych, a jednocześnie wyrażają pewne metamatematyczne treści.

[17] Należy pamiętać, że pierwszy przykład zdania arytmetycznego, które byłoby niezależne od PA i miało n a t u r a l n ą matematyczną treść został podany dopiero w roku 1977 (Paris, Harrington 1977).

ność, w jakiej będą kodowane symbole logiczne, i w efekcie otrzymać inne zdanie (oznaczmy je o roboczo przez Con^{*}_{ZFC+MC}). Wprawdzie oba zdania (tj. Con_{ZFC+MC} oraz Con^{*}_{ZFC+MC}) będą miały identyczną metamatematyczną interpretację, jednak nie jest oczywiste, że muszą mieć identyczne cechy, jeśli chodzi o ich potencjalną m a t e m a t y c z n ą wiarygodność. Należy bowiem pamiętać, że zdania typu Con_{ZFC+MC} nie mają w zasadzie żadnej ciekawej, naturalnej treści czysto teorioliczbowej[18]. Są one skonstruowane w ł a ś n i e jako zdanie o charakterze matematematycznym, a nie jako zdania, którym skądinąd zainteresowaliby się specjaliści od teorii liczb. Nie przypominają więc hipotezy Fermata czy Goldbacha ani innych zwykłych zdań arytmetycznych[19]. Z punktu widzenia samej teorii liczb, zdanie Con_{ZFC+MC} nie jest bardziej (ani mniej) interesujące niż Con_{ZFC} czy $Con_{ZFC+V=L}$ albo zdanie Con_{ZFC+CH} czy $Con_{ZFC+\neg CH}$. Nie wyrastają one przecież z naturalnej praktyki teorii liczb, ale z rozważań metateoretycznych. Trudno sobie więc wyobrazić z w y k ł y argument matematyczny, który miałby wykazać wiarygodność (bądź jej brak) zdania Con_{ZFC+MC}[20]. Lakatos, mówiąc o arytmetycznych falsyfikatorach (rozszerzeń) teorii mnogości, nie jest więc przekonujący[21].

---

[18] Oczywiście, jako zdania dotyczące wielomianów są zdaniami o treści teorioliczbowej, jednak nie jest ona ciekawa z punktu widzenia samej teorii liczb. To, że np. pewien wielomian stopnia 2358 ma pierwiastek, nie jest faktem szczególnie ciekawym – podobnie jak np. stwierdzenie faktu, że pewna formuła rachunku zdań mająca 2358 zmiennych jest tautologią, nie jest szczególnie ciekawe dla logika (choć akurat może być to formuła ważna z punktu widzenia zastosowań np. w opisie systemu sterowania procesem produkcji w fabryce).

[19] Hipoteza Fermata też dotyczy pewnego równania diofantycznego. Jednak w przeciwieństwie do zdań wyrażających niesprzeczność teorii, to zdanie ma bezpośrednie, naturalne i głębokie odniesienia do zwykłej matematyki.

[20] Argument na rzecz wiarygodności zdania Con_{ZFC+MC} *de facto* musiałby się odwoływać do wyrafinowanych rozważań teoriomnogościowych – które przy tym w ogóle nie musiałyby brać pod uwagę sposobu ani nawet faktu istnienia kodowania, lecz dotyczyłyby wyłącznie wyrażanej owymi zdaniami treści. Takie argumenty są formułowane w dyskusjach dotyczących wiarygodności aksjomatów, w szczególności ewentualnych nowych aksjomatów dla teorii mnogości, jednak nie mają one charakteru formalnego, bo zarówno teoria ZFC+MC, jak i teoria ZFC+¬MC są niesprzeczne relatywnie do teorii ZFC.

[21] Warto wspomnieć o jeszcze jednej trudności. Otóż gdyby nawet zdanie typu Con_T uznać za mało wiarygodne z matematycznego punktu widzenia, to jeszcze

Warto jednak odnotować w kontekście tej dyskusji wyniki Friedmana, bowiem podał on przykłady niezależnych od ZFC zdań dotyczących własności kombinatorycznych pewnych obiektów skończonych (Friedman 1986). Udowodnienie tych zdań wymaga przyjęcia określonych założeń dotyczących istnienia dużych liczb kardynalnych[22]. W opinii Friedmana istnienie takich zdań niezależnych stanowi przekonujący argument na rzecz tezy, iż abstrakcyjna teoria mnogości może odegrać rolę także w badaniach dotyczących obiektów skończonych. Twierdzi on wręcz, że podane przez niego zdania niezależne „niemal dotyczą liczb naturalnych" (Friedman 1986: 93). Co więcej, nie da się owych zdań rozstrzygnąć przez np. wprowadzenie ograniczających założeń typu V=L (są niedowodliwe w ZFC+V=L). Ich „poziom niezależności" jest zatem – w tym sensie – większy niż w wypadku hipotezy kontinuum (która jest dowodliwa w ZFC+V=L). Uzasadnienie prawdziwości takich zdań wymaga dołączenia silnych założeń, wykraczających poza teorię mnogości ZFC[23].

---

samo w sobie nie stanowi to argumentu przeciwko teorii T. Można bowiem interpretować to jako argument przeciwko przyjętej metodzie arytmetycznego kodowania zdań teorii T. Przecież przez kodowanie dokonujemy utożsamienia intuicyjnego zdania wyrażającego niesprzeczność teorii T (np. teorii ZFC) i zdania Con_T (np. zdania Con_{ZFC}). Zauważmy na przykład, że zdanie Con_{PA} wyrażające niesprzeczność teorii PA jest (na mocy II twierdzenia Gödla) zdaniem niezależnym od PA. Tym samym teoria PA+$\neg Con_{PA}$ jest teorią niesprzeczną (identyczna sytuacja ma miejsce w wypadku teorii ZFC+$\neg Con_{ZFC}$). Czy należałoby stwierdzić, że teoria PA+$\neg Con_{PA}$ sama siebie falsyfikuje, bo jest intuicyjnie niesprzeczna (nie mniej niesprzeczna niż PA), a zawiera zdanie $\neg Con_{PA}$, wyrażające sprzeczność PA? Byłoby to nieporozumienie, jednak rozważania Lakatosa zdają się sugerować, że tak właśnie należałoby zrobić.

22 Chodzi o założenia dotyczące tzw. liczb Mahlo (znajdują się one stosunkowo nisko w hierarchii dużych liczb kardynalnych). Jednak założenie niezbędne dla udowodnienia zdań Friedmana nie jest bardzo słabe: konieczne jest przyjęcie, iż $\forall n \exists \kappa$ (κ jest n-Mahlo); nie wystarcza założenie istnienia liczby n-Mahlo dla pewnego ustalonego n.

23 Friedman we wcześniejszej pracy podał także inne egzemplifikacje zdań „zwykłej matematyki" niezależnych od ZFC, twierdząc, że „stanowią one przykłady interesujących twierdzeń, których udowodnienie w konieczny sposób wymaga wyjścia poza ogólnie akceptowane zasady rozumowań matematycz-

Gdyby istniały jakieś naturalne intuicje dotyczące takich zdań, sprzeczne z owymi twierdzeniami dowodliwymi przy założeniu istnienia dużych liczb kardynalnych, to mielibyśmy faktycznie do czynienia z przekonującym przykładem falsyfikatora heurystycznego. Wydaje się jednak, że takich intuicji nie ma, zdania Friedmana nie wyrastają z naturalnych badań zwykłej, „codziennej" matematyki, ale raczej z badań metamatematycznych. Taką opinię wyraża np. Feferman: twierdzi, że zostały one spreparowane dla uzasadnienia pewnej tezy, są sztuczne i nie wyrastają z codziennej praktyki matematycznej. Podane przez Friedmana (w pracy Friedman 1986) zdanie „odwołuje się jedynie do pojęć matematyki skończonej, jednak jest nieskończenie odległe od zwykłych problemów matematycznych" (Feferman 1987: 202). Zdaniem Fefermana brak jest danych na poparcie tezy, że faktycznie matematyczne instrumentarium wykraczające poza ZFC może okazać się niezbędne w badaniach dotyczących problemów kombinatorycznych mających znaczenie z punktu widzenia pracy matematyka (Feferman 2000a: 407). Ujmując problem radykalnie, zdania Friedmana zostały skonstruowane w sztuczny sposób jako przykład zdań (rzekomo!) wywodzących się ze zwykłych badań matematycznych, na potrzeby uzasadnienia tezy o znaczeniu zaawansowanych wyników teoriomnogościowych dla zwykłej matematyki. Trudno jednoznacznie stwierdzić, czy wyniki Friedmana można interpretować w duchu koncepcji Lakatosa, uznając je za potencjalnie wiarygodne falsyfikatory dla rozszerzeń ZFC. Nie podważa to natomiast ogólnej obserwacji Lakatosa, iż formalna wersja pewnej teorii matematycznej może prowadzić do wniosków sprzecznych z codzienną praktyką i tym samym może zostać przez tę praktykę sfalsyfikowana. Cały problem tkwi w ustaleniu, jak będziemy rozumieć pojęcie praktyki matematycznej.

Nie sądzę jednak, aby udało się znaleźć sprzeczność między twierdzeniami ZFC a twierdzeniami matematyki nieformalnej. Nie można też dokonać ewentualnej falsyfikacji przez analizę czysto matematycznej wiarygodności zdań typu Con_T. Ewentualna falsy-

---

nych" (Friedman 1981: 209). Nie jest jednak do końca jasne, na ile te zdania są faktycznie naturalne i na ile wyrastają z praktyki matematycznej.

fikacja rozszerzeń teorii mnogości (czyli teorii typu ZFC+A, gdzie A jest owym dodatkowym aksjomatem) mogłaby się odbywać jedynie w słabym sensie – przez wskazanie zdania α, które zostaje rozstrzygnięte w ZFC, ale nieformalna matematyka s u g e r u j e inne rozwiązanie. Musiałaby zatem zajść koniunkcja następujących warunków:

1. Zdanie α jest niezależne od ZFC.
2. Zdanie α jest twierdzeniem teorii ZFC+A.
3. Matematyka nieformalna sugeruje, iż prawdziwe jest zdanie $\neg\alpha$.

Wówczas faktycznie zdanie α byłoby falsyfikatorem dla teorii ZFC+A[24]. Zauważmy, że aby taki fakt w ogóle mógł mieć miejsce, to owo zdanie α musiałoby mieć naturalną treść matematyczną (a nie być zdaniem dotyczącym np. modeli Boolowskich dla teorii mnogości, determinacji zbiorów, struktury uniwersum zbiorów konstruowalnych L etc. – takie zdania dotyczą bowiem wewnętrznych problemów teorii mnogości). Istnieją przykłady zdań niezależnych od ZFC, którym przypisuje się naturalną treść matematyczną[25], jednak trudno powiedzieć, czy istnieją jakieś intuicje, które by świadczyły wprost na rzecz ich prawdziwości lub fałszywości. Gdyby okazało się, że np. ZFC+A (czy nawet ZFC) dowodzi zdania P=NP, to fakt ten mógłby zostać uznany za argument przeciwko ZFC+A (*resp.* ZFC) – większość specjalistów uważa bowiem, że P≠NP[26]. Sądzę jednak, iż

[24] Gdyby taka sytuacja wystąpiła w odniesieniu do teorii ZFC (tzn. pewne zdanie α^* byłoby rozstrzygnięte inaczej w ZFC i w matematyce nieformalnej), to stanowiłaby ona argument świadczący przeciwko tej teorii.

[25] Sztandarowym przykładem jest hipoteza kontinuum. Przykłady takich zdań niezależnych mogą dotyczyć również teorii funkcji rzeczywistych, własności zbiorów liczb rzeczywistych (opisywanych w ramach deskryptywnej teorii mnogości), przestrzeni Banacha etc. Oto dwa przykłady takich twierdzeń: 1. Niech $f,g:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ będą funkcjami ciągłymi. Czy dla każdego zbioru Borelowskiego B, zbiór $f(\mathbf{R}\backslash g(B))$ jest mierzalny w sensie Lebesgue'a? 2. Niech X będzie zwartą przestrzenią Hausdorffa. Czy każda norma na algebrze $C(X,\mathbf{C})$ jest równoważna normie supremum? Por. Dales, Woodin 1987.

[26] Hipoteza P=NP stwierdza (nie wnikajmy tu w szczegóły), że problemy, jakie dają się rozwiązać za pomocą algorytmu niedeterministycznego w czasie wielomianowym, dają się też rozwiązać za pomocą algorytmu deterministycznego w tym samym czasie. Gdyby hipoteza ta była prawdziwa, oznaczałoby to istnienie wielomianowego algorytmu sprawdzającego, czy dana formuła rachunku

taka sytuacja jest bardzo mało prawdopodobna, a poszukiwanie tego typu falsyfikatorów to zajęcie skazane na niepowodzenie.

Ogólniej o falsyfikacji w szerszym sensie można byłoby mówić, gdybyśmy mieli do czynienia z sytuacją, w której:

1. Teoria formalna dowodzi α.
2. Matematyka nieformalna s u g e r u j e $\neg\alpha$.

Lakatos w tym kontekście przytacza przykład teorii mnogości *New Foundations* Quine'a. Zauważa, że rolę falsyfikatorów mogą pełnić dla niej stwierdzenia naiwnej teorii mnogości: fakt, że w NF daje się udowodnić twierdzenie, iż liczby porządkowe nie są dobrze uporządkowane przez relację $\leq$, stanowi falsyfikację tej teorii, gdyż jest to wniosek bardzo nieintuicyjny (Lakatos 2002: 235). Tu oczywiście pojawia się problem, czy powinniśmy uznać nadrzędną władzę naszych naiwnych intuicji dotyczących liczb porządkowych (i tym samym odrzucić NF). Problem jest szerszy: jak szeroka może być klasa owych zdań dopuszczonych do roli heurystycznych falsyfikatorów? Skrajne ujęcie dopuszczałoby tylko falsyfikatory czysto logiczne, a więc werdykt naszych (naiwnych) intuicji nie miałby żadnego znaczenia. Lakatos odrzuca taki punkt widzenia, dopuszczając szerszą klasę falsyfikatorów i poszerzając również samo pojęcie falsyfikacji. Taka właśnie sytuacja występuje w rozważanym przezeń przykładzie teorii NF: wszak nie istnieje t w i e r d z e n i e naiwnej matematyki dotyczące dobrego uporządkowania klasy liczb porządkowych, a jedynie nasze intuicyjne przeświadczenie dotyczące owego dobrego uporządkowania. Lakatos ma na myśli mechanizm, zgodnie z którym zdanie posiadające niewiarygodne (dziwne, nieintuicyjne, niepożądane etc.) konsekwencje, powinno samo zostać uznane za niewiarygodne i tym samym nie mogłoby zostać przyjęte jako aksjomat. Schemat (w uproszczeniu) byłby taki:

1. β logicznie wynika ze zdania α.
2. β jest zdaniem mało wiarygodnym.

WNIOSEK: α jest zdaniem mało wiarygodnym.

---

zdań jest tautologią (co wydaje się mało prawdopodobne). Więcej o problemach dotyczących złożoności obliczeniowej piszę w rozdziałach trzecim i czwartym.

O takiej sytuacji Lakatos pisze także w kontekście hipotezy kontinuum i standardowej teorii mnogości ZFC. W tym wypadku trudno byłoby mówić o silnym typie falsyfikacji – taki mógłby mieć miejsce jedynie wówczas, gdyby teoria ZFC+CH dowodziła jakiegoś zdania s p r z e c z n e g o z twierdzeniami matematyki nieformalnej. Taki przykład nie jest znany. Metoda *quasi*-empiryczna polega więc tutaj jedynie na analizie wiarygodności wniosków. Zdaniem Lakatosa posługiwał się nią Gödel, wskazując na niewiarygodne konsekwencje hipotezy kontinuum i tym samym niewiarygodność jej samej (Lakatos ma na myśli analizy z Gödel 1947/1964)[27]. Uczeń Poppera twierdzi wręcz, że zbudowanie teorii mnogości, w której można udowodnić negację hipotezy kontinuum, było kluczowe dla „nowego programu euklidesowego" Gödla (Lakatos 2002: 237)[28].

W naturalny sposób powyższe rozważania stosują się do problemu uzasadniania aksjomatów teorii mnogości. Szczegółowa prezentacja tej problematyki wykracza zdecydowanie poza ramy niniejszej pracy, jednak pozwolę sobie zwrócić uwagę Czytelnika na pewne

---

27 Lakatos zwraca też uwagę na fragment pracy Gödla, w którym jako metodę uzasadniania hipotez autor wskazuje odwołanie się do wiarygodności wniosków (Gödel 1944). Rzeczywiście, obok intuicji matematycznej Gödel wyraźnie mówił o „drugim filarze" uzasadniania aksjomatów matematycznych, a mianowicie przez odwołanie się do ich owocności w rozwiązywaniu problemów; chyba najbardziej znany fragment jego prac dotyczący tego zagadnienia to: „decyzja dotycząca ich [nowych aksjomatów – przyp. K. W.] prawdziwości jest możliwa także w inny sposób, a mianowicie przez indukcyjną analizę ich »sukcesu«. Sukces oznacza tutaj owocność w konsekwencje, w szczególności w konsekwencje »weryfikowalne«, tj. konsekwencje dowodliwe bez nowych aksjomatów, których dowody z pomocą nowych aksjomatów są jednakże zdecydowanie prostsze i łatwiejsze do odkrycia i umożliwiają zawarcie w jednym dowodzie wielu różnych dowodów. [...] Można jednak wyobrazić sobie o wiele wyższy poziom weryfikowania. Mogą istnieć aksjomaty tak owocne w sprawdzalne konsekwencje, rzucające tak dużo światła na całą dyscyplinę i dostarczające tak silnych metod rozwiązywania problemów (i to rozwiązywania konstruktywnego, tak dalece jak jest to możliwe), że niezależnie od zagadnienia, czy są one wewnętrznie konieczne, powinny zostać zaakceptowane przynajmniej w takim stopniu, jak dowolna dobrze ugruntowana teoria fizyczna" (Gödel 1947/1964: 265).

28 Próbę sformułowania aksjomatów umożliwiających rozstrzygnięcie problemu kontinuum Gödel podjął także w pracach: 1970a, 1970b (por. np.: Ellentuck 1975, Solovay 1995). O programie Gödla por. Feferman 1996.

ciekawe wątki tej dyskusji. Freiling w swej pracy podał bardzo prosty argument (opierający się na elementarnych, zrozumiałych na poziomie szkoły podstawowej intuicjach probabilistycznych), prowadzący do – intuicyjnego, jak się wydaje – aksjomatu ($A_{\aleph}$), który jest równoważny negacji hipotezy kontinuum (Freiling 1986)[29]. Wyniki Freilinga można byłoby zatem interpretować w duchu koncepcji Lakatosa, a jego aksjomat ($A_{\aleph}$) uznać za zdanie falsyfikujące CH. Wydaje się ono bowiem bardzo intuicyjne (w każdym razie na poziomie naiwnych intuicji teoriomnogościowych). Jeśli uznalibyśmy te intuicje za trafne, mielibyśmy do czynienia ze słabym falsyfikatorem w sensie Lakatosa[30]. Jednak dyskusje dotyczące potencjalnych nowych aksjomatów dla teorii mnogości mają znacznie częściej charakter bardzo techniczny. Przykładem jest koncepcja Woodina, która poniekąd również dostarcza przykładu falsyfikatora heurystycznego dla CH (por. Woodin: 1999, 2001; prezentację tej koncepcji zawiera praca Wójtowicz 2011c). Analizy Woodina odwołują się do bardzo wyrafinowanych wyników metateoretycznych i nie jest w pełni jasne, czy można twierdzić, że wyrastają one z praktyki matematycznej[31]. Pojawia się nieuchronnie problem określenia, czym owa praktyka matematyczna faktycznie jest, czym jest „zwykła matematyka" i jak ustalić jej zakres. Lakatos miał na myśli matematykę głównego nurtu, obejmującą np. teorię liczb, kombinatorykę, analizę rzeczywistą i zespoloną, rachunek prawdopodobieństwa, teorię równań różniczkowych, analizę funkcjonalną, topologię etc.[32] Nie chodziło mu

---

[29] Prezentację i analizę argumentacji Freilinga Czytelnik znajdzie np. w Wójtowicz: 2004, 2005; analizę argumentacji Freilinga zaś w: Bagemihl 1990, Simms: 1989, 1991, Freiling, Simms 1990.

[30] Odmienną kwestią jest to, czy faktycznie intuicje podane przez Freilinga są trafne – opinie komentatorów wyrażają tu raczej sceptycyzm.

[31] Z całą pewnością – w przeciwieństwie do argumentu Freilinga – argumentacji Woodina nie będzie w stanie zrozumieć tzw. człowiek z ulicy – a nawet „matematyk z ulicy". Wymaga ona znajomości bardzo specjalistycznych pojęć teorii mnogości.

[32] Warto tu przytoczyć roboczą klasyfikację podaną przez Simpsona w kontekście jego badań dotyczących tzw. matematyki odwrotnej. Pisze on: „przez zwykłą matematykę rozumiemy będącą w głównym nurcie badań matematycznych matematykę nie-teoriomnogościową, tj. matematykę, z jaką mieliśmy do

raczej o badania dotyczące np. modeli wewnętrznych dla ZFC albo niestandardowych modeli dla arytmetyki PA[33]. Jednak rozważania w stylu Lakatosa można prowadzić także w odniesieniu do aksjomatycznej wersji teorii mnogości ZFC: również tam da się wyróżnić sferę badań czysto formalnych i nieformalnych, heurystycznych analiz, dotyczących np. tego, czy koncepcja jest spójna, czy dobrze harmonizuje z naszą wizją uprawiania dyscypliny, czy oferuje pełne, dobre wyjaśnienia. „Obrzeża" teorii mnogości obfitują w tego typu problemy. Wyniki dotyczące tych zagadnień można byłoby – w tym poszerzonym sensie – uznać za falsyfikatory heurystyczne CH. Odwołują się one do rezultatów i rozważań metateoretycznych, które leżą w obszarze zainteresowania (można powiedzieć: w obszarze codziennej praktyki) specjalistów od teorii mnogości. Pojęcie falsyfikatora heurystycznego winno więc być zrelatywizowane do konkretnej teorii i środowiska problemowego. Można powiedzieć, że teoria mnogości stanowi teorię nadwyżkową w stosunku do codziennych potrzeb matematyków, ma swoje własne pojęcia i wewnętrzne problemy[34]. Stanowi (silne) uogólnienie zwykłej matematyki, lecz trudno spodziewać się istnienia falsyfikatorów heurystycznych dla ZFC

---

czynienia, zanim zabrali się za nią specjaliści od abstrakcyjnej teorii mnogości. (Lub raczej: matematykę taką, jaką byłaby, gdyby nie zabrali się do niej specjaliści od abstrakcyjnej teorii mnogości)" (Simpson 1984: 783). W innym miejscu proponuje bardziej szczegółowy podział: matematyka teoriomnogościowa obejmuje te fragmenty matematyki, w których jest niezbędne wykorzystanie metod, pojęć i środków *stricte* teoriomnogościowych (np. indukcji pozaskończonej, wyników dotyczących pozaskończonej hierarchii liczb kardynalnych, wyników dotyczących modeli dla ZFC, pojęcia konstruowalności i badań dotyczących klasy *L* etc.). Natomiast matematyka nieteoriomnogościowa to fragment matematyki „pierwotny lub niezależny od wprowadzenia abstrakcyjnych pojęć teoriomnogościowych. Chodzi tutaj o takie gałęzie jak geometria, teoria liczb, rachunek różniczkowy i całkowy, równania różniczkowe, analiza rzeczywista i zespolona, przeliczalna algebra, topologia ośrodkowych przestrzeni metrycznych, logika matematyczna i teoria obliczeń" (Simpson 1999: 1). Sądzę, że klasyfikacja Simpsona koresponduje z klasyfikacją Lakatosa.

33 W tym sensie – można przypuszczać – nie uznałby wyników Woodina za istotny argument na rzecz ¬CH.

34 Twierdzi się niekiedy nawet, że teoria mnogości zajmuje się zasadniczo swoimi wewnętrznymi problemami i jest niejako w fazie introwertycznej (por. Jensen 1995: 407). Jeśli przyjąć ten punkt widzenia, to należałoby przyznać, że znacze-

(czy nawet dla wzmocnień ZFC) wywodzących się z praktyki matematyki głównego nurtu. Można natomiast myśleć o tego typu falsyfikatorach w r a m a c h teoriomnogościowego systemu pojęć[35].

Sądzę przy tym, że – jeśli poszerzymy rozumienie falsyfikatora (czy też raczej: rozumienie pojęcia praktyki matematycznej) – to jest mało prawdopodobne, aby mogły istnieć falsyfikatory heurystyczne (w jakimkolwiek sensie) akurat dla aksjomatów dużych liczb kardynalnych, które rozważa Lakatos. Owe aksjomaty są uznawane dość powszechnie za naturalne, wiarygodne wzmocnienia ZFC, gdyż poprawnie uogólniają pojęcie zbioru[36]. Z aksjomatów dużych liczb kardynalnych wynikają pewne wnioski dotyczące np. zagadnień badanych w ramach deskryptywnej teorii mnogości[37], jednak nie uznalibyśmy ich za intuicyjnie nieakceptowalne. Tym samym nie mogłyby one zyskać miana falsyfikatorów heurystycznych.

Chociaż egzemplifikację Lakatosa dotyczącą potencjalnej falsyfikacji aksjomatów dużych liczb kardynalnych należy raczej uznać za nietrafną, ważny jest jednak nie tyle konkretny przykład, co wskazany przez niego mechanizm. Zauważmy też, że aksjomaty dużych liczb kardynalnych stają się – jeśli uznamy ich wiarygodność – naturalnymi falsyfikatorami dla zdania V=L, bowiem są z nim (od poziomu założenia istnienia liczby mierzalnej) sprzeczne. Falsyfikatorem dla V=L mogłaby być też negacja hipotezy kontinuum (V=L implikuje bowiem CH), gdybyśmy uznali jakąś argumentację na rzecz negacji CH (np. wspomnianą wcześniej argumentację Woodina bądź Freilinga) za wiarygodną. Należy jednak podkreślić, że mielibyśmy tutaj do czynienia z falsyfikacją w słabym sensie: owe falsyfikatory

nie zaawansowanych rozważań teoriomnogościowych dla zwykłej matematyki jest marginalne.

35 Por. wcześniejszą dyskusję Friedman–Feferman: spór o zakres pojęcia falsyfikatora heurystycznego dotyczyłby w gruncie rzeczy tego, które problemy i pojęcia matematyczne są naturalne.

36 Por. np.: Gödel 1946: 151, Kanamori, Magidor 1978: 105, Jensen 1995, Foreman 1998, Hauser 2002, Bagaria 2005.

37 Na przykład wyniki dotyczące determinacji, mierzalności zbiorów pewnego typu, ich topologicznych własności etc. Zestawienie wyników tego typu wraz z dyskusją dla problematyki uzasadniania aksjomatów znajdziemy np. w pracach Maddy: 1988a, 1988b.

nie są przecież zdaniami d o w o d l i w y m i w matematyce nieformalnej, możemy jedynie odnajdywać argumenty na rzecz ich wiarygodności. I co więcej, nie wywodzą się one z nieformalnych analiz dotyczących problemów z zakresu głównego nurtu matematyki, lecz z rozważań wewnętrznych dla teorii mnogości. Jednak mechanizm pozostaje ten sam: mamy do czynienia z pewnymi przekonaniami metateoretycznymi, które następnie są „kodowane" w postaci formalnych aksjomatów i biorą udział w procesie falsyfikacji.

3. Mechanizmy rozwoju matematyki

Mechanizmy falsyfikacji, o których pisze Lakatos, zachodzą przy procesie formalizacji teorii matematycznych uprawianych dotychczas nieformalnie. Falsyfikator w takiej sytuacji może odgrywać rolę swoistego zdania testowego, za pomocą którego da się sprawdzić, czy dana formalizacja jest adekwatna, czyli czy formalna rekonstrukcja pojęć została dokonana właściwie i czy aksjomatyka poprawnie ujmuje nasze preteoretyczne przekonania. Błąd objawiałby się sprzecznością między wynikami nieformalnymi a formalnymi. W przypadku np. formalizacji geometrii owo testowanie wersji sformalizowanej polegałoby na sprawdzaniu, czy klasa dowodliwych twierdzeń byłaby zgodna z klasą twierdzeń geometrii niesformalizowanej. Osobną kwestię stanowi to, czy uznamy, że rozbieżności świadczą o tym, że aksjomatyka jest błędna, czy też o tym, że w naszych intuicjach jest jakaś niespójność, która została ukazana dopiero w wyniku formalizacji (tak zapewne powiedziałby np. Pasch). Wszak kształtowanie się pojęć matematycznych i ich formalizacja ma charakter swoistego procesu: pierwotne intuicje są ujmowane w definicjach, a następnie testowane.

Dochodzimy więc do problemu mechanizmów rozwoju matematyki. Lakatos odrzuca euklidesową wizję rozwoju tej dziedziny, proponując zupełnie inny obraz. Jego zdaniem rozwój matematyki nie ma charakteru monotonicznego, nie polega na wzbogacaniu korpusu wiedzy matematycznej przez ciągłe dowodzenie nowych twierdzeń, ale – na krytyce i spekulacji, na ulepszaniu domysłów za pomocą poszukiwania nowych dowodów i podejmowaniu prób ich obalenia (Lakatos 2005: 22). Ogólną charakterystykę metody *quasi*-empirycznej podaje w postaci kilku reguł heurystycznych:

> Reguła 1. Jeśli masz jakąś hipotezę, spróbuj udowodnić ją i obalić ją. [...] przygotuj listę nieoczywistych lematów [...]; znajdź kontrprzykłady [...].
> Reguła 2. Jeśli masz kontrprzykład globalny, to odrzuć hipotezę [...] i zastąp hipotezę hipotezą ulepszoną. [...] Spróbuj uzyskać to, żeby wszystkie „ukryte lematy" stały się jawne.
> Reguła 3. Jeśli masz kontrprzykład lokalny, sprawdź, czy nie jest on także kontrprzykładem globalnym (Lakatos 2005: 87–88)[38].

W tym ujęciu rozwój matematyki odbywa się właśnie na drodze formułowania dowodów lematów, dla których następnie znajdujemy kontrprzykłady („lokalne", względnie „globalne"), co pozwala na udoskonalenie dowodu, uświadomienie sobie ukrytych założeń i korygowanie tychże. To powoduje, że heurystyka matematyczna jest podobna do heurystyki nauk przyrodniczych, gdyż „w obu znamienną rolę odgrywają hipotezy, dowody i refutacje" (Lakatos 2005: 120).

[38] W rozbudowanej formie Lakatos przedstawia ten schemat następująco: „Jest pewien prosty wzorzec odkrycia matematycznego czy rozwoju nieformalnych teorii matematycznych. Składa się on z następujących etapów: (1) Pierwotna hipoteza. (2) Dowód (surowy eksperyment myślowy lub argument polegający na rozkładzie pierwotnej hipotezy na podhipotezy czy lematy). (3) Wyłaniają się kontrprzykłady „globalne" (kontrprzykłady wobec pierwotnej hipotezy). (4) Dowód zostaje ponownie przeanalizowany – wychwycony zostaje „lemat-winowajca", wobec którego kontrprzykład globalny jest kontrprzykładem „lokalnym". Ten winny lemat mógł pozostawać uprzednio „w ukryciu" lub być błędnie rozpoznany. Teraz przedstawia się go w jawnej postaci i wbudowuje w pierwotną hipotezę jako warunek. Pierwotną hipotezę zastępuje twierdzenie – ulepszona hipoteza – której najdonioślejszą cechą jest nowe, wygenerowane przez dowód pojęcie" (Lakatos 2005: 195–196). To są podstawowe etapy – ale można wyróżnić też niekiedy dalsze: „(5) Bada się dowody innych twierdzeń, aby sprawdzić, czy pojawiają się w nich nowo odkryte lematy lub wygenerowane przez dowód pojęcie [...]. (6) Sprawdza się uznawane dotychczas konsekwencje pierwotnej, obecnie obalonej hipotezy. (7) Kontrprzykłady stają się nowymi przykładami – otwierają nowe pola badań" (Lakatos 2005: 196).

Przykład analizowany przez Lakatosa w jego podstawowej pracy to hipoteza Eulera dotycząca wielościanów[39]. Rozprawa ta ma formę dialogu ilustrującego sytuację, w której to adepci matematyki starają się wspólnymi siłami dojść do konstruktywnych wniosków, napotykając po drodze liczne przeszkody: kontrprzykłady, luki w rozumowaniach, niejasność pozornie dobrze określonych pojęć etc. Jako problematyczne jawi się szczególnie pojęcie wielościanu, które – pozornie – jest dla nas oczywiste (przychodzą nam zapewne do głowy jedynie „porządne" wielościany, jak sześcian czy czworościan foremny). Należy tutaj zauważyć, że nie jest to rekonstrukcja historyczna – Lakatos *explicite* pisze o tym, że prawdziwą historię zagadnienia przedstawia w przypisach. Rekonstrukcja ta dotyczy raczej swoistej wewnętrznej logiki rozwoju matematyki, która ujawnia się w pewien sposób w rzeczywistym rozwoju historycznym. Prezentowany w *Dowodach i refutacjach* dialog ma ujawniać tę logikę rozwoju[40].

Racjonalna rekonstrukcja procesu dowodzenia podjęta przez Lakatosa ma oczywiście diametralnie różny charakter od analogicznej rekonstrukcji dokonywanej przez logicystów czy formalistów. W ujęciu logicystycznym bądź formalistycznym owe mechanizmy dowodowe mogą zostać opisane w terminach bądź to praw logiki, bądź to reguł czysto formalnych. Głęboka struktura dowodu ujawnia się przez jego rekonstrukcję w rachunku formalnym i sprawdzeniu zgodności z odpowiednimi regułami. Według Lakatosa dla zrozumienia istoty matematyki koniecznie jest wyjście od prakty-

---

39 Hipoteza ta głosi, iż W+S=K+2 (gdzie W to liczba wierzchołków, S to liczba ścian, a K to liczba krawędzi).

40 Różnice między konstrukcją dialogu Lakatosa a faktycznymi zdarzeniami historycznymi podkreśla Koetsier (1991: 42). Wprowadza też pojęcie mikro- i makropoziomu w odniesieniu do matematyki: poziom „mikro" dotyczy poszczególnych problemów, twierdzeń (często więc poszczególnych matematyków i sposobu ich myślenia). Poziom „makro" dotyczy poszczególnych dziedzin matematycznych, a nawet całej matematyki (a więc zazwyczaj całej społeczności matematyków; Koetsier 1991: 14). Koetsier twierdzi, że ujęcie w duchu dowodów i refutacji można traktować jako swoistą racjonalną (nie historyczną!) rekonstrukcję procesu tworzenia matematyki na mikropoziomie (Koetsier 1991: 43). Nie stanowi ona natomiast dobrego opisu rozwoju całych dziedzin matematycznych (czy całej matematyki).

ki matematycznej, a nie od zrekonstruowanej w rachunku logicznym wersji. Rekonstrukcja Lakatosa dokonuje się w zupełnie innym środowisku pojęciowym – ważna jest analiza dynamiki pojęć matematycznych, konfrontacja z wcześniej ugruntowanymi intuicjami, radzenie sobie z pojawiającymi się kontrprzykładami etc. Wyjaśnieniem istoty matematyki nie jest wszak gra symboli, ale zmaganie się naszych intuicji z oporną materią. Lakatos uwypukla więc swoistą walkę matematyka o to, aby w całym ciągu procedur w końcu dojść zarówno do poprawnych, trafnie oddających istotę danego pojęcia definicji, jak i do przekonującego dowodu. Jednak środkiem do osiągnięcia tego celu nie jest „dekretowana formalizacja", ale wnikanie w treść i znaczenie analizowanych pojęć. W tym sensie Lakatos jest bardzo bliski Gödlowi (i nie przypadkiem odwołuje się do jego prac). W koncepcji autora *Dowodów i refutacji* zdania matematyczne mają oczywiście pewną treść – niesprowadzalną do reguł manipulacji symbolami, jak chcieliby formaliści.

Lakatos mówi o treści zdań bazowych matematyki nieformalnej i o naszym ich rozumieniu. Skoro zatem przypisuje zdaniom bazowym treść i odrzuca ujęcie formalistyczne (w myśl którego ta treść sprowadza się co najwyżej do znajomości reguł manipulacji symbolami), to koniecznie z punktu widzenia jego koncepcji jest uznanie, iż posiadamy jakieś naturalne preteoretyczne rozumienie pojęć matematycznych i intuicyjne ujęcie pewnych zdań matematycznych jako p r a w d właśnie. Jednocześnie też musimy posiadać jakieś mechanizmy inferencyjne, które pozwalają nam na prowadzenie, rozumienie i akceptowanie nieformalnych dowodów[41]. Lakatosa można zatem usytuować wyraźnie po stronie nurtu „rozumiejącego", zaś jego koncepcję uznać za radykalnie opozycyjną wobec nurtu fundacjonalistyczno-formalistycznego.

Lakatos zresztą w pewnym sensie abstrahuje od problematyki epistemologicznej: skupia się na samych mechanizmach rozwoju matematyki, traktując przekonania matematyków poniekąd jako

---

[41] Tu dotykamy problemu, czy owe zjawiska dają się opisać w modelu algorytmicznym (jak chcieliby komputacjoniści), czy też intuicyjne ujmowanie pojęć matematycznych nie ma charakteru algorytmicznego. Tego typu zagadnienia są podejmowane w dalszych rozdziałach.

dane wyjściowe dla swoich analiz. Mówiąc swobodnie: owe podstawowe „dane matematycznego doświadczenia" skądś się biorą, a następnie uczestniczą w matematycznej grze (zgodnie z określoną metodologią). Lakatos deklaruje wyraźnie, że nieformalna matematyka nie jest empiryczna i że nie można stosować do niej neopozytywistycznego kryterium sensowności zdań – jako bądź tautologii, bądź zdań empirycznych. *Quasi*-empiryzm Lakatosa ma charakter metodologiczny.

4. Uwagi końcowe

Niezależnie od tego, że tezy Lakatosa można uznać za zbyt radykalne, zaś jego argumentację w wielu miejscach za niewiarygodną, niewątpliwą zasługą tego badacza jest zwrócenie uwagi na uproszczenia i jednostronność ujęć fundacjonalistycznych. Logicyzm i formalizm zajmowały się przede wszystkim matematyką w wersji sformalizowanej, poddanej stosownej rekonstrukcji. Można powiedzieć, iż przedmiotem swoich badań uczyniły matematykę traktowaną jako swoisty idealny konstrukt, a nie realny byt. Z punktu widzenia tych programów podstawowym – i w gruncie rzeczy jedynym – narzędziem analizy matematyki jest logika formalna. Takie ujęcie traci z pola widzenia szereg ważnych zagadnień. Lakatos zwrócił natomiast uwagę na fakt, że także w odniesieniu do matematyki można stosować język i pojęcia wykraczające poza pojęcia logiczne – akceptując zarazem przekonanie o racjonalności jej rozwoju. Jego analizy stanowiły niewątpliwie inspirację dla ujęć wykraczających poza „wielką trójkę" (czyli intuicjonizm, logicyzm i formalizm)[42].

Dziś tezy Lakatosa nie brzmią już tak bardzo radykalnie jak kiedyś. Pojawia się coraz więcej prac, w których autorzy zwracają uwagę na swoiste napięcie pomiędzy pojęciem dowodu formalnego a pojęciem dowodu z praktyki matematycznej, czyli na to, co stanowi

---

[42] Na przykład cykl prac (Hallett 1979) dotyczy opisu rozwoju matematyki w języku programów badawczych Lakatosa. Artykuł Oliveri (2006) zawiera zaś szczegółową próbę opisu rozwoju teorii mnogości w języku tej koncepcji.

przedmiot rozważań znaczącej części książki. Filozofia matematyki nie jest dzisiaj tak euklidesowa jak 40 czy 50 lat temu – to po części zasługa Lakatosa. Choć więc z wieloma szczegółowymi tezami trudno się zgodzić, to jego prace uważam za ważne dla rozwoju filozoficznej refleksji nad matematyką. Lakatosa można uznać za swoistego rzecznika nurtu antyfundacjonalistycznego, a uwzględnienie wyników jego analiz jest niewątpliwie ważne dla dyskusji dotyczących natury dowodu matematycznego.

Prace Lakatosa przygotowują wreszcie grunt do podjęcia badań na temat wpływu czynników empirycznych na proces dowodzenia. Akcentuje on bowiem znaczenie realnych procesów rozwojowych dla refleksji nad matematyką. Nie ulega zaś wątpliwości, że istotne w rozwoju tej dyscypliny są interakcje z naukami empirycznymi. Matematyka czerpie inspiracje z rozwoju fizyki, dostarczając narzędzi dla opisu zjawisk fizycznych. Można powiedzieć, że szereg teorii matematycznych wręcz uzgadnia się z danymi nauk empirycznych (takie jest np. stanowisko Quine'a). Owe zdania bazowe, o których mówi Lakatos, mogą pochodzić z naszego intuicyjnego rozumienia pojęć matematycznych, ale też – być w jakiś sposób wywodzone z naszego opisu świata. Co więcej, wyniki pewnych eksperymentów można interpretować jako argumenty na rzecz określonych tez matematycznych, a w samych dowodach mogą wystąpić elementy empiryczne. Pojawia się pytanie o status tak rozumianej wiedzy. Rozważania Lakatosa zachęcają do podjęcia tego typu analiz.

ROZDZIAŁ 3

Dowody komputerowe

W rozdziale pierwszym przedmiotem analizy była historyczna przemiana rozumienia pojęcia dowodu matematycznego, którą można określić jako ewolucję od rozumienia treściowego (semantycznego) w kierunku rozumienia formalistycznego. Mówiąc w pewnym uproszczeniu, w kwestii natury dowodu da się wskazać dwa przeciwstawne punkty widzenia (dla uwydatnienia różnic przedstawiam je w wersjach nieco wyostrzonych):

1. Dowód matematyczny to czysto formalny konstrukt, którego semantyczne aspekty są nieistotne – liczy się tylko zgodność z formalnymi regułami. Fakt, że matematycy wiążą z owymi dowodami pewne treści jest jedynie (być może skądinąd ciekawym) zjawiskiem psychologicznym, jednak nie ma ono żadnego znaczenia w dyskusji filozoficznej.

2. Dowodzenie matematyczne stanowi swoistą aktywność intelektualną, która nie jest skrępowana warunkami formalnymi. Sama warstwa formalna (czy nawet językowa) schodzi na dalszy plan. Kluczowe dla matematyki jest przekazywanie pewnych treści, idei, intuicji, a nie formalizacja. Dowodzenie stanowi raczej ciąg aktów intelektualnych, a nie przekształceń formalnych[1].

Koncepcja Lakatosa (będąca przedmiotem analiz w drugim rozdziale niniejszej pracy) w wyraźny sposób uwypukla różnice między tymi dwoma rozumieniami – sam jej twórca opowiada się zde-

[1] W takim ujęciu kryterium „legalności” dowodu stanowi akceptacja przez matematyków (w praktyce będzie tu chodzić o grono ekspertów), zaś dla uzyskania aprobaty dany dowód matematyczny wcale nie musi być zaprezentowany w wersji sformalizowanej.

cydowanie przeciwko formalistycznemu rozumieniu matematyki (w szczególności – takiemu rozumieniu procesu dowodzenia)[2].

W pierwszej części niniejszego rozdziału przedstawiam podjętą przez Azzouniego (2004) próbę wyjaśnienia zależności między tymi dwoma punktami widzenia. Jego stanowisko można uznać za pewnego typu wersję komputacjonizmu (choć on sam jej tak nie określa). Niezależnie od tego, że wyjaśnienie Azzouniego uważam za niezadowalające, jego koncepcja jest inspirująca dla dalszej dyskusji i pozwala w naturalny sposób przedstawić pewne kluczowe problemy. Analiza tej koncepcji i związanych z nią zagadnień stanowi też naturalny wstęp do omówienia dowodów komputerowych. Nie jest oczywiste, czy ich pojawienie się stanowi istotnie nową jakość, ale z pewnością wymaga gruntownej dyskusji. Dowody komputerowe – oprócz tego, że zmuszają do postawienia pewnych tradycyjnych problemów w bardziej wyrazisty sposób (rozumienie relacji między formalną a realną wersją dowodu, problem rozumienia i wyjaśnienia w matematyce) – ukazują konieczność podjęcia dyskusji nad rolą czynnika empirycznego w matematyce.

W tym rozdziale przedmiotem dyskusji będą więc dwie podstawowe grupy zagadnień:

1. Problem zależności między dowodami znanymi z praktyki a ich sformalizowanymi wersjami. Nie ulega wątpliwości, że dowód komputerowy ma charakter w pełni sformalizowany i że trudno mówić w tym przypadku o elementach treściowych (semantycznych) – pozwala to w jasny sposób postawić problem zależności między dowodem w rozumieniu teorii dowodu (jako pewnego czysto formalnego konstruktu) a praktyką argumentacyjną matematyków[3]. Jednym

---

2 Różnice w ujęciach: formalistycznym i Lakatosa są bardzo wyraźne także w wypadku problemu uzasadniania aksjomatów teorii mnogości (o którym wspomniano w rozdziale drugim). Wszak dla formalisty uzasadnianie aksjomatów jest po prostu problemem pustym (szczególnie odmawia on słuszności np. pytaniom o prawdziwą wartość kontinuum albo o to, czy aksjomaty dużych liczb kardynalnych to prawdziwe aksjomaty). Z punktu widzenia skrajnego formalizmu, matematyka to gra symboli, aksjomaty to jakieś zestawy symboli, od których ta gra się rozpoczyna, zaś dowodzenie to czynność sformalizowana.

3 Nie mam tu oczywiście na myśli (jawnie fałszywej) tezy, że dla dowodów komputerowych nie można podać semantyki (wszak „Semantyka języków formalnych" to

z ważnych w tym kontekście zagadnień jest też problem wyjaśniającej roli dowodu matematycznego, a zwłaszcza pytanie o to, czy (i jak) dowody komputerowe mogą odgrywać rolę wyjaśniającą w matematyce.

2. Problem czynników empirycznych w procesie zdobywania wiedzy matematycznej. Użycie komputera może być traktowane jako eksperyment fizyczny. Pojawia się pytanie, czy fakt ten ma istotne znaczenie z punktu widzenia dyskusji dotyczącej statusu wiedzy matematycznej. Nie ulega wątpliwości, iż matematyka jest niezbędna w naukach empirycznych, czyli niezbędna dla zdobywania wiedzy fizycznej. Można jednak zastanowić się, czy owa zależność nie jest obustronna: czy wiedza fizyczna o świecie może być wykorzystywana w tworzeniu nowej wiedzy matematycznej? Czy nasza znajomość praw fizyki ułatwia nam zdobycie nowej wiedzy matematycznej? Czy fakt wykorzystania tej wiedzy fizycznej zmienia status wiedzy matematycznej?

Problematyka dowodów komputerowych stanowi również naturalny wstęp do dyskusji filozoficznej dotyczącej statusu wiedzy matematycznej w świetle wyników z zakresu teorii obliczeń kwantowych i hiperobliczeń (które będą przedmiotem analiz w dalszych rozdziałach).

1. Dowód realny a dowód idealny – problem formalizacji

Rozwój logiki formalnej dostarczył silnych narzędzi do analizy wnioskowań i umożliwił zrozumienie istotnych aspektów rozumowań matematycznych. Analiza logiczna pozwala na stworzenie pewnego modelu wnioskowań matematycznych, a przede wszystkim na nadanie pojęciu dowodu matematycznego (argumentacji matematycznej) uchwytnej, dobrze określonej treści[4]. Mamy tu zawsze do czy-

---

jeden z podstawowych wykładów na studiach informatycznych). Chodzi o to, że nie ma tu sensu ani potrzeby mówić o elementach intuicyjnego rozumienia, jak to jest w przypadku „ludzkich" dowodów.

4 Znamy ową definicję ze szkolnego kursu logiki: dowodem zdania β na podstawie zbioru aksjomatów (teorii) T nazwiemy skończony ciąg formuł $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$,

nienia z dowodem w pewnym sformalizowanym języku, a o tym, czy jest on poprawny, decydują wyłącznie kryteria o charakterze syntaktycznym. Nawiązując do analizowanego w rozdziale pierwszym zagadnienia relacji między treściową a formalną analizą dowodu, przy ujęciu formalnym abstrahujemy całkowicie od treści, od problemu rozumienia dowodu, od jego ewentualnej roli eksplanacyjnej czy od związanych z nim efektów psychologicznych.

Jednak traktowanie dowodu matematycznego jako formalnego jest odległe od praktyki matematycznej. Dowody, z jakimi się spotykamy w codziennej praktyce (w referatach czy publikacjach), mają oczywiście ścisły i precyzyjny charakter, ale nie są dowodami formalnymi w takim sensie, jak to rozumie teoria dowodu[5]. Dowody matematyczne są pisane w języku, który jest swoistą mieszaniną języka naturalnego i języka symbolicznego. Żaden matematyk nie pisze swoich prac w postaci ciągu formuł języka formalnego (np. języka ZFC)[6]. Byłoby to z praktycznego punktu widzenia niewykonalne (zastanówmy się, jaką długość miałyby dowody, które w swojej zwykłej wersji mają kilkadziesiąt czy nawet kilkaset stron!), a przede wszystkim – zbędne. Z dokonaniem takiej formalizacji nie wiązałaby się żadna korzyść poznawcza, zaś z punktu widzenia komunikowania treści matematycznych, taka nadmierna formalizacja byłaby stratą czasu. Można wręcz przypuszczać, że mało który ekspert z zakresu np. topologii różniczkowej potrafiłby rozpoznać swój wła-

spełniający pewne warunki formalne. Niekiedy może być to drzewo, niekiedy ów ciąg może być ciągiem pozaskończonym, jednak zasadnicza idea jest wspólna.

5 Teoria dowodu nie stawia zresztą sobie zadania, aby opisać praktykę matematyczną – jej przedmiotem są dowody formalne, a nie opis tego, jak dowodzą twierdzenia specjaliści z zakresu np. topologii różniczkowej (dajmy na to – jak wyglądałby dowód hipotezy Poincarégo podany przez Perelmana i czy byłby poprawny). Dowód Perelmana mógłby zainteresować teorię dowodu dopiero po jego „wstępnej obróbce", czyli po poddaniu go formalizacji (co z kolei nie będzie raczej interesować topologów różniczkowych).

6 Mam tu na myśli zwykłą praktykę matematyczną: matematyków zajmujących się np. teorią równań różniczkowych, kombinatoryką, topologią etc. W przypadku badań dotyczących automatycznego dowodzenia twierdzeń oczywiście taka formalizacja jest dokonywana.

sny dowód po „przetłumaczeniu" go na język ZFC. Z punktu widzenia owego specjalisty fakt, że jakiś dowód geometryczny (np. dowód hipotezy Poincarégo) został formalnie zrekonstruowany w ramach ZFC, nie jest faktem interesującym – specjalista ów raczej pokiwa głową w zadumie, że oto ludzie (być może doda tu kpiąco: o mentalności buchalterów, a nie matematyków) tracą energię na przerabianie dobrych dowodów, zamiast zająć się rozwiązywaniem problemów, tworzeniem nowych idei, wymyślaniem nowych technik i pojęć. Formalna rekonstrukcja dowodów po prostu leży poza zasięgiem zainteresowania topologii różniczkowej. Nagabywany o sformalizowaną wersję dowodu specjalista powie zapewne, że jego zadaniem jest uzyskanie nowego wyniku, rozwiązanie konkretnego problemu matematycznego (udowodnienie twierdzenia), swoiste „wniknięcie" w istotę zagadnienia, a nie przepisywanie twierdzeń i dowodów w jakiejś wymyślonej przez logików notacji. Nasz matematyk doda prawdopodobnie, że żaden specjalista z jego dziedziny nie ma wątpliwości co do poprawności dowodu, a zapisywanie go w jakiejś „kanonicznej notacji logicznej" może jedynie zaciemnić obraz. Rozważmy hipotetyczną sytuację, w której owym znawcom oznajmiono, że mimo wieloletnich prób nie udało się podać formalizacji dowodu hipotezy Poincarégo w języku ZFC[7]. Nie uznaliby tego faktu za kłopotliwy z punktu widzenia ich dyscypliny. Co więcej, nawet gdyby się okazało, że prawdopodobnie taka formalizacja nie jest wykonalna (albo że np. komputerowa weryfikacja dowodu byłaby praktycznie niemożliwa), nie uznaliby oni tego za katastrofalne[8]. Powiedzieliby raczej, że z punktu widzenia topologii różniczkowej problem jest rozwiązany, a dowód dobry, natomiast to, że jego rekon-

7 Wedle mojej wiedzy tak wygląda sytuacja aktualna na A.D. 2012: nie jest znana formalna wersja dowodu Perelmana.

8 Stwierdzenie, że formalizacja dowodu nie jest wykonalna, wydaje się przeczyć ugruntowanemu (przez indukcję przyrodniczą) przekonaniu, że dowody matematyczne *są* formalizowane. Można jednak wyobrazić sobie chociażby sytuację, w której pewien dowód sformułowano z użyciem pojęć drugiego rzędu, zaś jego formalna rekonstrukcja w teorii pierwszego rzędu jest po prostu praktycznie niedostępna (o takim przykładzie, podanym przez Boolosa, piszę w niniejszym rozdziale).

strukcja w pewnej określonej notacji jest trudna, niedogodna albo wręcz niewykonalna to już nie ich problem. Zadanie topologii różniczkowej to bowiem zdobywanie nowej wiedzy na temat rozmaitości różniczkowalnych, a nie zapisywanie (skądinąd w pełni satysfakcjonujących i pomysłowych) dowodów w sztucznej notacji[9].

Nie ulega wątpliwości, że w dowodach matematycznych zawiera się element czysto formalny (kiedy np. jest konieczne przeprowadzenie wielu stron żmudnych oszacowań i przekształceń, aby udowodnić pewną nierówność, albo kiedy trzeba wykonać cały ciąg przekształceń algebraicznych). Z drugiej jednak strony dowody realne nie spełniają wszystkich reguł formalnych, zaś eksperci wydają pozytywny werdykt, akceptując dany dowód, kiedy poczują się przekonani, a nie kiedy zobaczą wydruk jego sformalizowanej wersji. Kluczowy jest tu moment zrozumienia idei, przewodniego wątku, metody dowodu i jego akceptacja (w szczególności też poszczególnych jego kroków) w akcie intelektualnym (czy raczej: w całym szeregu aktów intelektualnych). Pojawia się pytanie, na jakiej podstawie matematyk podejmuje decyzję o uznaniu dowodu za dobry i jaki związek ma to z istnieniem (potencjalnej) sformalizowanej wersji dowodu[10].

W procesie dowodzenia kluczowe są przejścia od akceptacji zdania α do akceptacji kolejnego zdania β[11]. Na czym jednak polega myślowe ujęcie owego przejścia, dostrzeżenie jego prawomocności? Wszak na poziomie świadomych aktów myślowych nie rozkładamy takich przejść na elementarne operacje w rachunku formalnym. Należy przy tym zauważyć, że taka akceptacja nie ma na ogół prostej liniowej struktury: przejście do nowego przekonania β nie następuje w wyniku analizy („matematycznej kontemplacji") jedy-

---

9 Jako ciekawostkę można tu przytoczyć podaną przez Mathiasa rekonstrukcję definicji liczby 1 w systemie Bourbakiego (Mathias 2002). Okazuje się, że stosowny term miałby długość 4 523 659 424 929 znaków. Nic więc dziwnego, że idea pełnego formalizowania rozumowań matematycznych napotyka opór matematyków.

10 Dobrze widoczne jest to w kontekście odkrycia: wszak sformułowanie językowe, uzupełnianie szczegółów dowodu, przychodzi później, bowiem u źródła mamy ów przebłysk idei, a nie badanie formalnych ciągów symboli.

11 Niektóre z takich szczególnie ważnych miejsc podkreślamy w dowodach, używając zwrotów „stąd", „a zatem" etc.

nie poprzednika α, ale raczej przez swoisty ogląd naszej całościowej wiedzy w danym momencie, w której zdanie α stanowi tylko jeden z elementów. *De facto* w takim akcie akceptacji zdania β rolę odgrywa nie tylko jedno zdanie α, ale – mówiąc swobodnie – cały „pakiet" przekonań matematyka na temat przedmiotu jego badań. Owo przejście od α do β odbywa się w kontekście pewnej „wiedzy tła".

Z czysto formalnego punktu widzenia, charakterystyka „wiedzy tła" jest klarowna: składa się ona po prostu z przyjętych na początku aksjomatów lub z już udowodnionych formuł. Nie opisuje to jednak realnych procesów dowodzenia; w każdym razie nie w planie psychologicznym. Z kolei w ujęciu intuicyjnym („kartezjańskim") w dowodzeniu mamy do czynienia z aktami intelektualnymi, które dają nam wgląd w prawdziwość zdań matematycznych (i prawomocność kroków we wnioskowaniu). Dzieje się tak, ponieważ nasz umysł posiada zdolność do dokonywania takich nieredukowalnych aktów. Naturalne staje się pytanie, na jakim poziomie pojawia się taka zdolność, jakiego typu akty są faktycznie pierwotne, a jakie dają się dalej rozłożyć na „czynniki pierwsze". W praktyce matematycznej stosunkowo skomplikowane przejścia dowodowe są traktowane jako prawomocne (przy czym warunek stanowi pewne obycie z przedmiotem badań). Jednak dają się one rozłożyć na bardziej elementarne. Pojawia się problem, co leży u podłoża tego typu przejść i co jest gwarantem ich prawomocności.

Z punktu widzenia kartezjańskiego u podłoża owych elementarnych przejść leżałaby pewna zdolność do intelektualnego ujęcia owych operacji. Z punktu widzenia skrajnego formalizmu natomiast u podłoża owych przejść leżą czysto formalne reguły (można powiedzieć: formalne reguły przekształcania ciągów symboli – w ostatecznym rozrachunku ciągów zerojedynkowych, bo każdy skończony ciąg symboli daje się tak zakodować). Jednak każde z tych wyjaśnień pomija pewne ważne aspekty: nie ulega przecież wątpliwości, że dokonujemy przekształceń formalnych i że w szczególności możemy wskazać pewne czysto strukturalne własności dowodów i analogie między nimi – ten fakt uważamy za bardzo istotny (a więc jakieś ziarno prawdy tkwi w formalizmie). Nie ulega jednak również wątpliwości, że owe reguły formalne nie zostały przyjęte w sposób arbitralny, ale zgodnie z pewnym ich rozumieniem (a więc ziarno prawdy tkwi w ujęciu treściowym). Pojawia się pytanie: co ostatecznie decyduje o tym, że matematycy są zgodni przy akceptacji dowodów, choć przecież nie analizują (i nie znają) ich sformalizowanych wersji? Co leży u podłoża aktów akceptacji dowodów? Problem ma zarówno aspekt indywidualny (decyzje pojedynczych matematyków) i społeczny (wspólne reguły dla całej społeczności matematyków).

Ciekawa próba wyjaśnienia tej relacji została podjęta przez Azzouniego (2004); jego koncepcji poświęcam kolejny paragraf. Pomimo pewnych słabości, zwraca ona uwagę na ważne aspekty zagadnienia i inspiruje do dyskusji.

2. Koncepcja Azzouniego – prezentacja*

Azzouni wychodzi od obserwacji, że matematycy zgadzają się zasadniczo co do poprawności i prawomocności dowodów, mimo iż nie formalizują ich w swojej praktyce. Pojawia się więc naturalne pytanie o źródło owej zgodności.

Jedno z możliwych ujęć sięga do wyjaśnień socjologizujących, w myśl których dowód matematyczny ma charakter społecznego konstruktu, a warunki społeczno-kulturowe determinują, kiedy dowód uznaje się za przekonujący. Owa zgodność matematyków ma zatem swoje źródło w swoistej umowie społecznej. Z punktu widzenia filozofii postmodernistycznej[12] dowód matematyczny to zestaw technik retorycznych służących do zwycięstwa w dyskusji i przekonania do swoich racji pozostałych członków komunikacyjnej wspólnoty. Dowód stanowi więc skuteczną aplikację pewnych akceptowanych w danej społeczności technik argumentacyjnych, jest czysto kulturowym konstruktem, który – co do istoty – nie różni się od

* Przy prezentacji koncepcji Azzouniego korzystam z artykułu Wójtowicz 2011a.

12 Traktuję ten nurt zbiorczo, zaliczając do niego również np. mocny program socjologii wiedzy zaaplikowany do matematyki. Być może specjalista w tej dziedzinie uzna to za uproszczenie, ale przecież skoro każdy dyskurs jest równie dobry jak każdy inny, to i dyskurs posługujący się tym uproszczeniem też.

technik perswazyjnych stosowanych np. w kulturach plemiennych. Z tego punktu widzenia ewentualna formalizowalność dowodu nie ma znaczenia – liczy się bowiem jedynie retoryczna skuteczność.

Świadomie przerysowując nieco ów pogląd, można powiedzieć, że akceptacja danych technik dowodowych jest wyrazem hegemonii pewnych grup społecznych (np. białych heteroseksualnych mężczyzn, członków klasy średniej, właścicieli nieruchomości, osób jedzących wołowinę, wychowanków MIT lub UCLA, osób wyznania katolickiego, cyklistów etc.) i winna być wyjaśniana w terminach ekskluzywistycznego dyskursu: osoby, które wierzą w to, że 2+2=5 są poddane opresji i w brutalny sposób wykluczane ze wspólnoty, zaś ich (wszak równie uprawniony jak każdy inny) punkt widzenia nie ma szans na przebicie się w zideologizowanym dyskursie. Akceptacja takich, a nie innych dowodów ma charakter czysto socjologiczny, podobnie jak moda. W tej chwili panuje moda na dowodzenie w pewnym stylu, ale równie dobrze za 30 lat może zapanować trend na dowody np. czysto rysunkowe albo uwzględniające stosowne parytety[13].

Azzouni odrzuca wyjaśnienia socjologizujące[14]. Jego zdaniem społeczna zgoda matematyków dotycząca dowodów ma głębsze przyczyny niż tylko społeczne: „w tle" tej akceptacji leży pewien specyficznie rozumiany idealny dowód. Główna teza Azzouniego głosi bowiem, iż każdy realny dowód stanowi swoisty wskaźnik (*indicator*) tego, że w pewnym systemie algorytmicznym istnieje stosowna procedura algorytmiczna (obliczeniowa) będąca ową idealną wersją dowodu (*derivation*) – stąd też bierze się określenie jego koncepcji jako *derivation-indicator view*[15]. Azzouni pisze więc: „jeśli dowody w gruncie rzeczy stanowią narzędzia, za pomocą których matematycy przekonują siebie nawzajem o istnieniu takiej czy innej mechanicznie we-

13 Pojawia się pytanie, skąd biorą się tego typu pomysły w odniesieniu do matematyki. Moim zdaniem nie wynikają one z pogłębionej refleksji nad dyscypliną, ale raczej z klimatu intelektualnego, który zachęca do rezygnacji z poszukiwania racjonalnych wyjaśnień. Analizie tych zagadnień jest poświęcona praca Wójtowicz 2009.

14 Więcej na ten temat zob. Azzouni 2006.

15 Nie znalazłem trafnego polskiego tłumaczenia, dlatego pozostanę przy oryginalnym określeniu.

ryfikowalnej derywacji, fakt ten wystarczy do wyjaśnienia, dlaczego matematycy zgadzają się ze sobą co do tego, kiedy pewien dowód faktycznie dowodzi pewnego twierdzenia" (Azzouni 2004: 84). Można powiedzieć, że realny dowód niejako odkrywa fakt istnienia takiej derywacji „w takim czy innym nieformalnie określonym systemie algorytmicznym" (Azzouni 2004: 85). Sam opis tego systemu nie musi być sformalizowany, natomiast ów system umożliwia mechaniczne rozpoznawanie dowodów.

Owe derywacje nie muszą być związane z jakimś z góry ustalonym systemem formalnym: „'systemy algorytmiczne' nie są ograniczone do pewnej wyróżnionej logiki [...] ani nawet do pewnego ustalonego języka [...] To, co j e s t istotne, to to, że 'dowody', jakkolwiek by nie były rozumiane, są (w zasadzie) mechanicznie rozpoznawalne" (Azzouni 2004: 86). Praktyka matematyczna może więc opierać się (nawet jeśli dzieje się to w sposób nieuświadomiony) na różnego typu systemach algorytmicznych „w tle", zaś owe systemy mogą być – stosownie do potrzeb – wzbogacane i rozwijane. Tu Azzouni formułuje warunek, iż jedynym logicznym ograniczeniem dotyczącym wzbogacanych systemów jest ich zachowawczość, tj. zachowane mają być wyniki uzyskane we wcześniejszych systemach. To warunek dość oczywisty: skoro bowiem w pewnym systemie S zostało udowodnione α, to zmodyfikowany (wzmocniony) system S* powinien nadal umożliwiać udowodnienie twierdzenia α. Wzmacnianie, uogólnianie, łączenie ze sobą różnych teorii matematycznych jest kluczowe dla rozwoju matematyki, Azzouni pisze więc: „centralną rolę w praktyce matematycznej odgrywa łączenie ze sobą tych algorytmicznych systemów – i ten fakt wyjaśnia wiele zjawisk znanych z praktyki, które w innym wypadku wydawałyby się wymagać odniesienia do obiektów matematycznych (np. liczb)" (Azzouni 2004: 86–87). Wyjaśnieniem i gwarantem dla współdziałania różnych teorii matematycznych są więc owe procedury algorytmiczne „w tle", a nie założenie o istnieniu wspólnego przedmiotu odniesienia w postaci obiektów abstrakcyjnych[16].

[16] Azzouni jest antyrealistą, a więc nie chce odwoływać się do interpretacji, w myśl których o prawdziwości zdań matematycznych decyduje zgodność z pozamatematyczną rzeczywistością.

Na realne dowody matematyczne należy zatem patrzeć jako na argumenty, które wskazują na istnienie derywacji (Azzouni 2004: 88). Dowód dlatego przekonuje innych matematyków, że „w tle" czeka owa derywacja. To właśnie ona jest uprawdziwiaczem (*truth-maker*) dla prawdziwości zdań matematycznych (a nie np. konfiguracja abstrakcyjnych bytów). Jak sam pisze: „to derywacja stanowi szkielet (ciała) dowodu" (Azzouni 2004: 95).

Azzouni oczywiście zdaje sobie sprawę, że matematycy w praktyce nigdy nie formalizują dowodów; co więcej, zaprezentowanie takiego sformalizowanego dowodu nie stanowiłoby na ogół żadnego poznawczego zysku z punktu widzenia konkretnej dyscypliny matematycznej. Specjalista od np. analizy zespolonej nie dowie się nic ciekawego, analizując sformalizowaną wersję dowodu jakiegokolwiek twierdzenia (i z jego punktu widzenia takie analizy byłyby wręcz stratą czasu). Ten fakt Azzouni bierze pod uwagę, jednak zarazem stara się uwzględnić postulat formalizmu, zgodnie z którym dowody mają charakter p o t e n c j a l n i e formalny. W świetle uwag dotyczących historycznej ewolucji rozumienia dowodu matematycznego, można powiedzieć, że Azzouni próbuje wyjaśnić ową ewolucję jako swoiste uświadamianie sobie przez społeczność matematyków tego, co leży u podstaw ich działań. Ten proces polega bowiem w gruncie rzeczy na odkrywaniu owego systemu algorytmicznego „w tle". Przedstawiana koncepcja stanowi więc próbę wyjaśnienia natury „mostu Hilberta", łączącego królestwo obiektów syntaktycznych z królestwem nieformalnego dyskursu matematycznego[17].

3. Koncepcja Azzouniego – dyskusja*

Zdaniem Azzouniego „w tle" każdego standardowego dowodu tkwi pewna derywacja w systemie formalnym. Jego koncepcja nie stanowi – moim zdaniem – dobrego wyjaśnienia natury matematycznej

* Opieram się tutaj na artykule Wójtowicz 2011b.

[17] Rav pisze o „moście Hilberta", który łączy formalne królestwo obiektów syntaktycznych z królestwem nieformalnego dyskursu matematycznego (Rav 1999: 31).

argumentacji i tę tezę staram się tu uzasadnić. Jest ona jednak dobrym punktem wyjścia do dyskusji dotyczącej różnych aspektów dowodu matematycznego.

3.1. Czym jest system algorytmiczny „w tle"?

Azzouni nie wyjaśnia, jak zidentyfikować system algorytmiczny leżący u podłoża interesującego nas dowodu. Stwierdza jedynie, że systemy algorytmiczne nie ograniczają się do żadnej konkretnej logiki ani języka, zaś jedyny istotny warunek to (potencjalna) mechaniczna rozpoznawalność dowodów – czymkolwiek by one nie były (Azzouni 2004: 86). Pojęcie algorytmu występuje – w luźnym sensie – w komunikacji potocznej (mówimy o algorytmie robienia ciasta albo strojenia gitary), jednak wymaga uściślenia. Jego matematyczny odpowiednik ma precyzyjny sens formalny: zgodnie z tezą Churcha adekwatnym ujęciem naszego intuicyjnego rozumienia obliczalności jest pojęcie obliczalności w sensie Turinga. Tak – jak sądzę – należy też rozumieć stanowisko Azzouniego. W przeciwnym wypadku trudno byłoby mówić o m e c h a n i c z n e j rozpoznawalności (lub trzeba byłoby przyjąć niestandardowe rozumienie pojęcia mechanicznej procedury)[18].

Pojawia się problem, na podstawie jakich kryteriów jest wybierany ów algorytmiczny system formalizujący nasze nieformalne (realne) dowody. Azzouni twierdzi, że panuje tutaj pełna dowolność: żądamy jedynie, aby istniał j a k i ś system algorytmiczny. Na jakiej jednak podstawie nasza „podświadomość matematyczna" rozpoznaje i wybiera odpowiedni system algorytmiczny, gwarantujący poprawność danego realnego dowodu? Problem rozpoczyna się już przy wyborze formalizacji – nie jest przecież prawdą, że uprawiana nieformalnie dziedzina matematyki w jednoznaczny sposób wyznacza taką formalizację. Można podać liczne przykłady historyczne – np. definicja ciągłości funkcji może być sformułowana bądź w ciągowej wersji Heinego, bądź epsilonowo-deltowej definicji

[18] W ostatnich latach toczy się ożywiona dyskusja na temat niestandardowego rozumienia pojęcia obliczenia, mówi się o obliczeniach analogowych, o hiperobliczeniach etc. Jednak w dyskusji dotyczącej koncepcji Azzouniego przyjmuję standardowe (turingowskie) rozumienie pojęcia algorytmu.

Cauchy'ego. Są one wprawdzie (przy pewnych dodatkowych założeniach) równoważne, ale przecież stanowią różne ujęcia pojęcia ciągłości. Liczba rzeczywista może być formalnie zrekonstruowana jako ciąg Cauchy'ego liczb wymiernych albo jako przekrój Dedekinda. Za podstawę teorii funkcji analitycznych można przyjąć bądź definicję w terminach równań Cauchy'ego–Riemanna, bądź różniczkowalności w sensie zespolonym, bądź w terminach rozwijalności funkcji w szereg potęgowy[19]. Wybór języka i pojęć pierwotnych jest więc kwestią pewnej decyzji. Zaś po ich ustaleniu możemy różnicować siłę aksjomatów przyjmowanych w danym formalnym systemie[20]. Droga do formalizacji nie jest więc wyznaczona jednoznacznie. Czy znaczy to, że gwarantem prawomocności dowodu jest istnienie j a k i e g o k o l w i e k dowodu formalnego „w tle", w ramach j a k i e j k o l w i e k formalizacji?[21]

Z faktem wielości możliwych ujęć formalnych wiąże się kolejny problem. Musimy przecież uznać, że dany system formalny S jest adekwatnym odpowiednikiem danego sytemu nieformalnego T[22]. Akceptacja danego systemu formalnego S, jako adekwatnie ujmują-

19 Ten przykład jest przedmiotem badań w pracy Mancosu (2001), która będzie dyskutowana w dalszej części rozdziału. Autor omawia tam jeszcze inne ujęcie teorii funkcji analitycznych, które zdaniem jego twórcy (Pringsheima) pozwala na lepsze i bardziej jednolite wyjaśnienie szeregu faktów matematycznych.

20 W zależności od tego, jak silne założenia przyjmiemy, dowód danego twierdzenia może okazać się prosty lub niezwykle trudny (w skrajnym przypadku, jeśli za aksjomat przyjmiemy dowodzone zdanie, dowód jest po prostu jednolinijkowy).

21 Przy liberalnym ujęciu moglibyśmy dokonywać też bardzo sztucznych formalizacji: np. każda linijka standardowego dowodu byłaby nowym symbolem, zaś w tabeli instrukcji zamieścilibyśmy warunek mówiący, że w określonym dowodzie po danym symbolu (będącym odpowiednikiem fragmentu standardowego dowodu) następuje kolejny symbol (będący odpowiednikiem innego fragmentu). Ponieważ znamy skończenie wiele dowodów, taka tabela byłaby skończona, a więc zadana w sposób efektywny. Po stworzeniu nowego dowodu tabela byłaby aktualizowana. Taka formalizacja – choć poprawna – byłaby jednak w oczywisty sposób nienaturalna.

22 Podobna sytuacja pojawia się lokalnie, gdy zastanawiamy się np., czy dana definicja formalna adekwatnie ujmuje pewne intuicyjne pojęcie (np. pojęcie ciągłości, prawdopodobieństwa, długości krzywej, pola figury, krzywizny powierzchni etc.).

cego nasze preformalne intuicje, wymaga odwołania się (na metapoziomie) do oceny relacji między naszą nieformalnie uprawianą matematyką a systemem sformalizowanym. Tutaj musimy posłużyć się jakimś kryterium, które już nie może mieć charakteru czysto formalnego. Problem odwołania do intuicji zostaje przeniesiony na wyższy poziom, ale jest nadal obecny[23]. Azzouni ma tego świadomość: pisze wyraźnie o tym, że ów system algorytmiczny jest wyspecyfikowany w sposób nieformalny. Przy formalizowaniu w nieuchronny sposób pojawia się więc element semantyczny: formalizujemy w taki sposób, aby odtworzyć sieć pojęć, zależności, aby z a c h o w a ć udowodnione nieformalnie twierdzenia! Posługując się terminologią Lakatosa, nasze nieformalnie udowodnione twierdzenia można uznać za falsyfikatory heurystyczne dla owego systemu algorytmicznego. Owe formalne systemy nie biorą się znikąd: wszak wymóg zachowania już istniejących wyników stanowi jedno z kryteriów uznania, że dana formalizacja jest adekwatna. Powstaje jednak błędne koło: owe systemy formalne mają niejako gwarantować prawomocność wiedzy uzyskanej nieformalnie, ale kryterium trafności formalizacji stanowi właśnie to, że jest ona takim gwarantem. Nie widać prostego wyjścia z tej sytuacji.

Kolejna wątpliwość dotyczy tego, czy faktycznie przyjęcie istnienia takich derywacji „w tle" wyjaśnia zgodność matematyków dotyczącą nieformalnych dowodów matematycznych. Mówiąc nieco żartobliwie, koncepcja Azzouniego jest czymś w rodzaju psychoanalizy matematycznej. Sam jej autor oczywiście zdaje sobie sprawę z faktu, że matematycy nie przeprowadzają dowodów formalnych i że przedmiotem analizy filozoficznej winny być realne dowody. Zarazem jednak status owych realnych dowodów jest wyjaśniany przez wprowadzenie hipotezy o istnieniu pewnych idealnych, algorytmicznych dowodów „w tle", których obecności matematyk nie musi sobie nawet uświadamiać. Dowody idealne mają więc charakter obiektów teoretycznych, których istnienie Azzouni postuluje, aby wyjaśnić zgodność

[23] Można tutaj puścić wodze fantazji, twierdząc, że nasze decyzje dotyczące adekwatności formalizacji nieformalnego systemu T przez system S reguluje pewien algorytmiczny metasystem i tak dalej. Takie ujęcie niewiele wnosi, bo popadamy w regres.

matematyków co do dowodów realnych. Danymi doświadczalnymi są tu obserwacje dotyczące zgodności matematyków, postulowane byty teoretyczne to idealne dowody, zaś prawa pomostowe dotyczą powiązań między owymi idealnymi a realnymi dowodami. Azzouni nie wyjaśnia jednak, jakiego typu relacja miałaby tutaj zachodzić. Czy chodzi o jakąś wyidealizowaną, niejako czysto ontologiczną zależność, czy też o zależność istotną kognitywnie? Czy derywacja ma pełnić jedynie funkcję swoistego uprawdziwiacza (*truth-makera*) twierdzenia, czy też ma mieć jakieś funkcje poznawcze?

Jeśli uznamy, że istnienie takiej derywacji stanowi jedynie warunek prawdziwości twierdzenia matematycznego, to znajdziemy się w sytuacji podobnej do sytuacji platonika. Twierdzi on (zgodnie z klasycznym rozumieniem prawdy), że warunki prawdziwości zdań matematycznych są zadane przez konfiguracje abstrakcyjnych bytów. Stanowisko takie jest oczywiście nie do zaakceptowania dla antyrealisty (a Azzouni deklaruje właśnie takie stanowisko). Jednak uznanie, że owymi *truth-maker*'ami dla twierdzeń matematycznych są jakieś hipotetyczne, niedostępne poznawczo derywacje w formalnych systemach, różni się od stanowiska platonizmu jedynie werbalnie. Można byłoby próbować uchylić ten zarzut, twierdząc, że nie myślimy o a k t u a l n y m, a jedynie o p o t e n c j a l n y m istnieniu takich derywacji. Jednak eliminacja założeń platonistycznych przez wprowadzenie kategorii owych potencjalnych derywacji formalnych jedynie przerzucałaby „koszty ontologiczne" w inne miejsce[24]. Uznanie, że owe derywacje pełnią tylko taką funkcję, byłoby więc bardzo nienaturalne.

Dochodzimy zatem do problemu poznawczej roli dowodów matematycznych, w szczególności owych derywacji formalnych. Uzna-

[24] Zauważmy na marginesie, że taki problem dotyczy wielu koncepcji antyrealistycznych. Eliminacja platonistycznej ontologii jest dokonywana np. przez wprowadzenie kategorii modalnych i przyjęcie pewnych założeń dotyczących możliwości (tak czynią np. Chihara i Hellman, por.: Chihara 1990, Hellman 1989), przez wprowadzenie kategorii Idealnego Podmiotu (Kitcher), przez uznanie pewnych pojęć semantycznych za pierwotne etc. Zawsze mamy tutaj do czynienia z podobną sytuacją: nieuniknione koszty pojawiają się w innym miejscu.

nie, że nie pełnią one żadnej funkcji poznawczej, byłoby nietrafne. Nie wiadomo jednak, jaka to ma być rola, skoro matematycy zazwyczaj nie zastanawiają się nad tym, czy taka formalizacja jest możliwa (co nie przeszkadza im tworzyć, rozumieć i oceniać dowody). Zagadnienie to jest przedmiotem dyskusji w następnym paragrafie.

3.2. Poznawcza dostępność dowodów

Choć dowody matematyczne są (jak sądzimy) potencjalnie formalizowalne, na ogół dokonanie takiej formalizacji nie stanowi poznawczego zysku z punktu widzenia specjalisty w danej dziedzinie. Jest wręcz na odwrót: w wersji sformalizowanej nie widać idei dowodu, kluczowych technik i pojęć, zasadniczych pomysłów etc. Można nawet powiedzieć (z niewielką chyba przesadą), że matematyk zapytany o poprawną w sensie logicznym – czyli sformalizowaną – wersję prezentowanego przezeń dowodu nowego wyniku matematycznego odpowie, że to nie ma żadnego znaczenia z punktu widzenia jego badań. To, jak wygląda formalna rekonstrukcja dowodu dotyczącego np. topologii czy geometrii różniczkowej, nie jest istotne z punktu widzenia lepszego zrozumienia danego zagadnienia topologicznego czy geometrycznego. Źródłem tego rozumienia są bowiem pewne treści matematyczne, relacje między pewnymi pojęciami, ideami, a nie formalna reprezentacja. Realne dowody zawierają skróty, są w nich wykorzystywane diagramy[25], pojawiają się zwroty typu „jak łatwo zobaczyć” albo „w oczywisty sposób teza wynika z twierdzenia α” etc., co w żadnej mierze nie zmniejsza ich komunikatywności – wprost przeciwnie.

Sytuacja jest więc następująca: oto okazuje się, że to, co ponoć czyni dowód nieformalny prawomocnym sposobem argumentacji (czyli owa algorytmiczna derywacja „w tle”) nie ma żadnego znaczenia poznawczego – przynajmniej na poziomie świadomych ak-

---

[25] W swej pracy Brown analizuje rolę rysunków w dowodach matematycznych, stawiając tezę, iż (niektóre) dowody czysto rysunkowe można uznać za pełnoprawne dowody matematyczne (Brown 1999). Uważam ją za przesadną, jednak trudno zanegować fakt, że często odpowiedni szkic może (z p o z n a w c z e g o punktu widzenia) zastąpić formalny dowód – przekazuje idee w sposób dostatecznie jasny, aby dalsza argumentacja stała się zbędna.

tów matematyka. Jaką więc rolę odgrywa? Jak się wydaje, jedynym wyjaśnieniem byłoby uznanie, że nasze świadome akty intelektualne (dotyczące matematyki) są emergentne w stosunku do pewnych formalnych przebiegów obliczeniowych „w tle". Wprawdzie możemy nie zdawać sobie z tego sprawy, jednak źródłem naszego przekonania dotyczącego poprawności danego dowodu semantycznego jest właśnie istnienie odpowiedniej derywacji formalnej. Byłaby to więc swoista teza komputacjonizmu w filozofii umysłu (czy mówiąc nieco mniej dobitnie: teza komputacjonizmu odniesiona do matematyzującego umysłu – aby przyjąć koncepcję Azzouniego nie musimy być komputacjonistami *en bloc*). Azzouni twierdzi, że przypomina to sytuację użytkownika języka naturalnego, który również nie uświadamia sobie reguł rządzących językiem, a jednak sprawnie się nim posługuje. Znajomość reguł algorytmicznych „w tle" nie jest więc konieczna do tego, aby na powierzchni tworzyć dowody. Owo odwołanie do systemu algorytmicznego „w tle" nie ma przy tym sztywnego charakteru, bowiem matematycy mogą odnosić się do coraz to bogatszych systemów[26]. Azzouni postuluje istnienie czegoś w rodzaju uniwersalnej „gramatyki rozumowań", z której (być może) nie zdają sobie sprawy matematycy. Wyjaśnia ona, iż u podłoża akceptacji argumentów matematycznych leżą pewne procesy algorytmiczne „w tle"[27].

[26] W naturalny sposób pojawia się pytanie, czy nie powstaje tutaj możliwość wyjścia poza działania algorytmiczne (w sensie turingowskim): skoro Azzouni twierdzi, że matematyk w swobodny sposób wybiera ów algorytmiczny system, to wprawdzie w każdej chwili działa niejako lokalnie w ramach określonego systemu algorytmicznego, ale sam akt wyboru określonego systemu nie musi mieć charakteru algorytmicznego. Nieodparcie nasuwają się skojarzenia z uwagami Gödla dotyczącymi rozwoju naszej intuicji: „Turing ignoruje fakt, że umysł n i e j e s t s t a t y c z n y, l e c z w c i ą ż s i ę r o z w i j a – tj. rozumiemy terminy abstrakcyjne coraz lepiej, w miarę jak się nimi posługujemy – i że w sferę naszego rozumienia wkracza coraz więcej terminów abstrakcyjnych... A zatem, pomimo iż na każdym poziomie ilość i precyzja używanych terminów abstrakcyjnych mogą być skończone, obie [te wielkości – przyp. K. W.] (a zatem także Turingowska liczba odróżnialnych stanów umysłu) mogą być rozbieżne do nieskończoności..." (Gödel 1972, uwaga 3: 306).

[27] Rav zwraca uwagę na fakt, że propozycja Azzouniego lokalizuje uzasadnienie dla twierdzeń matematycznych właśnie po owej syntaktycznej stronie (tzn.:

W takiej sytuacji należałoby więc uznać, że przyjęcie założenia o istnieniu formalnych derywacji może wyjaśniać mechanizmy poznania matematycznego w podobny sposób, w jaki neurofizjologia wykłada mechanizmy poznawcze. Nie mamy świadomego dostępu do naszych przebiegów neurofizjologicznych, ale to one leżą u podłoża naszej świadomości (choć nie znamy dobrze natury zależności między treściami świadomości a procesami neurofizjologicznymi). Podobnie musiałoby być w przypadku owych formalnych derywacji – one miałyby wyjaśniać zjawiska związane z dowodzeniem. Należałoby więc uznać, że np. matematycy XIX-wieczni akceptowali pewne dowody, gdyż z u p e ł n i e n i e ś w i a d o m i e odwoływali się do jakichś (bliżej niesprecyzowanych) systemów algorytmicznych, tkwiących w ich „matematycznej podświadomości"[28]. Wynikałoby stąd, że historia matematyki to w szczególności historia odkrywania przez matematyków prawdziwych motywów ich działań: pewnej leżącej u podłoża ich świadomej aktywności rodziny systemów algo-

---

uzasadnieniem dla naszej akceptacji dowodów matematycznych ma być właśnie istnienie owej derywacji). Rav zarzuca Azzouniemu, iż jego teza o istnieniu owych derywacji „w tle" jest gołosłowna: nie wskazał żadnych konkretnych przykładów tego, w jaki sposób owe „szkice dowodów" (gdyż dowody realne są swoistymi „szkicami") prowadzą do owych prawdziwych dowodów „w tle" (derywacji). W artykule Rav poddaje analizie przykład dowodu twierdzenia Cantora o nieprzeliczalności zbioru liczb rzeczywistych (Rav 2007: 313–314), twierdząc, iż wyjaśnienie tego, jak „działa" ów dowód w terminach koncepcji Azzouniego jest po prostu niemożliwe.

[28] Pojawia się więc pytanie, jaki jest status dowodów matematycznych z np. XIX wieku. Nie były one oczywiście sformalizowane, zaś sama idea systemu formalnego i dowodu formalnego (we współczesnym rozumieniu) dopiero się rodziła. Barwise pisze, iż „pomysł, aby rozumowanie mogło zostać w jakiś sposób zredukowane do postaci czysto syntaktycznej w pewnym formalnym, sztucznie skonstruowanym języku jest stosunkowo nowym pomysłem w historii matematyki. Wyrasta z programu Hilberta. Dowody matematyczne istniały przez tysiące lat zanim pojawili się logicy i zmatematyzowali to pojęcie [...]. O żadnym systemie nie można powiedzieć, że to właśnie on j e s t tym rzeczywistym pojęciem dowodu, ponieważ istnieją niekończące się warianty [...]. One wszystkie nie mogą być rzeczywistym pojęciem dowodu [...]; istnieją dobre dowody, które nie są modelowane w żadnym współczesnym systemie dedukcyjnym" (Barwise 1989; cyt. za: Rav 2007: 302).

rytmicznych[29]. Tak jest również teraz, przy czym my ową kategorię już znamy (podobnie jak psychologowie znają już pojęcie neuronu).

Jeśli przyjmiemy taką perspektywę – znaczy to, że owe przebiegi formalne „w tle" muszą mieć charakter przebiegów neurofizjologicznych. W przeciwnym razie musielibyśmy uznać, iż gwarantem prawomocności dowodów semantycznych byłyby niezwiązane z poznającym podmiotem derywacje formalne, z którymi nie musimy mieć poznawczego kontaktu. Pojawia się jednak problem dotyczący implementacji owych przebiegów obliczeniowych na naszej „biologicznej maszynie" bowiem niektóre dowody w wersji sformalizowanej mogą mieć ogromną długość. Co wtedy?

Pouczający jest przykład podany przez Boolosa (1987). Autor poddaje tam analizie pewne wnioskowanie, sformułowane w języku pierwszego rzędu. Mamy tam: stałą 1; jednoargumentowy symbol funkcyjny *s*; dwuargumentowy symbol funkcyjny *f*, jednoargumentowy predykat *D*. Założenia to:

1. $\forall n\, f(n,1)=s1$;
2. $\forall x\, f(1,sx) = ssf(1,x)$;
3. $\forall n \forall x\, f(sn,sx) = f(n,f(sn,x))$;
4. $D(1)$;
5. $\forall x(D(x) \rightarrow D(sx))$.

WNIOSEK: $D(f(ssss1,ssss1))$.

Intuicyjnie rzecz biorąc, wnioskowanie dotyczy liczb naturalnych: *s* to następnik, *f* to funkcja określona na parach liczb naturalnych, *D* jest własnością (która może przysługiwać liczbom naturalnym). Wniosek głosi, że liczba będąca wartością funkcji *f* dla argumentów (5,5) ma własność *D*.

Jednak dowód tego faktu w formalizmie pierwszego rzędu jest bardzo długi. Funkcja $f(x,y)$ rośnie bardzo szybko, w stylu funkcji Ackermanna. Wartość $f(4,4)$ stanowi „wieżę" potęg dwójki. Dowód tożsamości $D(f(5,5))$ jest astronomicznej długości. Zarazem jed-

[29] Rav podaje przykłady matematyków babilońskich, greckich czy indyjskich (Rav 2007). W ich przypadku procedury dowodowe mogły mieć (choć na ogół tego nie wiemy) zupełnie inny charakter niż nasze: mogli na przykład opierać się na pewnych empirycznie przetestowanych regułach. Czy tu również mamy do czynienia z dowodami, u podłoża których leżą systemy algorytmiczne?

nak dowód w logice drugiego rzędu jest elementarny[30]. Mamy tu do czynienia z ciekawą sytuacją: formalny dowód jest absolutnie poza naszym zasięgiem (i również poza zasięgiem nawet najszybszego komputera), natomiast z naszego punktu widzenia dowód w logice drugiego rzędu jest przekonujący i wystarczający. A zatem sam dowód – co do zasady – jest algorytmizowalny, ale dla nas owa algorytmiczna wersja jest całkowicie niedostępna. Boolos twierdzi, że fakt, iż z taką łatwością umiemy faktycznie udowodnić to twierdzenie, świadczy o tym, że żaden system logiczny pierwszego rzędu nie stanowi dobrej idealizacji naszych rzeczywistych (psychologicznych) procesów wnioskowań (Boolos 1987). Wydaje się bowiem, że nawet zdolność do rozpoznawania pewnych zdań pierwszego rzędu jako prawdziwych wniosków odwołuje się do czegoś więcej niż tylko formalizacja w języku pierwszego rzędu, więc *de facto* sięgamy do zasobów poznawczych wykraczających poza logikę pierwszego rzędu i do przekonań o charakterze *par excellence* semantycznym[31].

---

30 Zjawisko, iż dowód w jednym systemie może być tak astronomicznej długości, zaś w innym może być krótki, jest znane od dawna. Często twierdzenia o takiej własności mają charakter sztuczny, jednak niekiedy są to zwykłe, standardowe twierdzenia matematyczne. Dowody poznawczo niedostępne stają się proste, ale za cenę przyjęcia pewnych silniejszych założeń (np. ZFC zamiast PA). W przypadku wnioskowania podanego przez Boolosa, ową ceną za zdobycie wiedzy, iż zachodzi $D(f(5,5))$ jest przyjęcie pewnych założeń na temat logiki drugiego rzędu. Pewną analogią tej sytuacji jest przypadek twierdzenia Kruskala, dotyczącego drzew (czyli pewnego typu grafów). Twierdzenie to jest niezależne od PA, chociaż dowodliwe w ramach np. ZFC. Poszczególne instancje tego twierdzenia (mówiąc w uproszczeniu: kiedy jeden z parametrów jest ustalony) są dowodliwe w PA, ale dowody te bywają astronomicznej długości ($2^{2\cdots2}$ – wieża potęg dwójki o wysokości ponad 1000, por. np. Simpson 1987). Jest oczywiste, że nie możemy mieć dostępu poznawczego do tej sformalizowanej w PA wersji owej instancji twierdzenia Kruskala, więc musimy odwołać się do teorii silniejszej. Fakt, że przejście do silniejszych logik pozwala na skrócenie (niektórych) dowodów jest nienowy, dotyczy tego np. klasyczna praca Gödla (1936).

31 Ciekawą w tym kontekście tezę stawia Isaacson (1987). Jego rozważania odnoszą się do niezależnych od PA zdań arytmetycznych (takich jak np. zdanie Parisa–Harringtona czy Parisa–Kirby'ego). Według Isaacsona, takie zdania w gruncie rzeczy odwołują się do pojęć wyższych rzędów i do takich pojęć musi odwoływać się także nasza nieformalna ocena prawdziwości tych (i innych) zdań niezależnych od PA.

Nie wiadomo, jak wyjaśnić przykład Boolosa z punktu widzenia koncepcji Azzouniego. Wszak ów algorytmiczny, formalny dowód w logice pierwszego rzędu jest całkowicie poza naszym zasięgiem[32]. Tym samym twierdzenie, że u podłoża naszej akceptacji zwykłego dowodu leży taka derywacja, jest gołosłowne. Wyjaśnienie, iż w tle naszej zdolności do rozpoznawania inferencji drugiego rzędu tkwi system algorytmiczny (w którym dowód jest zbyt długi z punktu widzenia czasu naszego życia, a może i nawet wieku Wszechświata), jest absolutnie niewiarygodne poznawczo[33].

3.3. Problem wyjaśniania

Ujęcie Azzouniego zachęca do analizy problemu wyjaśniania w matematyce. Kwestię tę szeroko dyskutuje się w odniesieniu do nauk empirycznych, natomiast w przypadku matematyki jest ona podejmowana sporadycznie. Jednak matematycy stawiają sobie pytanie dotyczące przyczyn zachodzenia pewnego stanu rzeczy, głębokich powodów tego, że dane twierdzenie jest prawdziwe. Nie mają przy tym na myśli samego istnienia dowodu, ale coś więcej: samo zaprezentowanie dowodu formalnego nie jest wystarczające.

---

32 Jest oczywiście poza zasięgiem naszych świadomych aktów, ale też poza zasięgiem „biologicznej maszyny", w której implementowane miałyby być owe derywacje. Tutaj dotykamy jednak subtelnej kwestii: być może działanie naszego mózgu (umysłu) realizuje pewne niealgorytmiczne procesy. Być może również nasz umysł może wykonywać działania o złożoności 2^{1000} (to może być np. produktem obecności efektów kwantowych). Te rozważania mają jednak spekulatywny charakter i wykraczają poza samą analizę koncepcji Azzouniego. Z punktu widzenia jego (naturalistycznej) koncepcji, powinniśmy – jak sądzę – uznać, że nasz mózg po prostu dokonuje pewnych obliczeń.

33 Ciekawe przykłady wnioskowań podobnych do wnioskowania Boolosa podaje też Ketland (2005). Rozważa tam wnioskowania, które są oczywiste z punktu widzenia standardów matematycznej argumentacji, natomiast dowody formalne w logice pierwszego rzędu byłyby zbyt długie, aby mogły być zastosowane jako środek inferencyjny. Dodajmy na marginesie, że Ketland formułuje swoje argumenty w kontekście dyskusji na temat nominalistycznej rekonstrukcji matematyki, twierdząc, iż istnienie tego typu wnioskowań stanowi problem dla nominalisty: nie jest on bowiem w stanie wyjaśnić w ramach czysto nominalistycznej „maszynerii", że pewne skądinąd oczywiste wnioskowania są faktycznie poprawne.

Powyższe uwagi mają charakter szkicowy, zaś szersza analiza problemu wyjaśniania w matematyce znajduje się w dalszej części rozdziału (w kontekście istnienia dowodów komputerowych – w opinii niektórych matematyków takie dowody, w szczególności najbardziej znany i najszerzej dyskutowany dowód twierdzenia o czterech barwach, pozostawiają poczucie niedosytu)[34], a także w kolejnych partiach książki.

3.4. Konsekwencja semantyczna a syntaktyczna

Przy analizie koncepcji Azzouniego istotna staje się różnica między konsekwencją syntaktyczną i semantyczną. Ustalając, czy α jest konsekwencją syntaktyczną, musimy mieć do dyspozycji pewien zdefiniowany zbiór reguł i wskazać stosowny ciąg formuł (stosowną derywację) formuły α w ramach aparatu dedukcyjnego. Jeśli tak jest, to sformułowany przez Azzouniego warunek algorytmicznej sprawdzalności jest spełniony.

Sprawa nie przedstawia się jednak tak prosto w wypadku konsekwencji semantycznej, bowiem w tej definicji jest mowa o klasie wszystkich modeli dla interesującej nas teorii T. Jak wiadomo na mocy twierdzenia o pełności, w przypadku logiki pierwszego rzędu istnienie dowodu formalnego zdania α w teorii T jest równoważne faktowi, że zdanie α jest prawdziwe we wszystkich modelach dla T (mówiąc krócej: konsekwencja semantyczna i syntaktyczna są w przypadku logiki pierwszego rzędu tożsame). W kontekście teorii pierwszego rzędu możemy zatem (odwołując się do twierdzenia o pełności) przyjąć tezę, iż semantyczne argumenty (odwołujące się do naszego rozumienia tego, czym są modele dla T) mają swoje odpowiedniki w postaci formalnych derywacji. Jednak na ogół nie jest dostępna żadna efektywna procedura, która umożliwiałaby „przejrzenie" owych modeli dla T i sprawdzenie, czy faktycznie tam dowodzone przez nas zdanie α okaże się prawdziwym. Co więcej, sama znajomość faktu, iż α jest konsekwencją semantyczną teorii T, nie

---

[34] Niektórzy konstatują wręcz, że taki dowód w ogóle nie wyjaśnia przyczyn prawdziwości twierdzenia o czterech barwach i nie zasługuje na miano pełnoprawnego dowodu matematycznego (tego typu krytyczne uwagi przytacza np. Rota 1997).

prowadzi nas na ogół w efektywny sposób do znalezienia owej żądanej derywacji formuły α w teorii T.

Jednak zgodnie z koncepcją Azzouniego powinniśmy uznać, iż fakt, że uzasadniliśmy, iż α jest semantyczną konsekwencją T (a to jest typ rozumowania, jaki często stosujemy), stanowi zarazem – w świetle pełności logiki pierwszego rzędu – argument na rzecz istnienia owej derywacji formalnej gdzieś „w tle" i to właśnie ona stanowi argument na rzecz poprawności naszego rozumowania[35]. Uważam taki sposób argumentacji za bardzo odległy od praktyki: dlaczego nasza zgoda na to, że w każdym modelu dla T jest prawdziwe zdanie α (są tu użyte sformułowania *par excellence* semantyczne) miałaby wynikać z faktu istnienia pewnej formalnej derywacji α z T? Czy matematyk faktycznie godzi się, że zdanie α jest prawdziwe w strukturach pewnego typu (modelach dla T), ponieważ gdzieś „w tle" majaczy formalny dowód (derywacja) α w oparciu o T? Jest to teza pozbawiona podstaw i z całą pewnością nie odpowiada praktyce matematycznej[36]. U jej podłoża leży owa „matematyczna psychoanaliza", o której wspomniałem wcześniej: matematyk wierzy w to, że we wszystkich strukturach opisanych przez T jest prawdziwe zdanie α, ponieważ w podświadomości ma formalną derywację α z aksjomatów T oraz twierdzenie o pełności. Taka

[35] Oczywiście argumenty teoriomodelowe też można sformalizować, jednak na pewnym poziomie staniemy wobec konieczności odwołania się do intuicyjnego, preteoretycznego rozumienia pewnych pojęć i akceptacji określonych faktów jako danych. A semantyka teoriomodelowa ma przecież formalizować pewne intuicje semantyczne i to one są pierwotne, a nie ich formalny odpowiednik.

[36] Rozważmy – jako *toy example* – przykład konsekwencji na poziomie rachunku zdań. Możemy za pomocą metody zerojedynkowej sprawdzić, że dana formuła KRZ jest konsekwencją danego zbioru zdań KRZ. Nie znaczy to przecież, że wiemy, jak wygląda formalna derywacja; co więcej, możemy nawet nie zdawać sobie sprawy z tego, że dla KRZ obowiązuje twierdzenie o pełności i że nasz argument semantyczny ma odpowiednik w postaci formalnej derywacji. Jeszcze wyraźniej widać to w przypadku logiki pierwszego rzędu: możemy sformułować czysto semantyczny argument (odwołując się do własności klas modeli dla pewnej teorii T), aby uzasadnić, że pewne zdanie α wynika z teorii T. Ale ten sposób argumentacji nie ma nic wspólnego z istnieniem owej formalnej derywacji. Gdyby nawet dla logiki pierwszego rzędu nie obowiązywało twierdzenie o pełności, nasz argument semantyczny pozostawałby w mocy.

teza jest karkołomna. Co więcej, nawet gdybyśmy ową (karkołomną) tezę zaakceptowali dla teorii matematycznych sformułowanych w języku pierwszego rzędu, to na placu boju pozostaje przypadek teorii sformułowanych w językach, dla których nie zachodzi twierdzenie o pełności. Najprostszy przykład to logika drugiego rzędu[37]. Konsekwencja semantyczna jest w przypadku logiki drugiego rzędu pojęciem silniejszym niż konsekwencja syntaktyczna: istnieją takie semantyczne konsekwencje teorii T, dla których nie można wskazać formalnego dowodu. Pojawia się pytanie, do którego typu konsekwencji odwołuje się w naturalny sposób matematyk w trakcie uzasadniania twierdzeń. Twierdzę, że jest to konsekwencja semantyczna i że to ona stanowi podstawowy, pierwotny dla dowodów matematycznych typ konsekwencji[38]. Dzieje się tak po prostu dlatego, że uprawiając matematykę, myślimy o dowodzeniu tez o pewnych obiektach, a nie o przekształcaniu symbolicznych napisów w oderwaniu od ich interpretacji. Jednak w takiej sytuacji nie ma żadnego sensu powoływanie się na istnienie formalnej derywacji „w tle", bo istnienie takiej derywacji po prostu nie jest pewne. W jaki zatem sposób mielibyśmy wytłumaczyć sytuację, w której matematycy prowadzą rozumowania, odwołując się w ich ramach do faktów o czysto semantycznym charakterze? Nie przekonuje wyjaśnienie (które by-

---

37 Pamiętajmy o przykładzie Boolosa, który dotyczy właśnie logiki drugiego rzędu.

38 Takie postawienie sprawy będzie oczywiście sprzeczne np. z tezą o logice pierwszego rzędu Quine'a, zgodnie z którą niejako kanoniczną jest logika pierwszego rzędu (teza ta wiąże się w naturalny sposób z koncepcją zobowiązań ontologicznych, w ramach której jest konieczne podanie klarownego systemu identyfikacji ontologii danej teorii). Jednak w ostatnich latach toczy się dyskusja dotycząca zasadności tej tezy. Barwise twierdzi np., że teza o logice pierwszego rzędu opiera się na nieporozumieniu, myli bowiem cel i przedmiot logiki z jednym z jej narzędzi: logika elementarna jest po prostu jednym z wielu narzędzi stosowanych do analizy rozumowań matematycznych i jej status nie jest wyróżniony. W praktyce naukowej (w szczególności matematycznej) istotne są kryteria wygody i efektywności opisu, a nie zgodność z filozoficznymi przedzałożeniami. Zdaniem Barwise'a teza o logice pierwszego rzędu winna być odrzucona (por. Barwise 1985). Podobne jest stanowisko Shapiro (Shapiro 1985, 1991). Autor zdecydowanie opowiada się za uznaniem logiki drugiego rzędu za „legalną" logikę. Barwise, Shapiro czy również Sher (Sher 1991) są zwolennikami szerokiego rozumienia pojęcia logiki (por. też dyskusję w: Tharp 1975, Resnik 1988, Jane 1993).

łoby – jak sądzę – sformułowane w duchu Azzouniego), iż owe rozumowania można sformalizować w pewnej metateorii, „w tle" której mamy derywacje. Prowadzi to bowiem do regresu: w pewnym momencie jest konieczne odwołanie się do intuicyjnej identyfikacji dowodu realnego z danym dowodem formalnym. I cały problem powraca na nowym poziomie.

4. Problem mechanizacji dowodów

Koncepcja Azzouniego stanowi próbę wyjaśnienia natury dowodzenia matematycznego w oparciu o kategorię formalnych derywacji. Pojawia się pytanie, czy ma ona jednak jakąś reprezentację w praktyce matematycznej. Sądzę, że – w pewnym sensie – o takiej reprezentacji możemy mówić przynajmniej od momentu pojawienia się dowodów komputerowych. Nie ulega bowiem wątpliwości, że mają one charakter formalny (w tym sensie, że obliczenie komputera stanowi ciąg czysto formalnych operacji przeprowadzonych zgodnie z określoną syntaktycznie specyfikacją). Działanie komputera stanowi pewne obliczenie, a więc jedno z pierwszych pytań, na jakie powinniśmy odpowiedzieć przy okazji analizy dowodów komputerowych to: co nazywamy obliczeniem? Niewątpliwie część rozumowań matematycznych (np. mnożenie wyrażeń algebraicznych czy sprawdzanie tautologiczności formuły rachunku zdań) ma charakter operacji, które intuicyjnie określimy jako mechaniczne. W naturalny sposób nasuwają się kwestie: jaki jest zasięg takiej potencjalnej mechanizacji rozumowań matematycznych i jakie dokładnie operacje będziemy uznawać za obliczeniowe (mechaniczne, zalgorytmizowane)?

Dyskusja dotycząca możliwości mechanizacji rozumowań ma długą historię, zaś pierwsze fizyczne urządzenia, które mogły być zastosowane do rozwiązywania problemów, konstruowano już w wieku XIX (np. maszyna różnicowa Babbage'a z roku 1822; model maszyny analitycznej czy analizator różniczkowy opisany przez Thomsona – 1876). Przedstawienie ich dziejów stanowi tematykę tak bogatą, że zdecydowanie wykracza to poza ramy niniejszej pracy, zasługując na oddzielne ujęcie[39]. Niezależnie jednak od historii pojęcia obliczenia, z pewnością mamy intuicyjne (choć niezbyt ścisłe) rozumienie tego terminu: obliczeniem nazwiemy precyzyjnie opisany za pomocą stosownego algorytmu zestaw czynności. Pojawia się natychmiast problem, jaka jest klasa owych elementarnych czynności i czym są te „atomowe kroki", z których będziemy tworzyć procedury obliczeniowe[40]. Rozstrzygnięcie tego problemu oczywiście determinuje to, jakie procedury uznamy za mechaniczne[41].

Współcześnie dominującym ujęciem jest turingowskie ujęcie obliczenia. Odwołuje się ono do działania pewnego wyidealizowanego urządzenia mechanicznego. Pierwowzorem dla niego jest pracowity urzędnik (*dilligent clerk*), który wykonuje mechaniczne czynności,

---

[39] Prezentację w szerokim kontekście historycznym Czytelnik znajdzie np. w pracy Marciszewski, Murawski 1995; zwięzłe omówienie dotyczące głównie XX-wiecznych prób konstruktorskich zawiera np. Copeland 2008. Istnieje też szereg stron internetowych poświęconych tego typu tematyce, np. http://www.alanturing.net/. Uznałem, iż nie jest tutaj potrzebne prezentowanie drobnych wyimków historycznych w sytuacji, gdy na pełniejszą prezentację nie ma miejsca.

[40] Urządzenie służące do wyznaczenia środka ciężkości (tj. sznurek) jest znane znacznie dłużej niż maszyny mechaniczne czy urządzenia elektroniczne. W tym sensie można więc powiedzieć, że urządzenia służące do wykonywania zadań zalgorytmizowanych w szerokim sensie tego słowa są znane od czasów starożytnych. Ciekawy przykład wykorzystania „linowego komputera" przez Gaudiego opisuje Aharonov (1998). Przy projektowaniu La Sagrada Familia w Barcelonie Gaudi posłużył się następującą metodą: wziął zestaw lin (o długościach odpowiadających planowanym łukom), połączył je w odpowiedni sposób i zawiesił na suficie, otrzymując w ten sposób lustrzane odbicie projektowanego przez siebie kościoła. Matematyczne rozwiązanie bardzo złożonego układu równań nie było możliwe ze względu na stopień komplikacji, jednak przy użyciu „linowego komputera" było ono natychmiastowe. Więcej uwag na temat problemu zakresu terminu „obliczenie" zawiera rozdział piąty.

[41] O rozkładzie rozumowania na elementarne składniki pisał np. Kartezjusz. Z jego punktu widzenia akceptacja owych kroków polega na jasnym i wyraźnym dostrzeganiu, iż konkluzja jest prawdziwa na mocy przesłanek (por. rozdział pierwszy niniejszej książki). Przy takim rozumieniu owych elementarnych kroków każde wnioskowanie, co do którego mamy pewność, iż jest poprawne, można byłoby uznać za rozumowanie – w bardzo szerokim sensie – zalgorytmizowane. Jest jednak jasne, że nie o to nam chodzi. Wszak kiedy mówimy o mechanizacji rozumowań, to owe kroki winniśmy móc wykonać w sposób mechaniczny, czyli bezrefleksyjny.

działając ściśle według instrukcji – nie odwołując się do swoich intuicji, interpretacji znaczeń czy wglądu w sens wykonywanych przez siebie czynności. Jest to zatem swoisty ludzki komputer[42]. Owe mechaniczne czynności możemy wyobrażać sobie po prostu jako dokonywanie pewnych obliczeń na papierze.

Analizując własności takiego ludzkiego komputera, Turing zauważa, że ma on jedynie skończenie wiele stanów wewnętrznych i rozpoznaje jedynie skończenie wiele symboli, ową symboliczną kartkę traktujemy jako potencjalnie nieskończoną, zaś działanie ludzkiego komputera ma charakter lokalny (Turing 1936: 249). Stanowi to wstęp do zdefiniowania formalnego modelu obliczenia w postaci maszyny Turinga[43]. Pojawia się naturalne pytanie, jaka jest relacja między tak rozumianym pojęciem obliczalności a naszym rozumieniem intuicyjnym. Teza Churcha głosi, że definicja Turinga stanowi adekwatną formalizację intuicyjnego pojęcia obliczalności. Wokół tego stwierdzenia toczy się wciąż żywa dyskusja, zaś inspiracją dla niej są m.in. pojawiające się niestandardowe modele obliczeń (analizuję je w rozdziale piątym)[44]. Jednak niezależnie od statusu tezy Churcha, model Turinga ma fundamentalne znaczenie z punktu wi-

---

42 W literaturze niekiedy pojawia się termin „komputor”, aby podkreślić ową mechaniczność działań. Tu pozostanę przy tradycyjnym „komputer”, także w odniesieniu do człowieka wykonującego mechaniczne czynności.

43 Maszynę Turinga można wyobrażać sobie jako mechaniczne urządzenie, które składa się z trzech podstawowych części: (1) jednostki sterującej (która zawsze jest w jednym ze skończenie wielu stanów wewnętrznych); (2) taśmy (potencjalnie nieskończonej), podzielonej na komórki, na której są zapisywane symbole; (3) głowicy, która potrafi odczytać z taśmy symbol i wpisać na taśmę symbol. Elementarna operacja maszyny Turinga polega na odczytaniu z danej komórki taśmy symbolu, a następnie – w zależności od tego, jaki to symbol i w jakim stanie wewnętrznym jest maszyna – zmianie stanu wewnętrznego, wpisaniu na taśmę symbolu i ruchu głowicą w lewo lub w prawo. Działanie maszyny Turinga polega na wykonywaniu kolejnych elementarnych kroków tej postaci, aż do zatrzymania się maszyny – jeśli takowe nastąpi – lub w nieskończoność (wtedy mówimy o zapętleniu się maszyny Turinga). Istnieją też inne modele obliczeń równoważne modelowi Turinga. Nie jest to istotne dla naszej dyskusji, dla której najbardziej naturalne będzie ujęcie w terminach maszyn Turinga.

44 Coraz częściej w dyskusjach zwraca się uwagę na fakt, że pojęcie obliczenia ma także swój aspekt fizyczny, a nie tylko logiczny. O tym problemie (jak również o innych modelach obliczeń) piszę także w rozdziale czwartym.

dzenia dyskusji statusu dowodów komputerowych. Działanie maszyny Turinga stanowi bowiem teoretyczny model działania komputera. Przebieg obliczenia komputerowego będziemy utożsamiać z odpowiednim przebiegiem obliczenia na maszynie Turinga, a na komputer będziemy patrzeć jako na implementację maszyny Turinga (abstrahując od jej technicznych szczegółów – w szczególności od problemu złożoności czasowej, pamięciowej etc.).

Powstaje pytanie, czy pojawienie się dowodów komputerowych wprowadza do matematyki nową jakość i co ich istnienie wnosi do naszego rozumienia tego, czym jest dowód matematyczny. Przy okazji dyskusji dowodów komputerowych w wyraźny sposób ukazują się następujące problemy:

1. Problem czynnika empirycznego. Niezależnie od tego, jaki jest teoretyczny model komputera, samo jego działanie stanowi pewnego rodzaju proces empiryczny. Jeśli zatem używamy komputera do dowodzenia twierdzeń, to tym samym proces dowodzenia będzie zawierać pewien komponent empiryczny. W jakim stopniu i w jakim sensie obecność takiego czynnika ma wpływ na nasze rozumienie tego, czym jest wiedza matematyczna? Zagadnienie to nie ma charakteru spekulatywnego: wszak technologie komputerowe otwierają ogromne możliwości przetwarzania danych i znajdują coraz szersze zastosowanie także w samej matematyce.

2. Problem zależności między realnymi a wyidealizowanymi wersjami dowodów matematycznych – w szczególności między ich aspektami czysto formalnymi a semantycznymi. Nie ulega wątpliwości, że w przypadku działania maszyny Turinga mamy do czynienia z działaniem czysto mechanicznym[45]. Jeśli zatem użyjemy jej do wykonywania przekształceń, to wówczas możemy pominąć ich własności semantyczne. Wskażmy tutaj dwa aspekty tego pytania:

2a. Czy algorytmiczne (formalne) pojęcie dowodu jest dobrym modelem naszej działalności matematycznej?

---

[45] Można wyobrazić sobie dużą maszynę Turinga wykonaną z żelaznych trybików i dźwigni – co do zasady (tj. abstrahując od ograniczeń czasowych i pamięciowych) takie urządzenie miałoby taką samą moc obliczeniową jak najnowocześniejszy komputer z Pentagonu.

2b. Czy dowód komputerowy może stanowić dobre wyjaśnienie naszych matematycznych przekonań? To prowadzi nas w naturalny sposób w kierunku analizy problemu wyjaśniania w matematyce[46].

Najbardziej znanym przykładem dowodu z użyciem komputera jest dowód twierdzenia o czterech barwach (dalej posługuję się skrótem 4CT – od *four color-theorem*). Na nim skupimy uwagę i to on będzie stanowił niejako kanoniczny przykład dowodu wspomaganego komputerowo.

5. Twierdzenie o czterech barwach – przykład kanoniczny*

Rozważmy zwykłą mapę polityczną (dowolnej wielkości) na płaszczyźnie. Naszym celem będzie pokolorowanie jej w taki sposób, aby sąsiednie państwa (czyli takie, które stykają się na pewnym odcinku) były pokryte różnymi barwami. Pojawia się naturalne pytanie – ile kolorów potrzebujemy, aby to uczynić?[47] Łatwo zauważyć, że zazwyczaj są potrzebne przynajmniej cztery kolory – ale czy taka liczba wystarczy? Hipotezę, że tak właśnie jest, postawił w roku 1852 Guthrie, uczeń De Morgana.

Problem, choć sformułowany w elementarny sposób, okazał się poważnym wyzwaniem dla matematyków. Przez lata zmagań uzyskiwano jedynie wyniki cząstkowe, dotyczące map o ograniczonej liczbie państw bądź map pewnego szczególnego typu[48]. Dopiero w ro-

---

* W kolejnych paragrafach wykorzystuję fragmenty z artykułu Wójtowicz 2008.

46 Można powiedzieć, że – patrząc z szerokiej perspektywy – jest to pytanie o relację między „żywą matematyką" a jej odzwierciedleniem w systemie formalnym (takim jak np. ZFC). Z takim problemem stykamy się nie tylko przy okazji dyskusji roli dowodów matematycznych, ale też podczas analizy problemu, czy np. przy redukcji matematyki do pewnej fundamentalnej teorii nie gubimy czegoś istotnego, czy np. i d e e geometryczne, topologiczne etc. dają się jakoś odzwierciedlić w owych formalizmach.

47 Jako problem matematyczny zagadnienie czterech barw najwygodniej sformułować w języku teorii grafów – będzie to wtedy pytanie o 4-barwność grafów na płaszczyźnie (tzw. grafów planarnych).

48 Wyniki dotyczące map o ograniczonej liczbie państw uzyskiwali: Franklin (1922 – 25 państw), Reynolds (1926 – 27 państw), Winn (1940 – 35 państw), Ore i Stemple (1970 – 39 państw), Mayer (1976 – 95 państw). Ważną rolę w badaniach

ku 1976 (ponad 120 lat po sformułowaniu problemu!) Appel i Haken (do których dołączył Koch) podali pełne rozwiązanie zagadnienia czterech barw, dowodząc ogólnego twierdzenia (Appel, Haken 1977, Appel, Haken, Koch 1977).

Dowód 4CT podany przez Appela, Hakena i Kocha był nietypowy – w nieusuwalny sposób odwoływał się do wyników obliczeń komputera. Autorzy pokazali bowiem, że 4CT da się udowodnić, o ile sprawdzi się, że pewien warunek zachodzi dla dużej liczby (w pierwotnej wersji rozwiązania – prawie 1500) przypadków szczególnych. Mówiąc w uproszczeniu, dowód składał się z dwóch części: (1) z redukcji problemu ogólnego do pewnej liczby przypadków szczególnych; (2) ze sprawdzenia przypadków szczególnych. Zarówno liczba tych przypadków, jak i stopień komplikacji obliczeń, które należy przeprowadzić, aby sprawdzić poszczególne przypadki, wykluczały „ręczne" wykonanie tej pracy przez samych autorów dowodu (a być może nawet przez wszystkie pokolenia matematyków). Oryginalny program potrzebował ok. 1200 godzin pracy komputera; później czas ten uległ znacznemu skróceniu[49]. Niezależnie od tego wykonanie tej pracy pozostaje poza zasięgiem człowieka.

Należy tu dodać, że przeformułowanie problemu 4CT do postaci nadającej się do dalszej obróbki komputerowej wymagało wykorzystania subtelnych technik matematycznych. Nie należy więc sądzić, że dowód 4CT sprowadzał się w całości do mechanicznych

---

nad zagadnieniem czterech barw odegrał niemiecki matematyk Heesch. Prowadził badania dotyczące kluczowych w (późniejszym) dowodzie pojęć – nieuniknionych zbiorów konfiguracji oraz konfiguracji redukowalnych – i stwierdził, że hipotezę czterech barw można będzie udowodnić przez znalezienie nieuniknionego zbioru konfiguracji redukowalnych. Od niego pochodzi metoda „rozładowywania" (*discharging*); postawił (słuszną, jak się okazało) hipotezę heurystyczną, w myśl której odpowiednie dopracowanie tej metody pozwoli na rozwiązania zagadnienia czterech barw (por. Heesch 1969). Prezentację i historię zagadnienia czterech barw można znaleźć w pracach: Appel, Haken 1983, Kainen, Saaty 1986, Wilson 2004.

[49] Szybsze dowody podali: Allaire (1977) oraz Robertson (i in. 1997). W tej ostatniej pracy autorzy zmniejszyli liczbę konfiguracji wymagających zbadania z pierwotnych 1476 do 633, zaś liczbę reguł z 487 do 32. Nie zmienia to jednak istoty problemu.

przekształceń – matematyczna treść jest tu bowiem bogata. Dowód 4CT nie jest więc czymś w rodzaju obliczania gigantycznych „słupków" i nie przypomina np. sprawdzania tautologiczności formuły KRZ metodą tabelkową.

5.1. Komputerowy dowód 4CT – możliwe reakcje

Komputerowy dowód 4CT wzbudził w środowisku matematyków kontrowersje dotyczące jego „legalności" jako dowodu matematycznego[50]. Wynikają one z różnicy zdań dotyczących tego, czym jest matematyka, jaka jest natura wiedzy i prawdy matematycznej i jakie są standardy matematycznej argumentacji. Można wskazać kilka podstawowych typów reakcji (przedstawiam je tutaj – dla klarowności – w nieco przejaskrawiony sposób).

1. Część komentatorów uznała, że wykorzystanie urządzeń technicznych w dowodach matematycznych (czy – ściślej – odwołanie się do wyniku eksperymentu fizycznego, będącego działaniem pewnego urządzenia elektronicznego w określonym miejscu i czasie) jest niedopuszczalne. Kłóci się to bowiem z rozumieniem prawdy matematycznej jako prawdy dotyczącej abstrakcyjnych, pozaczasowych bytów i traktowaniem poznania matematycznego jako czysto rozumowego, oderwanego od empirii. Co bowiem działanie fizycznego urządzenia może mieć wspólnego z własnościami przedmiotów matematycznych? Pracę samego komputera opisujemy w teorii empirycznej, której epistemologiczny status istotnie różni się od mate-

[50] Dowód 4CT nie jest pierwszym dowodem z użyciem komputera. Wcześniej używano komputerów chociażby w sprawdzaniu, czy pewna liczba jest pierwsza – przykład to zastosowanie algorytmu Lucasa–Lehmera do testowania pierwszości liczb Mersenne'a, tj. liczb pierwszych postaci 2^p-1, gdzie p jest liczbą pierwszą. Były także znane dowody twierdzeń geometrycznych (Cerutti, Davis 1969) czy wspomagane komputerowo dowody pewnych twierdzeń logicznych. Piszą o tym Detlefsen i Luker (1980). Jednak to dopiero dowód 4CT wywołał żywą dyskusję filozoficzną. Na marginesie dodajmy, że innym ciekawym przykładem twierdzenia o geometrycznym charakterze udowodnionego z użyciem komputera jest hipoteza Keplera głosząca, że najbardziej efektywny sposób upakowania kul w przestrzeni stanowi naturalne ułożenie. Hipoteza ta została rozstrzygnięcia (pozytywnie) z użyciem komputera, por. Hales 2005 (w wersji popularnej: Hales 2000).

matyki: dostarcza nam ona jedynie wiedzy prawdopodobnej, nie zaś pewnej[51]. Z tego punktu widzenia komputer jawi się jako swoista czarna skrzynka, na zaufaniu do której musielibyśmy oprzeć naszą wiedzę matematyczną. To zaś jest niezgodne z przedstawioną wyżej wizją matematyki (w szczególności wizją dowodu matematycznego).

2. Inni komentatorzy twierdzą, że użycie w dowodzie komputera nie zmienia statusu dowodu i że 4CT jest twierdzeniem poprawnie udowodnionym. Samo posłużenie się komputerem w dowodzie matematycznym nie różni się – co do zasady – od posłużenia się kartką oraz ołówkiem i nie stanowi żadnego *novum*[52]. Skoro zatem dopuszczamy użycie fizycznych pomocy, takich jak kartka i ołówek, to dlaczego mielibyśmy kwestionować zastosowanie bardziej złożonych pomocy (takich jak komputer)?

3. Popularne jest również stanowisko pośrednie: 4CT można uznać za twierdzenie faktycznie u d o w o d n i o n e, komputerowy dowód 4CT jest dowodem matematycznym, jednak ma on pewne wady pozaformalne. Wskazuje się na to, że jest to dowód „siłowy" i że w gruncie rzeczy niewiele wyjaśnia. Taki dowód nie zadowala w pełni z punktu widzenia poznawania zależności między pojęciami matematycznymi.

Powyższe typy reakcji odzwierciedlają filozoficzne nastawienie do tego, czym jest matematyka, czym jest prawda matematyczna, jaka zachodzi relacja między matematyką a empirią i czy w w tej dyscyplinie istotną rolę odgrywa kategoria wyjaśniania (i jak winna być rozumiana). Problemy te będą przedmiotem analiz w dalszej części rozdziału.

---

[51] Oczywiście pierwotny dowód Appela, Hakena i Kocha został sprawdzony na wielu różnych komputerach. Sytuacja ta jednak – co do zasady – nie różni się od tej, gdyby sprawdzono go tylko na jednym komputerze.

[52] Krakowski twierdzi, że użycie komputera nie jest niczym nowym, ponieważ elementy empiryczne są zwykle obecne w dowodach matematycznych (Krakowski 1980). Swart wyróżnia 4 kategorie dowodów matematycznych, w zależności od tego, jakie pomoce techniczne są używane przy ich dowodzeniu. 4CT zalicza do grupy twierdzeń wymagających najbardziej zaawansowanych pomocy, jednak uważa je za twierdzenie udowodnione zgodnie ze standardami matematycznej argumentacji (Swart 1980).

5.2. Pierwsze komentarze filozoficzne

Pierwsza praca dotycząca filozoficznych aspektów 4CT stanowi dziś swoisty *locus classicus* (Tymoczko 1979)[53]. Tymoczko wymienia trzy istotne cechy dowodu matematycznego:

1. Dowody winny być przekonujące.
2. Dowody winny dać się sformalizować.
3. Dowody winny dać się przejrzeć i sprawdzić (*surveyable*).

Zdaniem Tymoczki dowód 4CT z użyciem komputera nie spełnia warunku 3. – nikt nie jest w stanie przejrzeć i sprawdzić obliczeń komputera. Musimy więc zaufać programistom, a także fizykom i inżynierom. To powoduje, że dowód komputerowy staje się nowym typem dowodu matematycznego, zawierającym elementy empiryczne; tym samym matematyka zaczyna przypominać w pewien sposób nauki empiryczne. Istotne jest przy tym nie tylko wystąpienie czynnika związanego z doświadczeniem, ale również to, że wynik pojawia się niejako *deus ex machina* – nie w pełni wiemy, dlaczego jest on akurat taki, a nie inny, i musimy zaufać technikom, którzy zapewniają nas, że komputer faktycznie robi to, czego od niego oczekujemy.

Tymoczko ilustruje swoje tezy przykładem hipotetycznej marsjańskiej społeczności matematycznej, w której pojawia się genialny matematyk Szymon. Rozwiązuje on szereg trudnych otwartych problemów matematycznych. Matematycy są pełni podziwu dla jego pomysłowych dowodów, które stają się coraz bardziej złożone i coraz trudniejsze do zrozumienia. W pewnym momencie Szymon oświadcza, że udowodnił pewne twierdzenie α, ale dowód jest zbyt złożony, aby mógł go zakomunikować innym (np. nie ma czasu na zapisywanie go na kartce, bo musi rozwiązać nowe zagadnienie). Czy jest racjonalne zaakceptowanie werdyktu Szymona odnośnie do twierdzenia α i uznanie go za udowodnioną prawdę matematyczną? Tymoczko twierdzi, że odwołanie się do autorytetu pojedynczego matematyka nie zostałoby zaakceptowane przez społeczność matematyków (Szymon mógł przecież oszaleć). Dowody matematyczne, aby zostały uznane za prawomocne, muszą podlegać kon-

---

[53] Prace, które stanowią b e z p o ś r e d n i ą reakcję na artykuł Tymoczki to: Detlefsen, Luker 1980, Krakowski 1980, Swart 1980, Teller 1980, Levin 1981.

troli innych członków matematycznej społeczności. Ten warunek nie jest spełniony w wypadku dowodu, którego istnienie deklaruje Szymon, a który jest niedostępny dla pozostałych marsjańskich matematyków. Podobnie – według Tymoczki – jest w przypadku dowodu komputerowego, zaś nasza sytuacja przypomina sytuację społeczności marsjańskich matematyków. Nikt nie potrafi sprawdzić działania komputera (prześledzić kolejnych kroków dowodowych), a więc wiara w słuszność jego werdyktu przypomina wiarę w autorytet Szymona. Należy pamiętać o tym, że komputer działa poprawnie jedynie z pewnym prawdopodobieństwem – wprawdzie bliskim jedności, ale jednak od niej mniejszym. Mamy tu więc do czynienia z fizycznym eksperymentem, którego wynik jest uzależniony od różnych (nieznanych nam w pełni) czynników empirycznych[54].

Argumentacja Tymoczki wywołała żywą polemikę, a podana przezeń analogia została dość powszechnie uznana za wątpliwą. Levin twierdzi, że podobieństwo między sytuacją marsjańskich matematyków ufających Szymonowi a sytuacją ziemskich matematyków ufających komputerowi jest powierzchowne – rozumiemy bowiem działanie komputera (Levin 1981). Również Teller podkreśla, że znamy algorytm, według którego ma działać komputer, nie znamy natomiast metod, jakimi posługuje się Szymon przy rozwiązywaniu problemów matematycznych (Teller 1980). Dopóki podane przez Szymona dowody okazują się (po sprawdzeniu) poprawne, znajomość jego „zasady działania" nie ma znaczenia. Skoro bowiem jesteśmy w stanie owe dowody prześledzić, to rola Szymona jest dla nas ważna w kontekście odkrycia (i tu osiągnięcia Szymona stanowią dla nas frapującą zagadkę psychologiczną), ale nie w kontekście uzasadnienia. Natomiast kiedy Szymon deklaruje, iż zna dowód, ale nie jest w stanie go nam zakomunikować, pojawiają się wątpliwości. W przypadku komputera znamy jednak algorytm i znamy zasadę działania całego urządzenia, nie ma tu więc analogii. Komentatorzy zwracają też uwagę na fakt, że jeśli podzielimy sceptycyzm Tymoczki

---

[54] Oczywiście gdybyśmy nie ufali komputerom, to w zasadzie nie powinniśmy wsiadać do samolotów, jeździć nowoczesnymi pociągami etc. Byłoby to nieracjonalne. Tu jednak nie chodzi o praktyczne zaufanie do 4CT, ale o zaufanie do 4CT jako t w i e r d z e n i a m a t e m a t y c z n e g o.

co do wyniku eksperymentu komputerowego, to należy także sceptycznie odnosić się do wszystkich twierdzeń, których dowodów nie sprawdziliśmy osobiście: fakt, że żaden ze specjalistów sprawdzających dowód nie znalazł w nim błędu, nie znaczy przecież, że można go zaakceptować – przecież wszyscy mogli się pomylić[55].

Ta dyskusja nie dotyczy bezpośrednio problemu logicznej poprawności dowodu, ale raczej standardów argumentacji, jakie pojawiają się w praktyce matematycznej. Temu problemowi jest poświęcony następny paragraf.

6. Dowody formalne a praktyka matematyczna

Jak należy ocenić dowód komputerowy z punktu widzenia standardów uzasadniania faktycznie stosowanych w matematyce? Aby lepiej zrozumieć ów problem, wyróżnimy tu dwa jego aspekty:

1. Aspekt formalny: interesuje nas dowód 4CT z punktu widzenia teorii dowodu, badającej ciągi formuł ze względu na ich formalne własności.

2. Aspekt praktyczny: interesuje nas praktyka matematyczna, zwyczaje panujące w środowisku matematyków i stosowane przez nich kryteria uznawania dowodu matematycznego za poprawny.

---

[55] Argumentacja Tymoczki lepiej stosowałaby się do przypadku (hipotetycznej) uczącej się sieci neuronowej, która po 5 latach „karmienia danymi" napisała pracę magisterską z matematyki, po kolejnych 4 doktorat, po kolejnych 2 habilitację, po kolejnym roku rozwiązuje hipotezę Riemanna (eksperci potwierdzają poprawność dowodu) i zaczyna tworzyć wyniki o dowodach tak złożonych, że nie jesteśmy w stanie ich sprawdzić (informuje nas np., że hipoteza Goldbacha jest prawdziwa, ale że dowodu nie da się wydrukować, bo zabraknie papieru). Czy będziemy mieli zaufanie do jej wyników (sprawdzonych przez 16 najwybitniejszych ekspertów w danej dziedzinie – też będących sieciami neuronowymi)? Problem polega tu na stwierdzeniu, czy my znamy zasadę działania sieci. W pewnym sensie tak – wiemy bowiem, na czym polegają mechanizmy uczenia się sieci, zarazem jednak nie mamy takiego dostępu do jej stanu wewnętrznego, jak do stanu wewnętrznego komputera. Problem empirycznych czynników przy zdobywaniu wiedzy matematycznej można byłoby sformułować w bardziej wyrazisty sposób w przypadku takich hipotetycznych dowodów sieciowych.

Każdemu krokowi pracy komputera odpowiada pewna formuła, opisująca aktualny stan obliczeń[56]. W tym wypadku całe obliczenie komputera można utożsamić (po dołączeniu pewnych założeń technicznych) ze stosownym ciągiem formuł stanowiącym dowód 4CT. Oczywiście nie jesteśmy w stanie przejrzeć i sprawdzić całego tego ciągu, ale można o nim mówić i badać jego własności.

Z metamatematycznego punktu widzenia pojęcie dowodu jest dobrze określone: dowodem zdania β na podstawie zbioru aksjomatów A jest skończony ciąg formuł $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, spełniający stosowne warunki formalne. Kiedy zastanawiamy się nad dowodliwością danej formuły β, nie interesują nas ograniczenia praktyczne dotyczące długości dowodu, które wiążą się np. z możliwością wydrukowania dowodu na papierze dostępnym na kuli ziemskiej. Stwierdzenie, że najkrótszy dowód pewnego twierdzenia α w pewnej teorii T ma długość $10^{10000000}$, nie znaczy, iż taki dowód został f a k t y c z n i e przez kogoś sformułowany, a jedynie, że – traktowany jako pewien obiekt matematyczny – stosowny ciąg formuł ma taką właśnie długość (choć nie da się go reprezentować w materialnej postaci)[57].

W wypadku ciągu formuł związanym z komputerowym dowodem 4CT zachodzą dwie możliwości: albo ten ciąg jest poprawnym dowodem, albo nie. Z punktu widzenia teorii dowodu możemy więc udzielić jasnej (choć jedynie warunkowej) odpowiedzi na pytanie o status dowodu komputerowego: j e ś l i dowód komputerowy jest formalnie poprawny, t o jest to dowód klasyczny. Nie pojawiają się w nim żadne nowe reguły wnioskowania czy zasady argumentacji, które wykraczałyby poza klasyczne pojęcie dowodu[58]. Jeśli zaś ów

---

[56] Wygodnie tu myśleć o maszynie Turinga jako o formalnym modelu obliczeń komputerowych. Aktualny stan takiej maszyny można opisać za pomocą formuły, która zawiera informacje o niej (tzn. o alfabecie i zestawie instrukcji) oraz o: (1) aktualnym stanie wewnętrznym maszyny; (2) stanie taśmy; (3) położeniu głowicy.

[57] Niekiedy możemy oszacować długość dowodu w pewnej teorii formalnej, choć nie poznamy samego dowodu. O takich sytuacjach była mowa przy okazji analizy przykładu Boolosa.

[58] Teller zwraca uwagę na fakt, że możliwość przejrzenia i sprawdzenia (*surveyability*) nie jest czymś, co c z y n i dowód dowodem, ale czymś, dzięki czemu my się d o w i a d u j e m y, że dowód faktycznie nim jest (Teller 1980: 798). Problem

ciąg formuł nie jest formalnie poprawny, to po prostu nie jest dowodem i problem znika.

Jednak taka warunkowa odpowiedź nie rozstrzyga problemu, czy jest racjonalnie uwierzyć w to, że faktycznie każda mapa daje się pokolorować czterema barwami[59]. Nas interesuje bowiem pytanie, czy – z punktu widzenia praktyki matematycznej – jest rozsądnie uznać, że 4CT zostało udowodnione. Chodzi więc o przyjęte standardy matematycznej argumentacji, a w szczególności o:

1. Relację między realnymi dowodami w matematyce a Dowodami Idealnymi w kontekście dowodów komputerowych (z uwzględnieniem problemu ich wyjaśniającej roli).

2. Obecność czynnika empirycznego w matematyce i jego wpływ na status uzyskiwanej wiedzy.

W prowadzonych rozważaniach będę często odwoływał się do przykładu dowodu 4CT, gdyż jest on dobrze znany. Jednak nie korzystam w żaden sposób ze specyfiki tego dowodu (np. faktu, że dotyczy teorii grafów), a więc uzyskane wnioski będą miały charakter ogólny.

6.1. Dowód realny *versus* idealny. Wyjaśnianie w matematyce

Nie ulega wątpliwości, że komputerowy dowód 4CT (czy ściśle: komputerowy fragment dowodu 4CT) ma charakter formalnej derywacji. Pojawia się pytanie, czy tego typu czysto formalna weryfikacja faktów zasługuje na miano pełnoprawnego dowodu. Problem taki stawia np. Rota (1997). W swoich rozważaniach odwołuje się do faktu, że dla matematyka w jego codziennej pracy jest istotne nie tyle podanie stosownego ciągu formuł, ale raczej zrozumienie całej sieci zależności, a w szczególności zrozumienie przyczyn, dla których za-

---

więc nie polega na tym, że pojawił się nowy typ dowodu formalnego, ale raczej że pojawił się nowy typ argumentacji na rzecz istnienia takiego dowodu. I ten nowy typ argumentacji nie polega na tym, że w teorii S udowodniliśmy istnienie dowodu dla α w teorii T (przykład Boolosa, twierdzenia Kruskala etc.). Tutaj argument ma charakter pozamatematyczny.

[59] Należy wspomnieć, że jest już znany dowód logicznej poprawności algorytmu, przeprowadzony przez system Coq (por. Gonthier 2004). Jednak angażuje on także komputer, nie usuwa więc zasadniczych wątpliwości.

chodzi dany fakt. Nie jest więc zadowalające jedynie czysto formalne wykazanie prawdziwości danej hipotezy matematycznej. Rota (odnosząc się do komputerowego dowodu 4CT) twierdzi w szczególności, że matematycy wciąż poszukują ukrytych przyczyn, dla których twierdzenie to jest prawdziwe, i argumentu, który wyeliminuje konieczność wykorzystania dowodu komputerowego (powołuje się tu na opinię jednego z ekspertów w tej dziedzinie, który twierdzi wręcz, że hipoteza czterech barw nie została rozstrzygnięta: Rota 1997: 186). Rota pisze wprost: „weryfikacja stanowi dowód, ale weryfikacja nie musi podawać racji (*reason*) [na rzecz prawdziwości twierdzenia]" (Rota 1997: 186–187). U podłoża tej koncepcji leży przekonanie, że poznawcza funkcja dowodu matematycznego wykracza poza dostarczenie formalnej derywacji, zaś wizja dowodu jako ciągu formalnych przekształceń traci z pola widzenia ważne aspekty procesu uzasadniania w matematyce.

Dowody komputerowe zachęcają do postawienia z całą ostrością pytania o eksplanacyjną funkcję dowodów matematycznych i o rozumienie w matematyce. Problem wyjaśniania jest szeroko dyskutowany w odniesieniu do nauk empirycznych, natomiast w przypadku matematyki literatura jest bez porównania uboższa. Już samo jego sformułowanie może na pierwszy rzut oka budzić pewien opór: pytanie o to, d l a c z e g o kamień leci po takiej, a nie innej krzywej brzmi rozsądnie (wyjaśniamy to np. w oparciu o prawa ruchu), natomiast pytanie o to, d l a c z e g o jest prawdziwe np. twierdzenie Stokesa, może się wydawać źle postawione (lub trywialne). Narzuca się naturalna odpowiedź: twierdzenie jest prawdziwe, bo możemy podać jego dowód. Byłaby to jednak odpowiedź utrzymana w duchu radykalnego formalizmu, i trudno byłoby ją uznać za filozoficznie zadowalającą. Jednak matematyk w swojej praktyce myśli przecież nad takimi zagadnieniami jak: dlaczego t a k n a p r a w d ę to twierdzenie da się tak udowodnić?, jaki t a k n a p r a w d ę fakt wyraża to twierdzenie? etc. Matematycy posługują się w analizach „okołodowodowych" sformułowaniami typu: „t a k n a p r a w d ę to równanie nie ma rozwiązania dlatego, że jakaś przestrzeń funkcyjna ma taką, a nie inną własność" albo „t a k n a p r a w d ę ten dowód wyraża pewien głębszy fakt" etc. Trudno przecież zanegować fakt, iż zdaniem matematyków teoria Galois w y j a ś n i ł a szereg wyników związanych z rozwiązywaniem równań. Jest to szczególny przypadek ogólnego faktu: często pewne twierdzenia w y j a ś n i a j ą, dlaczego np. niektóre pojęcia uznajemy za ważne albo jakie są fundamentalne idee leżące u podłoża danej teorii[60].

Takiemu postawieniu sprawy można zarzucać tworzenie hipostaz: czyż zadaniem matematyka nie jest dowodzenie twierdzeń, a nie wzbudzanie w innych matematykach poczucia głębi czy doniosłości wyników – nie mówiąc już o postulacie poszukiwania jakichś tajemniczych przyczyn (które to poszukiwania mają być czymś więcej niż tylko ustalaniem zależności logicznych między zdaniami)? Można przecież powiedzieć, że jeśli twierdzenie zostało udowodnione, to właśnie ten – i tylko ten! – fakt stanowi fragment wiedzy, zaś to, jaki jest dowód (długi czy krótki, obliczeniowy, trickowy, siłowy, głęboki, ładny, inspirujący, zaskakujący etc.) nie ma znaczenia z punktu widzenia procesu wzbogacania wiedzy (podobnie jak nie ma znaczenia, czy dowód został napisany ołówkiem czy długopisem, ładnym czy brzydkim charakterem pisma, czy referent mówił dźwięcznym głosem czy nie etc.). Jednak taki zarzut nie bierze pod uwagę praktyki matematycznej: rola dowodu jest tu z pewnością większa niż tylko jako środka do uzasadniania kolejnych zdań. Pojęcie wyjaśniania w matematyce ma niewątpliwie trudno uchwytną naturę, podobnie jak np. pojęcie doniosłości czy głębi twierdzenia: matematycy się nimi posługują, ale trudno byłoby podać ich precyzyjne charakteryzacje. Niezależnie jednak od tego trudno odmówić mu sensowności i znaczenia dla analiz filozoficznych – w szczególności tych dotyczących statusu poznawczego dowodów komputerowych.

Aby wyraźniej postawić problem, rozważmy eksperyment myślowy, w którym komputery działają np. 2^{1000} razy szybciej niż obecnie. Jeśli zlecimy takiemu komputerowi dowodzenie kolejnych twierdzeń ZFC (w języku ZFC), będzie generował tezy z ogromną prędkością. Czy przyrost naszej wiedzy jest proporcjonalny do wysoko-

[60] Podobne mechanizmy mogą występować także przy analizie problemu wiarygodności (nowych) aksjomatów. Można twierdzić, że wyjaśniają one w pewnym sensie znaczący fragment teorii (tak chce np. Woodin, o którego badaniach wspomniałem w rozdziale drugim).

ści stosu zadrukowywanych owymi twierdzeniami kartek? Z pewnością nie. Pierwsza trudność, jaka tutaj się pojawi, to odróżnienie wyników istotnych od nieistotnych[61]. W czasie tej procedury selekcyjnej musielibyśmy odwołać się do kryteriów pozaformalnych, do naszych przekonań dotyczących tego, że dane twierdzenie jest ciekawe, głębokie, doniosłe, zaskakujące etc. Gdybyśmy zaś faktycznie zidentyfikowali ważne twierdzenie udowodnione przez komputer, to natychmiast podjęlibyśmy próbę zrozumienia tego, jakie idee tkwią u podłoża danego dowodu. Trudno sobie wyobrazić, aby matematycy, stwierdziwszy, że komputer informuje nas o tym, iż właśnie udowodnił twierdzenie Riemanna (oczywiście sformułowane w języku ZFC), ograniczyli się do pokiwania głowami w zadowoleniu, że wreszcie ów problem został rozwiązany. Nie zadowoliliby się również konstatacją, że prawdziwą przyczynę, dla której hipoteza Riemanna jest prawdziwa, stanowi to, że istnieje ciąg formuł ZFC długości np. $2^{124}+32443$, będący formalnym jej dowodem. Powiedzieliby raczej, iż sam fakt istnienia takiego ciągu formuł nie wyjaśnia, dlaczego to jest prawda i nadal zadawaliby pytania np. o to, jakie idee (topologiczne?, geometryczne?, algebraiczne?) leżą u podłoża owego faktu, d l a c z e g o to twierdzenie jest prawdziwe, czy

---

[61] Należy pamiętać, że ogromna większość tak wygenerowanych twierdzeń byłaby mało ciekawa, na przykład: „Jeśli zbiór A ma moc 5 elementów, zaś zbiór B ma moc 2 elementów, to istnieje dokładnie tyle funkcji charakterystycznych określonych na iloczynie kartezjańskim A x B, ile jest podzbiorów zbioru będącego sumą 3 rozłącznych zbiorów C, D, E takich, że C ma 2 elementy, D ma 3 elementy, zaś E ma 5 elementów". Twierdzenie to jest oczywiście prawdziwe i zarazem absolutnie trywialne i nieciekawe (Czytelnik zechce rozwinąć to twierdzenie do równie nieciekawego, za to zajmującego np. 5 stron). Takie przykłady można mnożyć. Nasz komputer zasypałyby nas tego typu twierdzeniami, bo trudno oczekiwać od niego, aby sam podejmował decyzje dotyczące tego, jakie twierdzenia uznamy za ciekawe i doniosłe. Jeśli będziemy mieli pecha, to nasz komputer zacznie zadrukowywanie owych kartek od niezliczonych wariantów tego właśnie twierdzenia dla różnych możliwych mocy zbiorów A, B, C, D, E. Biorąc pod uwagę to, że tego typu twierdzeń jest nieskończenie wiele, może się okazać, iż bardzo długo przyjdzie nam czekać na kartkę z pierwszym nietrywialnym wynikiem.

jest wyrazem jakichś głębszych zależności, czy też może ma charakter podobny do twierdzenia Fermata etc.[62]

Można powiedzieć wręcz, że wynik podany przez ów ultraszybki komputer nie miałby dla nas żadnej mocy wyjaśniającej. Sytuacja przypominałaby tu *casus* owego genialnego matematyka Szymona (Tymoczko 1979), który mówi nam o prawdziwości pewnego twierdzenia, nie informując jednocześnie, jak do tego doszedł. Z punktu widzenia praktycznego informacja od „komputerowej wróżki", że właśnie udowodniła twierdzenie α, a dowód zajął jej 2^{1000} kroków ma takie samo znaczenie poznawcze, jak informacja od Szymona[63]. Aby miało to dla nas wartość epistemologiczną, musielibyśmy zrozumieć idee tworzonych przez nią dowodów. I gdybyśmy nawet (dzieląc pracę pomiędzy tysiące matematyków) prześledzili linijka po linijce wydruk dowodu (czyli ciągu formalnych przekształceń) i zaakceptowali każdą linijkę z osobna, to zysk poznawczy z takiego przedsięwzięcia byłby niewielki. Dowiedzielibyśmy się, że dowód jest formalnie poprawny, nie wiedząc wcale, o co w nim chodzi[64]. Nasze analizy miałyby dla nas wartość poznawczą dopiero wtedy, gdybyśmy mogli zidentyfikować główne kroki dowodu, główne idee, techniki etc. Posługując się terminologią Basslera (2006), w takim przypadku z całą pewnością nie byłby spełniony kartezjański wymóg globalnej ogarnialności dowodu[65]. Kategorią tą (pod taką czy

---

[62] Nawiązując do przykładu Boolosa, można powiedzieć, że czysto formalny dowód twierdzenia w rachunku pierwszego rzędu nie daje nam rozumienia, natomiast (krótki) dowód w logice drugiego rzędu takie rozumienie już daje. Identyczna sytuacja pojawia się w przypadku wspomnianej wówczas wersji twierdzenia Kruskala: znajomość formalnego dowodu długości $2^{2^{\cdots^{2}}}$ w PA nic by nam nie dała z poznawczego punktu widzenia, natomiast znajomość krótkiego dowodu w ZFC wyjaśnia ów fakt.

[63] Oczywiście ten wynik może mieć znaczenie praktyczne, jednak będziemy stosować go wówczas na zasadzie swoistej heurystyki (tak jak uczniowie w szkole stosują różne wzory, nie rozumiejąc ich źródła).

[64] Sądzę wręcz, że gdyby zaprezentowano sformalizowaną wersję znanego nam dowodu, minęłoby dużo czasu, zanim byśmy się zorientowali, że ten dowód już znamy.

[65] Przypomnijmy, że Bassler analizuje problem, czy dowody matematyczne dają się ogarnąć, i wyróżnia ogarnialność lokalną (oczywistość poszczególnych kroków) i globalną (oczywistość rozumowania jako całości, które intuicyjnie

inną nazwą) posługujemy się w refleksji nad matematyką – mówimy o uchwyceniu głównej idei, o zrozumieniu myśli przewodniej, o intuicyjnym ujęciu całości. Zarazem jest ona trudno uchwytna. Te same uwagi odnoszą się *mutatis mutandis* do dowodów przeprowadzonych przez nasze komputery, które działają wprawdzie 2^{1000} razy wolniej od owych hipotetycznych „komputerowych wróżek", ale nadal generowane przez nie dowody są dla nas niedostępne.

Wszystkie te rozważania krążą wokół problemu dotyczącego tego, co stanowi istotę w i e d z y matematycznej, a w szczególności pytania, czy jej istotą są twierdzenia, czy dowody. Oczywiście są one ze sobą ściśle związane: nie ma twierdzeń bez dowodów, zaś każdy dowód jest dowodem pewnego twierdzenia[66]. Możemy więc jedynie mówić o różnych aspektach tego samego zjawiska. Jednak problem jest jasny: chodzi o próbę wskazania istoty matematyzowania (uprawiania matematyki). O przeciwstawieniu dwóch stylów myślenia o matematyce (jako dziedziny dotyczącej faktów – niezależnie od metod ich poznania – oraz dziedziny dotyczącej metod uzasadniania tych faktów) piszą *explicite* np. Rota czy Rav (Rota 1997, Rav 1999). Z punktu widzenia poglądu akcentującego rolę dowodów twierdzenia są – w pewnym sensie – jedynie swoistymi znacznikami (*stepping stones*), oddzielającymi jeden dowód od drugiego. Rota rozważa przykład twierdzenia Fermata, które jako fakt teorioliczbowy nie jest specjalnie ciekawe; staje się natomiast ciekawe dzięki swojemu dowodowi, w którym splatają się metody teorii liczb i geometrii algebraicznej. Gdyby nie to, że akurat właśnie owo równanie diofantyczne nie daje się rozwiązać standardowymi metodami, nie wzbudziłoby ono niczyjego zainteresowania, gdyż „w teorii liczb, wartość twierdzenia zależy od trudności dowodu" (Rota 1997: 188). Autor proponuje następujący eksperyment myślowy: wyobraźmy sobie, że

ujmujemy). Zob. Bassler 2006. O takiej globalnej ogarnialności rozumowań (w szczególności dowodów matematycznych) mówił Kartezjusz (por. analizy w rozdziale pierwszym).

66 Pytanie to można – co prawda bardzo niedoskonale, ale ukazując istotę problemu – przedstawić w sposób następujący: czy więcej o matematyce wie ktoś, kto nauczył się trzech stron twierdzeń, czy ktoś, kto zna trzy twierdzenia z dowodami (z których każdy zajmuje jedną stronę)?

twierdzenia teorii liczb stają się nagle tak łatwe do udowodnienia jak np. elementarne twierdzenia geometrii euklidesowej. Gdyby tak faktycznie się stało, nikt nie uznawałby teorii liczb za interesującą dyscyplinę naukową[67]. Tym samym – twierdzi badacz – można przyjąć, że teoria liczb to dziedzina matematyki, w której są ważne m e t o d y dochodzenia do wiedzy o faktach, a nie same fakty (Rota 1997: 188)[68].

Za bliższy praktyki matematycznej, a zarazem filozoficznie ciekawszy, uważam drugi punkt widzenia, w którym akcentuje się rolę i znaczenie dowodów, w szczególności ich eksplanacyjnej roli. Przewodnikami po rozważaniach będą prace: Steiner 1978, Resnik, Kushner 1987, Mancosu 2001 (nie należy też zapominać o ważnych analizach Lakatosa). Steiner (1978) jawnie wprowadza pojęcie dowodu wyjaśniającego (*explanatory proof*). Wychodzi on od pojęcia epistemicznej realności obiektów matematycznych: mówimy o niej wówczas, kiedy dany obiekt matematyczny ma r ó ż n e o p i s y. Wprowadzenie takiego pojęcia ma następującą motywację: pytamy o to, czy mamy dostęp poznawczy do owego obiektu n i e t y l k o przez

---

67 Nie należy jednak absolutyzować tego punktu widzenia: w niektórych gałęziach matematyki może nas bardziej interesować fakt (np. fakt geometryczny) niż sposób jego udowodnienia. Niemniej jednak generalnie zgadzam się z uwagami Roty dotyczącymi roli dowodów.

68 Za ciekawy z punktu widzenia tego rozróżnienia uważam przypadek tzw. zmodyfikowanego twierdzenia Ramseya. Zostało one podane w pracy Paris, Harrington 1977, w której udowodniono również jego niezależność od PA. Oto jego sformułowanie:

Niech dla danego zbioru liczb naturalnych X, $[X]^k$ oznacza zbiór jego k-elementowych podzbiorów, card(X) – ilość jego elementów, zaś min(X) – najmniejszą liczbę naturalną w zbiorze X. Wówczas: dla wszystkich k,l,m istnieje n tak duże, że jeśli $X=\{1,2...n\}$ oraz $[X]^k=C_1\cup...\cup C_l$, to istnieje zbiór $Y\subseteq X$, taki że: (1) card(Y)=m; (2) card(Y)≥min(Y); (3) $[Y]^k\subseteq C_i$ dla pewnego $i\leq l$.

Wersja tego twierdzenia, w którym pominięto warunek (2), jest dowodliwa w PA. Zauważmy teraz, że to, co czyni ciekawym wersję z warunkiem (2) w stosunku do wersji bez tego warunku, jest nie tyle ów warunek techniczny, ale fakt, iż pojawienie się tego warunku czyni owo twierdzenie niedowodliwym w PA. Mówiąc metaforycznie, ów warunek nabiera blasku dopiero w kontekście metateoretycznych wyników dotyczących siły założeń niezbędnych do udowodnienia owych dwóch wersji. Gdyby obie wersje były dowodliwe w PA, dołączenie (czy pominięcie) warunku (2) – nawet gdyby komplikowało to dowód – nie wzbudziłoby niczyjego zainteresowania.

postulującą ów przedmiot teorię, ale w sposób od niej niezależny. Inaczej mówiąc, nie jest on wymyślony na potrzeby pewnej teorii, ale niejako czeka na naszą deskrypcję – nic więc dziwnego, że możemy go opisywać z różnych punktów widzenia[69]. Przykładem jest tu liczba π: ma bowiem ona zarówno opis geometryczny, jak i niezależny opis analityczny. Steiner posługuje się pojęciem własności charakteryzującej jako wyróżniającej dany obiekt lub strukturę w danej klasie obiektów lub struktur (Steiner 1978: 143). To z kolei umożliwia mu wprowadzenie pojęcia dowodu wyjaśniającego. Można je zilustrować następującym przykładem: dane są dwa różne opisy pewnej klasy obiektów matematycznych (np. definicje dwóch własności) i pytamy o to, czy owe klasy obiektów są identyczne (*scil.*: czy owe własności są koekstensjonalne). Zdaniem Steinera dowód wyjaśniający ukazuje koekstensjonalność przez wskazanie związku między własnościami charakteryzującymi owe klasy. Natomiast dowód niewyjaśniający (*nonexplanatory*) nie wykaże istnienia takiego związku i tym samym owa koekstensjonalność będzie jawić się nam jako fakt niezrozumiały[70].

Do analiz Steinera nawiązują Resnik i Kushner (1987). Podkreślają oni rolę wyjaśniania w matematyce, twierdząc, iż „matematycy żądają wyjaśnień czysto matematycznych problemów i takowe oferują; niektóre dowody są bardzo pouczające, podczas gdy inne są ra-

---

[69] Przypomnijmy tu polemikę Hilbert–Frege dotyczącą definiowania pojęć geometrycznych (por. rozdział pierwszy). Zdaniem Hilberta definicja przez postulaty powołuje niejako do istnienia dane pojęcie i nie jest konieczne, aby miały one już uprzednio zadany sens. Podług Fregego takie definicje ujmują pojęcia, których sens winien być dany już uprzednio.

[70] Niedoskonała analogia dotyczy tradycyjnego przykładu nerkowców i sercowców (na potrzeby przykładu zakładam, że owe pojęcia są faktycznie koekstensjonalne). Jeśli wykaże się, iż posiadanie nerki i serca jest związane na fundamentalnym poziomie biologii organizmów żywych, stanowiłoby to swoisty dowód wyjaśniający (rozumielibyśmy na poziomie fundamentalnych praw biologicznych, dlaczego tak się dzieje). Nie ulega wątpliwości, że wiele dowodów matematycznych pokazuje owe głębokie przyczyny koekstensjonalności pojęć i właśnie takie dowody są wysoko cenione. Zarazem widać, że klarowne określenie pojęcia „głębokiej przyczyny” jest bardzo trudne – prawdopodobnie można tu jedynie odwoływać się do pewnych wspólnych dla matematyków intuicji.

czej nieprzejrzyste" (Resnik, Kushner 1987: 142)[71]. Zarazem jednak dostrzegają duże trudności z klarownym postawieniem problemu wyjaśniania w matematyce: o ile bowiem w naukach empirycznych jest to jedna z kluczowych kwestii, o tyle sami matematycy rzadko sądzą, że właściwym przedmiotem ich badań jest właśnie wyjaśnianie. Zdaniem owych autorów poglądy dotyczące wyjaśniania w naukach empirycznych nie mają zastosowania do eksplanacji w matematyce. Resnik i Kushner formułują w tym kontekście następujące uwagi (Resnik, Kushner 1987: 151–152):

1. W jednym ze znaczeń tego pojęcia wyjaśnienie ma polegać na systematyzacji. W tym sensie w matematyce mamy do czynienia z wyjaśnieniem: są bowiem tworzone teorie, które organizują i systematyzują rozproszone wyniki[72].

2. Pytania typu „dlaczego" są zasadne w odniesieniu do obiektów matematycznych, zaś wiele odpowiedzi przypomina odpowiedzi na podobne pytania w naukach empirycznych. Nie muszą one być przy tym zawsze udzielane za pośrednictwem dowodów. Na przykład definicja dodawania w terminach sum zbiorów stanowi – zdaniem autorów – dobre wyjaśnienie przemienności i łączności dodawania[73]. Z kolei analiza dowodu twierdzenia o wartości średniej pokazuje, że jest w nim istotne założenie o spójności, a spójnymi podzbiorami **R** są jedynie przedziały (także niewłaściwe). To wyjaśnia (*via* kontr-

---

[71] Na przykład autorzy komentują dowód twierdzenia o wartości średniej dla funkcji rzeczywistych, twierdząc, iż trudno wyobrazić sobie, że ktoś zrozumiał ten dowód, a zarazem nadal nie wie, dlaczego to twierdzenie jest prawdziwe (Resnik, Kushner 1987: 149).

[72] Można tu dodać, że tego typu działalnością wyjaśniającą jest poszukiwanie aksjomatycznej wersji teorii. Na przykład aksjomatyzacja rachunku prawdopodobieństwa nastąpiła dopiero kilkaset lat po tym, jak pojęcie prawdopodobieństwa zaczęło być przedmiotem matematycznych analiz i kiedy istniało już dużo wyników z tej dziedziny. Inny przykład to aksjomatyzacja arytmetyki. W tego typu sytuacjach poszukujemy podstawowych zasad, prawd, które leżą u podłoża znanych już teorii.

[73] Podobne analizy dotyczące wyjaśnienia natury operacji arytmetycznych w terminach m.in. teoriomnogościowych zawiera praca Steinera (2005).

przykłady), dlaczego twierdzenie to nie zachodzi dla innych podzbiorów **R**, jednak nie jest to eksplanacja przez dowód[74].

3. Wyjaśnienia w matematyce często polegają na wskazaniu całej grupy wyników (wraz z nieformalnymi komentarzami), a nie pojedynczych twierdzeń. Jako przykład autorzy podają problem kategoryczności arytmetyki drugiego rzędu (i braku kategoryczności arytmetyki pierwszego rzędu). Fakt ten wyjaśniamy w ten sposób, że w logice drugiego rzędu możemy sformułować aksjomat indukcji dla wszystkich zbiorów liczb naturalnych, podczas gdy w pierwszym rzędzie jedynie schemat indukcji (dla formuł pierwszego rzędu języka arytmetyki). To stanowi dobre wyjaśnienie tego zjawiska, jednak nie jest to wyjaśnienie przez odwołanie się do jakiegoś pojedynczego dowodu.

W swoistym podsumowaniu tych rozważań autorzy piszą, iż podstawowa intuicja, która przemawia za ideą dowodu wyjaśniającego, jest następująca: oto wszystkie dowody przekonują nas, że udowodnione twierdzenie jest prawdziwe, lecz niektóre pozostawiają w nas zdziwienie, dlaczego tak jest[75]. Ta intuicja wynika z istnienia szeregu dowodów, które – jako dowody – są w pełni poprawne, ale zarazem dostarczają tak mało informacji na temat struktury samego problemu, że wiele spośród pytań typu „dlaczego" pozostaje bez odpowiedzi. To jednak nie prowadzi do istnienia o b i e k t y w n e g o rozróżnienia na dowody wyjaśniające i niewyjaśniające. Mamy

74 Resnik i Kushner odnoszą się tu do problemu doskonale znanego matematykom: w jaki sposób dane założenie ingeruje w dowód, kiedy jest ono kluczowe, dlaczego nie można się bez niego obejść. Prostym przykładem takich analiz są szkolne zadania typu: udowodnij, że z założeń (1), (2), (3) wynika zdanie α, a następnie pokaż modele dla sytuacji, w których nie zachodzi któreś z założeń (1), (2), (3) i nie zachodzi α. Często ustalenie i zrozumienie tych zależności prowadzi do nietrywialnych wyników: ogólniejszych wersji twierdzenia, do dowodu przy słabszych założeniach etc.

75 „Matematycy nie odkrywają dowodów poprzez dedukowanie na ślepo wniosków ze znanych wcześniej wyników, raczej najpierw starają się poznać strukturę matematyczną, w ten sposób są w stanie zobaczyć, co jest w n i e j p r a w d z i w e, i jak te podstawowe prawdy wynikają z jej podstawowych własności" (Resnik, Kushner 1987: 153–154).

tu do czynienia z pewną kategorią psychologiczną (czy kognitywną), dla której trudno podać klarowną charakterystykę.

Problem wyjaśniania w matematyce podejmuje Mancosu, podkreślając różnicę między dowodami, które – w ocenie matematyków – wyjaśniają, a dowodami, które jedynie przekonują, choć nie wyjaśniają (Mancosu 2001: 98)[76]. Badacz prowadzi swoje rozważania w oparciu m.in. o rozważania na temat prac Pringsheima dotyczących analizy zespolonej, w szczególności tego, jakie pojęcia i fakty winny stanowić punkt wyjścia tej teorii (Pringsheim 1925). Przypomnijmy, że trzy główne ujęcia tego problemu, a mianowicie: (1) Cauchy'ego (przez pojęcie różniczkowalności w sensie zespolonym); (2) Riemanna (przez równania Cauchy'ego–Riemanna); (3) Weierstrassa (przez rozwinięcia w szeregi potęgowe), prowadzą do tej samej klasy funkcji. Mamy w tym wypadku do czynienia z naturalnym przykładem kilku pojęć, które – *prima facie* różne – okazują się koekstensjonalne[77]. Pringsheim proponuje jeszcze inne podejście, w którym jako podstawowe traktuje się pojęcie średniej wartości funkcji. Dzięki temu, „podstawowe fakty, które w teorii Cauchy'ego pojawiają się jako sensacyjne wyniki działania tajemniczego mechanizmu prowadzącego do cudownych zjawisk, w ramach naszej teorii uzyskują naturalne wyjaśnienie" (Pringsheim 1925: p. V; cyt. za: Mancosu 2001: 109). Zdaniem Pringsheima jego ujęcie pozwala na wyjaśnienie wielu wyników teorii funkcji zespolonych, które w innym przypadku nie znajdują dobrego umotywowania. Dalej pisze, iż jego stanowisko ma „ważne dodatkowe zalety: [...] struktura i rozwój teorii stają się bardziej naturalne [...], stosowanie bardziej elementarnych

---

[76] W swojej pracy Mancosu stawia 5 zasadniczych pytań dotyczących wyjaśniania w matematyce: (1) Czy w matematyce są wyjaśnienia?; (2) Jaką przybierają formę?; (3) Czy problem wyjaśniania to nowość w filozofii matematyki?; (4) Jakie są filozoficzne podejścia do problemu wyjaśniania w matematyce?; (5) Jaka jest zależność między wyjaśnianiem w matematyce a teoriami wyjaśniania w nauce? (Mancosu 2001: 98).

[77] Inne standardowe przykłady to: pojęcie funkcji rekurencyjnej zdefiniowane na jeden z kilku równoważnych sposobów (przez wprowadzenie odpowiednich operacji na funkcjach, przez maszyny Turinga etc.); definicja ciągłości funkcji rzeczywistej w terminach ε-δ lub w terminach zbieżności ciągów; różne definicje topologii (np. przez zbiory otwarte *versus* przez operację domknięcia).

metod daje jaśniejszy wgląd w działanie podstawowych wyników i to, jaki mają one związek z arytmetyką, co na ogół staje się zaciemnione (*obscured*) przez odwołanie się do skracającego dowody mechanizmu całkowania funkcji zespolonych" (Pringsheim 1920: 152; cyt. za: Mancosu 2001: 110). Nie wnikając w to, czy faktycznie ujęcie Pringsheima posiada wspomniane zalety (nie zostało bowiem powszechnie zaakceptowane), ważne dla naszej dyskusji są motywacje owego podejścia: chodzi o takie sformułowanie opisu zjawisk, aby w y j a ś n i ć możliwie dużo faktów. Posługując się terminologią Lakatosa, można powiedzieć, że konstruowana przez Pringsheima teoria ma stanowić *explanans* dla znanych już wyników dotyczących teorii funkcji zespolonych. Mancosu dodaje tutaj, że charakterystyczne dla tego podejścia jest dbanie o jednolitość metodologiczną: chodzi o to, aby metody nieelementarne nie pojawiały się za wcześnie, gdyż zbyt szybkie wprowadzanie (niejako z zewnątrz) silnych metod utrudnia zrozumienie istoty problemu[78].

Stanowisko akcentujące znaczenie wyjaśniania w matematyce Mancosu nazywa h-induktywizmem (od *hypothetico-inductivist*). Ma tu na myśli pogląd, w myśl którego przyjmowanie aksjomatów dla danej dyscypliny matematycznej może być motywowane nie tyle ich oczywistością, co raczej skutecznością w porządkowaniu danej dyscypliny (gdyż wnioski z tych aksjomatów mogą być niekiedy bardziej oczywiste niż same aksjomaty)[79]. Wśród zwolenników tego

---

[78] Ta uwaga może wydawać się nieco niejasna. Chodzi jednak o rzecz stosunkowo prostą: np. elementarne fakty geometrii euklidesowej możemy dowodzić „szkolnymi" metodami geometrycznymi, ale możemy też interpretować je przez geometrię analityczną jako twierdzenia dotyczące pewnych równań algebraicznych i korzystać z silnych wyników dotyczących np. istnienia punktów stałych pewnych abstrakcyjnych przekształceń, własności klas rozwiązań takich równań etc. Z punktu widzenia rozumienia g e o m e t r y c z n e j natury problemu (np. tego, że dwusieczne trójkąta przecinają się w jednym punkcie, co możemy udowodnić intuicyjnie, wyobrażając sobie „rosnące" okręgi wpisane w kąty trójkąta), wprowadzanie zaawansowanych metod zaciemnia obraz (choć oczywiście pozwala na udowodnienie owych elementarnych twierdzeń).

[79] Mancosu odwołuje się tu do koncepcji Milla, zdaniem którego nauki dedukcyjne mają także charakter nauk indukcyjnych, opierających się na danych empirycznych. Rzeczywiscie, Mill jest radykalnym empirystą twierdzącym, iż np. geometria stanowi naukę empiryczną opartą na idealizacji danych naszego

poglądu Mancosu wymienia Russella[80] i Gödla[81], a także Lakatosa. Rzeczywiście, *quasi*-empiryczne stanowisko tego ostatniego narzuca tutaj pewną perspektywę: otóż poszukiwanie nowych podstawowych zasad jest motywowane m.in. potrzebą zorganizowania i wyjaśnienia danych „codziennego matematycznego doświadczenia". Zadaniem teorii sformalizowanej jest wyjaśnianie wyników uzyskanych na etapie tworzenia niesformalizowanej matematyki[82]. Zaś fal-

---

codziennego doświadczenia. „Każde twierdzenie geometrii jest prawem dotyczącym natury zewnętrznej i można by je było ustalić, uogólniając na podstawie obserwacji i eksperymentu, które w tym przypadku sprowadzało się do porównania i mierzenia" (Mill 1962: 211). Analizę filozofii matematyki Milla zawiera praca Kitchera (1998), por. też: Shapiro 2000, Skorupski 2005, Wójtowicz 2006.

80 „Kiedy badamy zasady matematyki […] mamy tendencję do wiary w przesłanki, ponieważ widzimy, że ich konsekwencje są prawdziwe, zamiast wierzyć we wnioski, ponieważ przesłanki są prawdziwe. Jednak wyprowadzanie przesłanek z wniosków jest istotą indukcji, a zatem metodą badań zasad matematyki jest metoda indukcyjna, zasadniczo identyczna z metodą odkrywania ogólnych praw w dowolnej nauce" (Russell 1973: 273–274; cyt. za: Mancosu 2001). „Gdy czysta matematyka jest zorganizowana jako system dedukcyjny [...] staje się oczywiste, że nie wierzymy w prawdy czystej matematyki tylko dlatego, że wierzymy w prawdziwość przesłanek. Niektóre z przesłanek są mniej oczywiste niż ich konsekwencje i wierzymy w nie głównie ze względu na ich konsekwencje. Tak jest zawsze, kiedy nauka jest przedstawiona jako system dedukcyjny [...]. Nasze racje dla wierzenia w logikę i czystą matematykę są, po części, indukcyjne" (Russell 1924: 325–326; cyt. za: Mancosu 2001).

81 Mancosu ma na myśli oczywiście „drugi filar" wiedzy matematycznej, o którym mówił Gödel. Gödel – odnosząc się do koncepcji Russella – pisze, iż ten „porównuje [...] aksjomaty logiki i matematyki z prawami przyrody, a oczywistość logiczną z percepcją zmysłową, tak że aksjomaty nie muszą koniecznie być oczywiste same przez się, ale ich uzasadnienie bazuje (dokładnie tak, jak w fizyce) na fakcie, iż pozwalają one wydedukować te »dane zmysłowe«" (Gödel 1944: 81). Można powiedzieć, że w pewnym sensie owe kryteria heurystyczne w poszukiwaniu aksjomatów mają charakter eksplanacyjny, jednak tutaj wyjaśniamy, dlaczego dany aksjomat jest prawdziwy przez wskazanie na jego owocne konsekwencje. Podobnie można patrzeć na analizowane przez Mancosu ujęcie Pringsheima: chodzi o takie wprowadzenie podstawowych pojęć, aby znane fakty wynikały z nich w sposób naturalny – a więc to owe fakty stanowią uzasadnienie dla wyboru takich, a nie innych pojęć jako podstawowych.

82 Lakatos pisze np.: „wyrafinowane aksjomaty [...] nawet jeśli są prawdziwe, to ich prawdziwość [...] nie jest taka oczywista [...]; matematykę klasyczną można za ich pomocą w y j a ś n i ć – ale z pewnością nie ugruntować" (Lakatos 2002: 226).

syfikatory heurystyczne, o których pisze Lakatos, to właśnie zdania matematyki nieformalnej, które mają służyć jako swoiste testery dla sformalizowanych wersji teorii. Rzecz jasna, z punktu widzenia koncepcji ucznia Poppera pojęcie wyjaśnienia jest istotne dla rozumienia matematyki, gdyż: „Czynnikiem, który rozstrzyga o przyjęciu tej czy innej z konkurencyjnych teorii, jest na ogół ich względna siła eksplanacyjna” (Lakatos 2002: 238).

Cytowani badacze (Steiner, Resnik, Kushner i Mancosu) nie podejmują wprost problemu dowodów komputerowych, ale ich uwagi można w naturalny sposób odnieść do dyskusji dotyczącej statusu takich dowodów z punktu widzenia problemu wyjaśniania. Zagadnienie dotyczy tego, gdzie należy je ulokować na skali dowodów: od czysto formalnych i jedynie wymuszających na nas zgodę na wynik, po dowody podające racje i ujawniające ukryte przyczyny zjawisk. Ocena nie jest oczywista. W pierwszym odruchu mielibyśmy zapewne ochotę uznać takie dowody za czysto formalne i niewyjaśniające. Z drugiej strony należy zauważyć, że przecież dowód 4CT nie został przeprowadzony w całości przez komputer. Składają się nań wcześniejsze dokonania w dziedzinie matematyki, wraz z nietrywialnymi ideami rozwijanymi przez dziesiątki lat (które m.in. pozwoliły na udowodnienie szeregu wyników cząstkowych). Zarazem jednak znaczący fragment dowodu jest „przeliczony” – bo komputer po prostu sprawdza mnóstwo przypadków szczegółowych. Można powiedzieć, że wprawdzie jest to swoisty dowód przez indukcję enumeracyjną zupełną (gdzie odpowiedzialny za weryfikację przypadków szczegółowych jest komputer), ale to jednak matematycy wskazują owe przypadki do weryfikacji.

Zaklasyfikowanie dowodów komputerowych do klasy „siłowych” bądź wyjaśniających będzie zależeć od tego, jak rozumie się pojęcie wyjaśniania. Przypuszczam jednak, że zawsze matematycy będą mieli uczucie pewnego niedosytu – nawet jeśli nie będą formułowali tez tak radykalnych jak Rota (który – przypomnijmy – jest bliski stwierdzenia, że nie rozumiemy przyczyn, dla których 4CT zachodzi i że dowód komputerowy nie stanowi w gruncie rzeczy rozwiązania problemu). Istnienie dowodów komputerowych zobowiązuje nas do bardziej uważnej analizy pojęcia wyjaśniania w matematyce i do uznania owego pojęcia za filozoficznie doniosłe. To uważam za wniosek bezsporny (niezależnie od tego, jak ostatecznie to pojęcie zostanie doprecyzowane).

Dodam na marginesie, że nie sądzę, aby koncepcja *derivation-indicator view* Azzouniego wnosiła coś istotnego do dyskusji dotyczącej wyjaśniania w matematyce. Z punktu widzenia tej propozycji u podłoża każdego realnego dowodu leży pewna derywacja w formalnym systemie. Nie ulega wątpliwości, że przykładem tego typu formalnej derywacji jest obliczenie wykonane przez stosowną maszynę Turinga. Czy istnienie dowodów komputerowych w jakiś sposób wzmacnia tezę Azzouniego? Innymi słowy: czy fakt, że pewne dowody dają się „skomputeryzować" stanowi argument na rzecz *derivation-indicator view*? Sądzę, że akurat tutaj analogie są powierzchowne: fakt, że dana derywacja została przeprowadzona przez komputer, nie czyni jej bardziej dostępnej poznawczo, niż gdyby nie miała komputerowej implementacji. Sam fakt, że taka derywacja istnieje, nie czyni jej poznawczo dostępną. Należy przy tym pamiętać, że teza Azzouniego jest znacznie silniejsza i niekonstruktywna: żąda bowiem jedynie tego, aby w jakimś (bliżej nieznanym) systemie algorytmicznym taka derywacja istniała. Trudno jednak twierdzić, że z punktu widzenia matematyków dostatecznym wyjaśnieniem natury danego dowodu (mówiąc żargonowo: wyjaśnieniem tego jak i dlaczego „chodzi" dany dowód) jest fakt, że oto w jakimś algorytmicznym, bliżej nieznanym systemie istnieje formalna derywacja.

7. Uwagi końcowe

Odrębnym problemem, pojawiającym się w tym kontekście, jest udział czynnika empirycznego w dowodach komputerowych. Nie ulega bowiem wątpliwości, że w dowodzie komputerowym czynniki takie biorą udział w bardzo istotny sposób: dowodzenie jest tutaj sprzężone z pewnego typu eksperymentem fizycznym.

Pytanie o wagę tego problemu sprowadza się do rozstrzygnięcia następujących kwestii:

1. Czy użycie komputera w dowodach ma istotnie inny charakter niż użycie kartki i ołówka?

2. A jeśli tak, to czy ma to istotne znaczenie dla statusu tak uzyskanej wiedzy?

Entuzjaści dowodów komputerowych będą skłonni twierdzić, że użycie komputera przypomina użycie kartki i ołówka (lub liczydła), które przecież też są obiektami fizycznymi, podlegającymi prawom empirycznym. A jednak ich stosowanie nie budzi absolutnie żadnych wątpliwości – nie dzielimy przecież twierdzeń na twierdzenia: (1) udowodnione w pamięci; (2) udowodnione z użyciem jednej kartki; (3) udowodnione z użyciem wielu kartek i kilku pisaków etc. Tym samym więc winniśmy zaakceptować dowody komputerowe i uznać je za dowody tego samego typu co tradycyjne.

Pojawia się jednak wątpliwość, czy różnica między komputerem a liczydłem jest jedynie różnicą stopnia. W naszym opisie działania liczydła (lub zachowania kartki) nie biorą udziału żadne skomplikowane teorie fizyczne. Opieramy się tu jedynie na codziennej obserwacji i zdrowym rozsądku. Natomiast w przypadku komputera mamy do czynienia ze złożoną wiedzą fizyczną i inżynierską. Wiara w nowe twierdzenie jest nieodłącznie sprzężona z wiarą w teorie fizyczne, które z kolei mają jedynie uzasadnienie indukcyjne. Uzyskana w ten sposób wiedza ma jakościowo inny charakter niż wiedza zdroworozsądkowa.

Czy użycie komputera wprowadza *novum* do matematyki? Czy można tu mówić o empirycznej składowej, której charakter jest czymś istotnie nowym w stosunku do użycia liczydeł lub posługiwania się notatkami w trakcie dowodzenia? Przecież przy użyciu liczydła czy robieniu notatek niewątpliwie opieramy się na założeniach o charakterze empirycznym, dotyczących np. tego, że liczydło nie zmienia się w trakcie obliczeń albo symbole na kartce nie zmieniają się samoistnie.

Dalsze rozważania na temat aspektów empirycznych w dowodzeniu komputerowym prowadzę w kolejnych rozdziałach. Są one poświęcone teorii obliczeń kwantowych oraz problematyce hiperobliczeń. Filozoficzne zagadnienia dotyczące empirycznych składowych matematyki mogą być tam sformułowane w bardziej wyraźny sposób.

ROZDZIAŁ 4

Teoria obliczeń kwantowych

W poprzednim rozdziale był rozważany problem dowodów komputerowych i związanych z nimi trudności filozoficznych. Podsumowując wyniki prowadzonych tam obserwacji, należy stwierdzić, że analizy wymagają dwa podstawowe typy zagadnień:

1. Problem obecności czynnika empirycznego w dowodach matematycznych.

2. Problem „zysku poznawczego" wynikającego z zastosowania dowodów komputerowych (w szczególności problem eksplanacyjnej mocy takich dowodów).

Obie te kwestie nabierają jeszcze większej wagi w przypadku modelu obliczeń, w którym wykorzystuje się specyfikę świata kwantowego – czyli modelu obliczeń kwantowych. Jest to na razie model teoretyczny: nie zostały bowiem do tej pory skonstruowane użyteczne komputery kwantowe, gdyż wiąże się to z koniecznością pokonania ogromnych przeszkód technicznych. Należy jednak podkreślić, że w tej kwestii odnotowano pierwsze (umiarkowane) sukcesy: skonstruowano komputer zawierający kilka tzw. kubitów (czyli elementarnych w tym modelu obliczeń bramek). Chociaż nie jest jasne, czy kiedykolwiek komputer kwantowy faktycznie powstanie, to nawet jego teoretyczny model jest filozoficznie inspirujący.

W tym rozdziale zajmuję się prezentacją podstaw teorii obliczeń kwantowych i znaczeniem tego modelu dla analizy problemu natury dowodu matematycznego[1]. Stanowi on naturalną kontynuację po-

[1] Nie zajmuję się tutaj szerzej rozumianymi problemami filozoficznymi dotyczącymi mechaniki kwantowej, takimi jak np. problem pomiaru, kryteriów identyczności, logiki adekwatnej do opisu mikroświata, determinizmu, nierówności Bella, paradoksu EPR etc. Podejmuję jedynie problem (hipotetycznych) dowodów matematycznych wykorzystujących algorytmy kwantowe.

przedniego rozdziału, dotyczącego dowodów komputerowych, gdyż pozwala na wyraźniejsze postawienie pewnych kwestii (zaś rozważane tam eksperymenty myślowe czyni mniej spekulatywnymi). Stanowi też naturalny wstęp do kolejnej części, w której dyskutuję teoretyczne modele hiperobliczeń i ich znaczenie dla filozofii matematyki.

1. Praktyczne ograniczenia w obliczeniach*

Jednym z podstawowych pojęć teorii obliczeń jest p r o b l e m r o z s t r z y g a l n y – czyli taki, dla którego daje się zdefiniować maszyna Turinga (algorytm) rozwiązująca go. Proste przykłady problemów rozstrzygalnych to np.: sprawdzenie, czy dana liczba *a* jest sumą dwóch danych innych liczb *b*, *c*; sprawdzenie, czy dana liczba naturalna *n* jest liczbą pierwszą; sprawdzenie, czy dana formuła rachunku zdań jest tautologią etc.[2] W każdym z tych przypadków możemy podać o g ó l n y algorytm, który działa dla dowolnej instancji problemu. Liczne przykłady problemów rozstrzygalnych możemy znaleźć w teorii liczb, kombinatoryce, teorii grafów, logice etc.

Nie wszystkie problemy są rozstrzygalne – często nie istnieje ogólny algorytm (maszyna Turinga), który potrafi rozwiązać zagadnienie danego typu[3]. W tym rozdziale będą nas interesować tylko problemy rozstrzygalne. Można wśród nich wskazać naturalną hie-

* W niektórych akapitach prezentacji modelu obliczeń kwantowych opieram się na artykule Wójtowicz 2006a.

[2] Intuicyjnie: algorytm badania pierwszości polega na sprawdzeniu, czy któraś z liczb mniejszych od *n* (a tak naprawdę wystarczy $\sqrt{n}+1$) jest dzielnikiem *n*. Algorytm sprawdzania tautologiczności liczy wartość logiczną formuły po kolei dla wszystkich wartościowań.

[3] Standardowy przykład problemu nierozstrzygalnego to problem stopu: nie istnieje maszyna Turinga, która – otrzymując jako dane wejściowe: (1) opis innej maszyny Turinga *M*; (2) dane początkowe *x* – byłaby w stanie stwierdzić, czy maszyna *M* dla danych wejściowych *x* zatrzyma się, czy zapętli. Inny przykład to dziesiąty problem Hilberta: nie istnieje o g ó l n y algorytm pozwalający na stwierdzenie, czy dane równanie o współczynnikach całkowitych ma rozwiązanie.

rarchię trudności. Jest oczywiste, że mniej obliczeń trzeba wykonać, aby dodać do siebie dwie liczby, niż aby np. znaleźć ich najmniejszą wspólną wielokrotność; łatwiej podnieść liczbę do kwadratu, niż rozłożyć ją na czynniki pierwsze. Te intuicyjne obserwacje mają swoje formalne odpowiedniki: problemy klasyfikujemy ze względu na ich złożoność obliczeniową, czyli czas potrzebny do ich rozwiązania, a czas ten mierzymy liczbą kroków wykonanych przez daną maszynę Turinga[4].

Obliczeniowa trudność problemu nie polega więc na tym, że trudno go nam zrozumieć, ale na tym, że trzeba wykonać dużą liczbę operacji. Znanym przykładem prostego pojęciowo, ale obliczeniowo trudnego problemu jest kwestia, czy dana formuła rachunku zdań to tautologia. Znana ze szkoły metoda tabelkowa sprowadza się do tego, że liczymy wartość logiczną formuły dla wszystkich wartościowań, których jest 2^n, gdzie *n* to liczba zmiennych (dla n=10 są to 1024 wartościowania, dla n=20 jest 1048576 wartościowań). W przypadku formuły liczącej 1000 zmiennych sprawdzenie jej tautologiczności metodą klasyczną nie jest fizycznie możliwe.

Być może istnieje szybszy algorytm sprawdzania, czy dana formuła rachunku zdań jest tautologią[5]. Problem jego istnienia znamy jako pytanie „P=NP?" i jest to jeden z tzw. problemów milenijnych, za rozwiązanie którego czeka nagroda w wysokości miliona dolarów. Większość ekspertów sądzi, że odpowiedź na to pytanie jest negatywna, ale jak na razie nikt tego nie udowodnił[6]. Gdyby taki algorytm jednak istniał, byłoby to ważne nie tylko ze względu na ra-

4 Teoria złożoności obliczeniowej to obszerna gałąź informatyki teoretycznej (mająca oczywiście też istotny wymiar praktyczny), por. np. Papadimitriou 2002.

5 Należy tu podkreślić, że chodzi o ogólną metodę, działającą dla wszystkich formuł.

6 Dla problemów z klasy NP (od *nondeterministic polynomial*) istnieje niedeterministyczny wielomianowy algorytm. Mówiąc swobodnie: możemy zgadnąć rozwiązanie (na tym – obrazowo – polega niedeterminizm) i w czasie wielomianowym sprawdzić, czy faktycznie jest ono dobre. W przypadku problemu spełnialności – to oczywiste: zgadujemy potrzebne wartościowanie i w czasie wielomianowym sprawdzamy, że faktycznie spełnia ono badaną formułę. Klasa P to klasa problemów rozstrzygalnych wielomianowo. A zatem teza „P=NP" głosi (mówiąc swobodnie), że problemy, dla których można zgadnąć rozwiązanie

chunek zdań, ale też dlatego, że dałby się on „przetłumaczyć" na algorytmy rozwiązujące cały szereg problemów kombinatorycznych. Jest tak, ponieważ zagadnienie spełnialności formuł SAT (równoważne kwestii tautologiczności: formuła α to tautologia dokładnie wtedy, gdy formuła $\neg\alpha$ nie jest spełnialna) stanowi problem NP-zupełny, co oznacza, że każdy problem z klasy problemów NP daje się zredukować (z co najwyżej wielomianową stratą czasową) do problemu SAT[7]. Znając stosowny algorytm sprawdzania tautologiczności formuł rachunku zdań, moglibyśmy więc podać (z co najwyżej wielomianową stratą czasu) algorytm dla wielu innych trudnych obliczeniowo problemów. Jednak znane (deterministyczne) algorytmy dla problemów z klasy NP mają wykładniczą złożoność[8].

Komputerowe rozwiązanie problemu tautologii KRZ wchodzi więc teoretycznie w grę (algorytm jest pojęciowo bardzo prosty: przelicz wszystkie wartościowania), ale żaden komputer nie podoła – w ogólnym przypadku – przeprowadzeniu takich obliczeń. W wypadku formuły KRZ zawierającej np. 1000 zmiennych Wszechświat jest za mały, a jego czas życia zbyt krótki, aby zmieścił się w nim dostatecznie duży komputer i zdążył przeprowadzić obliczenia. Fizyczna realizacja algorytmu nie jest więc możliwa[9].

Fakt, że pewne problemy są bardzo złożone i nie znamy szybkich algorytmów pozwalających na ich rozwiązanie, ma także swoje dobre strony. Dzięki temu np., że problem faktoryzacji (rozkładu liczby na czynniki pierwsze) jest trudny obliczeniowo, możemy korzystać z szyfrowania wiadomości. Popularna metoda szyfrowania RSA

---

i sprawdzić w czasie wielomianowym, dają się też po prostu rozwiązać w czasie wielomianowym.

7 Pojęcie NP-zupełności zostało wprowadzone przez Cooka (1971).

8 Klasa NP obejmuje bardzo wiele ciekawych problemów kombinatorycznych dotyczących np. grafów: problem komiwojażera, problem istnienia cyklu Hamiltona, problem kliki, różne problemy związane z kolorowaniem, problemy podziałowe etc. (monograficzne ujęcie problematyki NP-zupełności zawiera Garey, Johnson 1979, por. też Papadimitriou 2002).

9 W praktyce w wielu wypadkach korzysta się z algorytmów probabilistycznych, które wprawdzie nie dają gwarancji dobrej odpowiedzi, ale udzielają jej z prawdopodobieństwem dostatecznie dużym, aby można było stosować je w praktyce.

opiera się właśnie na tym, że trudno jest rozłożyć liczbę na czynniki pierwsze.

Pewne problemy są więc teoretycznie rozstrzygalne, ale zbyt złożone, aby można je było rozwiązać w praktyce w klasycznym modelu obliczeń, tj. za pomocą maszyny Turinga (*scil.* komputera). Tworzy się jednak modele obliczeń wykorzystujące specyfikę świata kwantowego, które pozwalają na szybsze rozwiązanie niektórych z nich. Najbardziej znany z algorytmów kwantowych (algorytm Shora; Shor: 1994, 1997) dotyczy właśnie tego zagadnienia i pozwala na szybkie złamanie kodu (ściśle: pozwalałby, gdyby istniały komputery kwantowe). Algorytm ów stanowił swoistą sensację i dał wyraźny impuls do rozwoju teorii obliczeń kwantowych. Prezentacji wybranych pojęć tej teorii jest poświęcona kolejna część rozdziału.

2. Obliczenia w świecie kwantów*

Klasyczne obliczenie polega na mechanicznym przekształcaniu ciągów 0 i 1 i nie odwołuje się oczywiście do specyfiki świata kwantowego. Tradycyjny algorytm można byłoby więc realizować na mechanicznym modelu (abstrahuję oczywiście od kwestii praktycznych). Inaczej jest w przypadku obliczeń kwantowych, gdzie w nieuchronny sposób ingerują zjawiska kwantowe. O ile więc można zbudować uniwersalną maszynę Turinga z drewna, to nie da się zbudować z drewna jej kwantowego odpowiednika.

* Prezentacja nie ma oczywiście charakteru kompletnego. Jej celem jest raczej ukazanie Czytelnikowi specyfiki tego modelu i uwikłania weń zjawisk kwantowych niż techniczna analiza. Istnieje szereg prac na ten temat o różnym stopniu teoretycznego zaawansowania. W języku polskim są dostępne popularne książki (Milburn 2000, Johnson 2005) oraz bardziej techniczne (Giaro, Kamiński 2003, Hirvensalo 2004). Przystępne wprowadzenie w problematykę zawiera praca Deutsch, Ekert, Lupacchini 2000. W ostatnich latach pojawiło się wiele prac na temat teorii obliczeń kwantowych, monograficzne ujęcia to np.: Nielsen, Chuang 2000, Kitaev, Shen, Vyalyi 2002, Stolze, Suter 2004, Kaye, Laflamme, Mosca 2007, Mermin 2007, Nakahara, Ohmi 2008i inne. W Internecie można rozpocząć poszukiwania np. od strony http://www.qubit.org/.

Zacznijmy od prostego przykładu. Wyobraźmy sobie losową procedurę U, realizowaną przez urządzenie (czarną skrzynkę) M_U. Otrzymuje ono na wejściu 0 lub 1, zaś na wyjściu, niezależnie od wejścia, z jednakowym prawdopodobieństwem (równym ½) podaje 0 lub 1 ([10]).

Rozważmy teraz sytuację, w której urządzenie M_U zostało uruchomione dwukrotnie, co jest równoważne temu, że mamy dwa urządzenia realizujące procedurę U. Schemat działania byłby w tym wypadku następujący:

1. Wybieramy daną wejściową (np. 0).
2. Uruchamiamy pierwsze urządzenie M_U, które wykonuje operację U na danej wejściowej 0.
3. Wynik działania pierwszego urządzenia przekazujemy do drugiego.
4. Uruchamiamy drugie urządzenie M_U, które wykonuje operację U na otrzymanej z pierwszego urządzenia danej.
5. Obserwujemy wynik działania drugiego urządzenia.

Jaki będzie wynik owego działania? Każdy człowiek wychowany w świecie fizyki klasycznej odpowie, że nie wiadomo. Niezależnie bowiem od tego, co zadaliśmy pierwszemu urządzeniu M_U na wejściu, ostateczny wynik ma losowy charakter (tzn. $UU(0)$ i $UU(1)$ to wyniki uzyskane losowo). Wiedza na temat danej wejściowej nic nie daje, bo i tak zostaje ona utracona już w wyniku wykonania pierwszej operacji.

W świecie klasycznym nie można skonstruować więc urządzenia M_U, które działa losowo (jak rzut monetą), ale którego dwukrotne zastosowanie daje wynik w pełni deterministyczny. Natomiast w świecie kwantów takie urządzenie M_U istnieje: wynik jednokrotnej realizacji procedury U jest losowy, natomiast $U^2(0)=1$ oraz $U^2(1)=0$. Możemy taką operację U nazwać „pierwiastkiem z negacji", gdyż $U^2(p)=\neg p$. Oczywiście U wykorzystuje specyfikę świata kwantowego. Dla zrozumienia zasady działania takiego układu jest niezbędne

[10] Możemy wyobrażać sobie, że U to rzut monetą: odbiera daną wejściową (0 lub 1), zaś na wyjściu „zwraca" wynik rzutu monetą (czyli 0 lub 1). Oczywiście to, jakie jest wejście, nie ma znaczenia, bo tę informację i tak traci się w wyniku rzucania monetą.

wprowadzenie kilku podstawowych pojęć. Prezentacja tychże będzie jednak miała charakter głównie ideowy; Czytelnik zainteresowany szczegółami technicznymi znajdzie je w Dodatku (który składa się z komentarzy dotyczących pewnych punktów poruszanych w tym paragrafie).

W klasycznej teorii informacji mówimy o bitach, które przyjmują wartości 0 i 1. Jedna liczba (0 lub 1) stanowi więc pełen opis danego bitu. Natomiast podstawowym pojęciem kwantowej teorii obliczeń jest kubit (ang. *qubit*) – kwantowy bit informacji, czyli kwantowy odpowiednik klasycznego bitu. Kubity są tworami bardziej złożonymi niż bity, do ich opisania nie wystarczy tylko 0 i 1.

Wyobraźmy sobie, że pewien układ fizyczny (od tej pory będziemy mówić o układach kwantowych) może występować w różnych stanach, wśród których wyróżnimy dwa stany podstawowe, tworzące swoistą bazę dla wszystkich pozostałych. Oznaczymy je przez $|0\rangle$ oraz $|1\rangle$ ([11]). Kluczowe jest to, że układ kwantowy występuje zawsze w stanie, który można opisać jako kombinację liniową („mieszaninę") tych dwóch wyróżnionych stanów bazowych. Przykładem takiego układu jest elektron, którego spin opisujemy, lub spolaryzowany foton. Nie interesują nas tu jednak fizyczne realizacje kubitów – ważne jest to, że takie obiekty istnieją. Stan takiego układu kwantowego można opisać wyrażeniem $a_0|0\rangle + a_1|1\rangle$, gdzie a_0 i a_1 są współczynnikami odgrywającymi rolę wag[12]. Współczynniki te są liczbami zespolonymi, spełniającymi warunek $|a_0|^2+|a_1|^2=1$ (gdzie $|z|$ oznacza moduł danej liczby zespolonej z)[13]. Mówiąc obrazowo, układ jest w stopniu a_0 w stanie $|0\rangle$, zaś w stopniu a_1 w stanie $|1\rangle$.

---

11 Dla usunięcia ewentualnych nieporozumień chcę podkreślić, że omawiam tutaj tylko sytuację ważną z punktu widzenia teorii obliczeń kwantowych. W ogólnym przypadku układu kwantowego tych bazowych stanów może być więcej, a opis układu kwantowego może być znacznie bardziej skomplikowany.

12 Mówiąc bardzo swobodnie, współczynnik określa „udział" danego stanu bazowego w stanie układu.

13 Liczbę zespoloną z można przedstawić w postaci $z=a+bi$, gdzie i jest jednostką urojoną – jest to liczba, której kwadrat wynosi -1: $i^2=-1$. Na płaszczyźnie jest wygodnie przedstawić liczbę zespoloną z w formie wektora o początku w $(0,0)$ i końcu w punkcie (a,b). Moduł z, czyli $|z|$, to po prostu długość tego wektora, którą obliczamy zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa: $|z| = \sqrt{(a^2+b^2)}$.

Jest to oczywiście sprzeczne z naszymi intuicjami ukształtowanymi w świecie klasycznym, ale tak właśnie sformułowano mechanikę kwantową. Z matematycznego punktu widzenia kubit jest więc po prostu wektorem długości 1 w dwuwymiarowej przestrzeni Hilberta[14].

Obliczenie klasycznej maszyny Turinga polega na tym, że początkowy ciąg zer i jedynek na taśmie jest przetwarzany zgodnie z jej instrukcjami. Obliczenie kwantowe polegać będzie natomiast na tym, że będzie przetwarzany stosowny ciąg kubitów (czyli swoistych „mieszanek" zer i jedynek z zespolonymi współczynnikami)[15]. Z fizycznego punktu widzenia krok takiego obliczenia sprowadza się do tego, że pewien układ kwantowy został poddany pewnej operacji (na przykład grupa fotonów zostaje wpuszczona w układ półprzepuszczalnych luster). Z punktu widzenia opisu matematycznego krok działania takiego urządzenia liczącego to przekształcenie kubitu (lub zestawu – tzw. rejestru – kubitów) zgodnie z pewną opisaną matematycznie procedurą. Obliczenie kwantowe to ciąg takich kroków, zaś elementarne przekształcenie nazwiemy „bramką kwantową" (por. Uwaga 1 w Dodatku). Ewolucja układu („podróż" kubi-

[14] W popularyzatorskich pracach pojawiają się niekiedy rysunki przestawiające kulkę wirującą w jedną lub w drugą stronę. Zadaniem Czytelnika jest wyobrażenie sobie spinu elektronu jako kierunku obrotu takiej kulki. Kiedy mamy przed oczyma obraz wirującej kulki, to niewątpliwie naszej wyobraźni trudno pogodzić się z faktem, że układ może być w takiej dziwnej mieszaninie stanów (np. elektron kręci się w 87% w lewo, zaś w 13% w prawo). Sądzę, że lepiej nie wyobrażać sobie elektronu jako kulki wirującej jednocześnie w dwie przeciwne strony, ale przyjąć, że jest to obiekt fizyczny opisywany matematycznie w określony sposób, zaś wszelkie wyobrażenia są zwodnicze. Fakt, że wagi są liczbami zespolonymi, a nie rzeczywistymi, może stanowić dodatkową trudność pojęciową (możemy sobie wyobrazić, że coś jest w 50% czarne, ale co znaczy, że coś jest czarne w stopniu $(1+i)/2$?), jednak formalizm mechaniki kwantowej opisuje stany układów kwantowych w taki właśnie sposób, niezależnie od naszych możliwości wyobrażenia sobie tego faktu.

[15] To, że wektory bazowe oznaczamy przez $|0\rangle$ oraz $|1\rangle$, nie jest dziełem przypadku – ułatwia to po prostu opis sytuacji, w której stosujemy układ kwantowy do wykonania obliczenia. Jeśli daną wejściową jest 0 (*resp.* 1), to musimy przygotować układ kwantowy w początkowym stanie $|0\rangle$ (*resp.* $|1\rangle$). Jeśli chcemy przetwarzać n-elementowy ciąg 0–1, to musimy przygotować układ n kubitów w stosownym stanie początkowym.

tów przez ciąg bramek) pozwala na wykorzystanie specyfiki świata kwantowego, która jest źródłem efektywności kwantowych algorytmów. Potencjał obliczeń kwantowych ujawnia się, gdy rozważymy układy złożone z większej liczby kubitów. Odpowiadają one układom kwantowym składającym się z większej liczby układów prostszych – może być to np. układ 10 fotonów, traktowanych i opisywanych jako j e d e n układ.

Przypomnijmy, że jeden foton opisujemy jako kubit postaci $a_0|0\rangle + a_1|1\rangle$ – potrzebne do jego opisania są więc d w i e liczby zespolone. Ile potrzeba ich do opisania stanu układu złożonego z 10 kubitów? Nawyki ze świata klasycznego podpowiadają nam, że powinno wystarczyć 20 liczb (dla każdego z kubitów – po dwie)[16]. Tak jednak nie jest. Dla opisania układu n kubitów potrzeba 2^n współczynników (mówimy, że w y m i a r przestrzeni stanów wynosi 2^n). Aby opisać stan układu składającego się z 10 fotonów, musimy podać 1024 współczynniki, zaś dla opisania układu 20 fotonów potrzeba 1 084 576 współczynników.

Przestrzeń stanów układu n-kubitowego jest więc bardzo złożona (por. Uwaga 2 w Dodatku). Tu ujawnia się specyfika kwantowego świata. Kiedy rozważamy układ dwóch punktów na płaszczyźnie (interesują nas ich położenia), to oczywiście możemy opisać każdy z nich z osobna (*de facto* opis stanu układu polega po prostu na opisie dwóch pojedynczych punktów). W przypadku układu kwantowego może to jednak nie mieć sensu: może się zdarzyć, że układ j a k o c a ł o ś ć jest w pewnym stanie (opisanym wektorem $c_{00}|00\rangle+c_{01}|01\rangle+c_{10}|10\rangle+c_{11}|11\rangle$), natomiast nie ma sensu określenie indywidualnych stanów poszczególnych kubitów. Mówimy wówczas o stanach splątanych (pojęcie to nie ma makroskopowego odpowiednika), czyli takich, które nie dają się rozłożyć na iloczyn stanów poszczególnych kubitów składowych. Oczywiście stan $(a_0|0\rangle+a_1|1\rangle)(b_0|0\rangle+b_1|1\rangle)$ nie jest splątany: każdy z kubitów składowych ma dobrze określony, indywidualny stan. Jednak nie każ-

---

[16] Jeśli opisujemy np. punkty na płaszczyźnie i interesuje nas tylko ich położenie, to aby opisać stan układu złożonego z 10 takich punktów, wystarczy nam 20 liczb.

dy stan $c_{00}|00\rangle+c_{01}|01\rangle+c_{10}|10\rangle+c_{11}|11\rangle$ daje się przedstawić w postaci takiego iloczynu.

Analogiczna sytuacja występuje w wypadku układów złożonych z większej liczby kubitów. W ogólnym przypadku, kiedy mamy układ n kubitów, to jego stan nie zawsze daje się przedstawić w postaci takiego iloczynu i jest konieczne podanie 2^n współczynników. Wymiar przestrzeni stanów wynosi więc 2^n. To pokazuje, dlaczego tak bardzo trudno komputerowo symulować ewolucję układu kwantowego. Aby opisywać ewolucję układu złożonego z n kubitów, trzeba opisywać jednoczesną ewolucję 2^n współczynników (z których każdy jest liczbą zespoloną). Nie jest to oczywiście praktycznie wykonalne w przypadku np. 1000 kubitów.

2.1. Przykłady bramek kwantowych

Jak wspomniano wyżej, opis ewolucji rejestru (ciągu) kubitów podano w terminach (ciągu) bramek kwantowych. Jednym z takich operatorów jest tzw. pierwiastek z negacji, czyli operator, o którym była mowa na początku rozdziału (por. też Uwaga 3 w Dodatku). Należy jednak odnotować pewien ważny fakt. Same bramki kwantowe (których matematycznymi odpowiednikami są stosowne operatory na odpowiednich przestrzeniach Hilberta) nie mają charakteru losowego: przekształcają po prostu pewne stany (wektory przestrzeni Hilberta) na inne. Dlaczego więc twierdzimy, że √NOT działa losowo? Tu wkracza na scenę problematyka pomiaru kwantowego. Aby bowiem dowiedzieć się czegoś o stanie układu kwantowego, musimy dokonać pomiaru, który ma charakter probabilistyczny, zgodnie z jednym z podstawowych postulatów mechaniki kwantowej. Na nasze potrzeby wystarczy tu uproszczona wersja postulatu mówiącego o pomiarze, odnosząca się do kubitów:

POSTULAT: Jeśli dokonujemy pomiaru układu kwantowego znajdującego się w stanie $a_0|0\rangle+a_1|1\rangle$, to możliwe są dwa wyniki pomiaru: 0 oraz 1. Prawdopodobieństwo uzyskania wyniku pomiaru 0 wynosi $|a_0|^2$, zaś prawdopodobieństwo pomiaru wyniku 1 wynosi $|a_1|^2$.

Po pomiarze układ znajduje się w stanie odpowiadającym wynikowi pomiaru[17].

Jeśli więc układ jest w ogólnym stanie $a_0|0\rangle+a_1|1\rangle$ i wynikiem pomiaru jest 0, to o stanie układu sprzed pomiaru możemy wywnioskować jedynie, że $a_0\neq 0$. Po pomiarze układ znajdzie się w stanie $|0\rangle$ (i tym samym następny pomiar już na pewno da wynik 0).

Powróćmy do pierwiastka z negacji. Operator √NOT działa – jak wspomnieliśmy – w sposób deterministyczny i przekształca wektor $|0\rangle$ na inny wektor u ([18]). Łatwo obliczyć, iż prawdopodobieństwo, że pomiar układu znajdującego się w takim stanie u, da wynik 0, wynosi ½; takie samo jest prawdopodobieństwo, że da wynik 1. A zatem procedura polegająca na:

1. przygotowaniu układu kwantowego w stanie $|0\rangle$;
2. zastosowaniu operatora √NOT do tego układu;
3. pomiarze stanu układu;

jest procedurą całkowicie losową. Natomiast jeśli po pierwszym √NOT nie wykonamy pomiaru, ale przekażemy wynik dalej i drugi raz zastosujemy operator √NOT, to otrzymamy procedurę deterministyczną, która początkowy stan 0 przeprowadzi na stan 1, zaś początkowy stan 1 na stan 0.

Pojawia się pewna pojęciowa trudność: obliczenia, które pozwalają na wyliczenie prawdopodobieństw są elementarne i łatwo je prześledzić. Zarazem wydaje się rzeczą niepokojącą, że złożenie dwóch czynności losowych daje czynność deterministyczną. Pamiętajmy jednak, że nie dokonujemy pomiaru po pierwszym wykonaniu √NOT, ale od razu przekazujemy wynik do drugiego √NOT, zaś pomiaru dokonuje się dopiero na samym końcu. Gdybyśmy wykonali pomiar po pierwszym √NOT, to nastąpiłaby redukcja stanu układu do jednego ze stanów bazowych ($|0\rangle$ lub $|1\rangle$) – i tym samym drugi operator √NOT otrzymałby na wejściu stan $|0\rangle$ lub stan $|1\rangle$ (a nie

---

[17] Współczynniki a_0 i a_1 nazywamy amplitudami prawdopodobieństwa. Jest teraz jasne, dlaczego żądamy, aby w równaniu opisującym kubity był spełniony warunek $|a_0|^2+|a_1|^2=1$ – chodzi o to, aby suma prawdopodobieństw poszczególnych pomiarów wynosiła 1.

[18] Ściśle rzecz biorąc, ów wektor jest opisany wyrażeniem $1/\sqrt{2}(1-i)|0\rangle + 1/\sqrt{2}(1+i)|1\rangle$.

stan $1/\sqrt{2}\,((1-i)|0\rangle + (1+i)|1\rangle)$. W takiej sytuacji, pomiar układu po drugim √NOT dałby już wynik losowy.

Pomiar nie daje nam – w ogólnym przypadku – informacji na temat tego, w jakim stanie był układ przed pomiarem. Jeśli więc wykonamy obliczenie kwantowe, a następnie pomiar, to najczęściej nie dowiemy się, w jakim stanie był układ po wykonaniu obliczenia kwantowego. W ogólnym przypadku tracimy więc informację zawartą w wyniku. Jednak czasem zdarza się, że znajomość wyniku pomiaru w r a z z pewnymi dodatkowymi informacjami dotyczącymi ewolucji układu, pozwoli na wywnioskowanie, jaki był stan układu przed pomiarem. Te właśnie sytuacje są istotne z punktu widzenia obliczeń kwantowych. Pominę tutaj szczegóły techniczne, ważna jest dla nas jedynie konstatacja, że w pewnych wyjątkowych sytuacjach (gdy układ kwantowy jest w jednym ze szczególnych stanów) pomiar kwantowy pozwala na uzyskanie informacji na temat stanu przed pomiarem. Jeśli np. jest dany jeden kubit, o którym z g ó r y wiemy, że znajduje się w jednym ze stanów bazowych 0 lub 1 (ale nie wiemy w którym), to wynik pomiaru da nam pełną informację na temat jego stanu przed pomiarem (jeśli np. pomiar dał wynik 0, to znaczy, że kubit m u s i a ł być w stanie 0). Analogiczne sytuacje będą występować przy układach dwóch lub więcej kubitów (por. Uwaga 4 w Dodatku). Z taką sytuacją mamy do czynienia w najprostszym algorytmie kwantowym – algorytmie Deutscha.

W swobodnym sformułowaniu chodzi o problem, czy posiadana przez nas moneta jest zwykła (tzn. orzeł i reszka), czy oszukana (dwa orły lub dwie reszki). Ile stron monety musimy obejrzeć, aby się o tym przekonać? Oczywiście dwie. W świecie kwantowym można zrobić to szybciej – wystarczy jednokrotne odwołanie się do procedury obliczającej wartość funkcji (czy – inaczej mówiąc – do obejrzenia jednej tylko strony monety). Algorytm Deutscha składa się z wykonania trzech operacji (por. Uwaga 5 w Dodatku):

1. zastosowania bramki Hadamarda na pierwszym kubicie;

2. zastosowania do otrzymanego wyniku pewnej szczególnej procedury U_f (którą można swobodnie interpretować jako „zadanie pytania" na temat wartości funkcji f);

3. powtórnego zastosowania bramki Hadamarda na pierwszym kubicie.

Pomiar może zostać wykonany d o p i e r o n a k o ń c u – gdyby bowiem dokonać go w trakcie, nastąpiłaby redukcja stanu układu. Nie można zatem kontrolować przebiegu obliczenia, bo to zaburzyłoby jego wynik w nieodwracalny sposób. Podkreślmy, że w tym algorytmie korzystaliśmy z operacji U_f („oglądanie monety") t y l k o r a z!

Istnieją też bardziej złożone technicznie algorytmy, których szczegółowy opis wykracza poza ramy tej pracy. Popularnym przykładem jest algorytm Grovera z roku 1996, pozwalający w czasie $\sqrt{n}$ znaleźć w nieuporządkowanej bazie danych konkretny element[19]. Najbardziej zaś znany jest – wspomniany już wcześniej – algorytm Shora, dzięki któremu można w czasie wielomianowym przeprowadzić rozkład liczby na czynniki pierwsze. Używane algorytmy klasyczne mają złożoność wykładniczą. Nie są istotne dla nas szczegóły techniczne tego algorytmu (składa się z części klasycznej i kwantowej), ważny jest natomiast fakt, że ów algorytm działa w sposób wykładniczo szybszy niż algorytmy klasyczne i że opiera się na specyfice zjawisk kwantowych[20].

3. Kwantowa wiedza matematyczna?

Opisane zjawiska skłaniają do podjęcia refleksji filozoficznej dotyczącej statusu wiedzy uzyskanej na drodze eksperymentu kwantowego. Problem staje się szczególnie ciekawy w przypadku pytania o status

---

[19] Ilustracją jest poszukiwanie danego abonenta w książce telefonicznej w sytuacji, gdy znamy tylko jego numer telefonu. Jest oczywiste, że statystycznie musimy przejrzeć połowę książki. Algorytm Grovera robi to szybciej (Grover 1996). Opis algorytmu Grovera można znaleźć w dowolnej monografii na temat teorii obliczeń kwantowych.

[20] Dla uniknięcia nieporozumień należy jeszcze raz podkreślić, że rozważane tutaj algorytmy kwantowe nie wyprowadzają poza problemy rozstrzygalne klasycznie. Zysk nie polega na tym, że udaje się rozwiązać jakiś problem nierozstrzygalny, ale na tym, że problemy rozstrzygalne są rozwiązywanie o wiele szybciej.

uzyskanej w ten sposób wiedzy matematycznej. Zgodnie z tradycyjną (można rzec: kartezjańską) wizją wiedzy matematycznej ma ona status aprioryczny. Zdobywamy tę wiedzę dzięki działalności czysto rozumowej: podstawowe prawdy matematyczne są oczywiste, zaś kroki dowodu uznajemy za prawomocne dzięki czysto intelektualnemu wglądowi. Prowadzi nas to do konstatacji, że dowody matematyczne stanowią właściwe narzędzie „transmisji prawdy"[21]. W tym klasycznym obrazie brak empirycznej domieszki – uprawianie matematyki jest traktowane jako działalność czysto aprioryczna. Pogląd ten był przez długi czas dominujący, jednak obecnie coraz silniejsze są głosy podkreślające znaczenie czynnika empirycznego w matematyce. Ważnym impulsem dla tej dyskusji było pojawienie się dowodów komputerowych, jednak teoria obliczeń kwantowych wprowadza do niej nową jakość. Dzieje się tak, ponieważ w przypadku wykorzystania (hipotetycznego) komputera kwantowego do zdobywania wiedzy matematycznej problem zapośredniczenia w teorii empirycznej ma znacznie głębszy charakter.

Komputerowa symulacja układów kwantowych jest bardzo trudna ze względu na wykładniczą złożoność. Okazuje się jednak, że z tego faktu można – w pewnych okolicznościach – zrobić użytek. Taka idea pochodzi od Feynmana (1982). Przypuśćmy bowiem, że interesuje nas pewien matematycznie ciekawy, a zarazem bardzo złożony problem obliczeniowy P. Może się tak zdarzyć, że istnieje układ kwantowy Q, którego symulacja sprowadza się do przeprowadzenia obliczenia rozwiązującego (niejako „przy okazji") problem P. Symulacja komputerowa ewolucji układu kwantowego jest przecież pewnym obliczeniem. Na ogół nie ma ono żadnej niezależnej motywacji matematycznej (tzn. przeprowadzamy je tylko po to, aby dowiedzieć się czegoś o układzie kwantowym). Jednak w interesującej nas sytuacji, owa symulacja zarazem odpowiadałaby określonemu, skądinąd matematycznie ciekawemu, problemowi obliczeniowemu. W takiej sytuacji znalezienie wyniku naszego problemu obliczeniowego P byłoby równoważne ustaleniu stanu końcowego ewolucji pewnego układu kwantowego Q. Zgodnie z tym, co powie-

[21] Por. uwagi w rozdziale pierwszym dotyczące koncepcji Kartezjusza.

dziano wcześniej, symulacja ewolucji układu kwantowego jest na ogół obliczeniowo bardzo trudna i wiąże się z wykładniczą stratą czasu. Idea Feynmana polega na tym, aby wykorzystać ten fakt i zauważyć, że przejście w odwrotnym kierunku (o d obliczenia P d o układu kwantowego Q) może wiązać się z wykładniczym z y s k i e m czasowym. Działoby się tak dlatego, że jeśli w sprytny sposób udałoby się nam ustalić odpowiedniość między P i Q, to zamiast wykonywać nasze (trudne) obliczenie P, wystarczyłoby przeprowadzić eksperyment z układem kwantowym Q. Gdyby – dla przykładu – P miało polegać na obliczeniu wyniku zastosowania pewnych operacji kombinatorycznych do 2^{1000} parametrów (oczywiście takie zadanie jest absolutnie niewykonalne z praktycznego punktu widzenia) – i zarazem te operacje odpowiadałyby ewolucji układu 1000 kubitów – to wystarczyłoby uruchomić algorytm kwantowy Q operujący na układzie owych 1000 kubitów i poczekać na wynik tego eksperymentu.

Należy tu podkreślić, że tego typu zabieg *a priori* nie musi być wykonalny. Interesujące mogą być bowiem tylko takie sytuacje, w których pewien matematycznie ciekawy problem obliczeniowy P (np. problem teorioliczbowy czy kombinatoryczny) okazuje się zarazem odpowiednikiem problemu polegającego na opisie pewnego układu kwantowego. Chodzi więc o sytuację, w której rozwiązanie naszego problemu obliczeniowego P (np. znalezienie najkrótszej drogi w grafie albo ustalenie, czy dany układ równań ma rozwiązanie w pewnej klasie) stanowi jednocześnie rozwiązanie problemu postaci „jaki jest stan końcowy układu Q?". Nie jest więc *a priori* jasne, czy w ogóle istnieją tego typu szczęśliwe koincydencje (nie można przecież wykluczyć sytuacji, w której numeryczne symulacje ewolucji układów kwantowych okażą się matematycznie nieciekawe)[22].

---

[22] Można tu podać także analogie nieodwołujące się do układów kwantowych: jako *toy example* rozważmy problem obliczenie środka ciężkości bryły. Sprowadza się on do obliczenia pewnej całki, a zarazem jego wyznaczenie empiryczne – pomijając błędy pomiaru – jest proste (jest potrzebny przysłowiowy sznurek). W pewnym więc sensie, zamiast prowadzić skomplikowane obliczenia (gdy bryła jest nieregularna, ma niejednorodną gęstość etc.), wystarczy przeprowadzić prosty eksperyment. Sytuacja byłaby ciekawa, gdyby można w ten sposób wyznaczyć empirycznie wartość całki, która jest obliczeniowo trudna,

Okazuje się jednak, że odpowiedź na to pytanie jest pozytywna, zaś najbardziej spektakularny przykład algorytmu kwantowego stanowi wspomniany już algorytm faktoryzacji Shora. Jak wiadomo, problem rozkładu liczb na czynniki pierwsze jest obliczeniowo trudny, więc szybko działający algorytm stanowi ogromny postęp[23].

Istnieją zatem problemy matematyczne, które mogłyby zostać rozstrzygnięte za pomocą komputerów kwantowych. Wprawdzie ich katalog nie jest (na razie) zbyt bogaty, niemniej jednak sam fakt ich obecności skłania do podjęcia rozważań dotyczących statusu wiedzy uzyskanej za pomocą obliczenia kwantowego. Mogłaby to być wiedza o charakterze teorioliczbowym (np. wspomniany rozkład liczby na czynniki pierwsze) czy kombinatorycznym, ale można rozważać również ogólniejsze sytuacje.

Jak mógłby przebiegać hipotetyczny „kwantowy dowód" twierdzenia matematycznego α? Jego schemat możemy przedstawić następująco:

1. Faza koncepcyjna:

Należy zdefiniować układ kwantowy (i obliczenie kwantowe) tak, aby zachodziła odpowiedniość między jego ewolucją a obliczeniem komputera (stanowiącym dowód badanego twierdzenia α). W szczególności obejmuje to ustalenie zależności między wynikami pomiaru po skończonej ewolucji a odpowiedzią na nasze pytanie.

2. Faza eksperymentalna:

2.1. Przygotowanie układu kwantowego w odpowiednim stanie początkowym.

---

a ma skądinąd niezależną matematyczną motywację. Problem empirycznego „skrótu" w obliczeniach nie pojawia się zatem dopiero wraz z teorią obliczeń kwantowych (klasycznym przykładem są metody Monte Carlo, w których za pomocą losowań szacuje się wartości trudno obliczalne analitycznie).

[23] Faktoryzacja jest problemem z klasy NP, choć nie jest problemem NP-zupełnym. Gdyby tak było, to algorytm Shora stanowiłby niejako „cudowną różdżkę" do rozwiązywania całej klasy obliczeniowo trudnych problemów. Jednak faktoryzacja jest już dostatecznie spektakularnym sukcesem (teoretycznym). Gdyby zbudowano komputer kwantowy, na którym można byłoby zaimplementować algorytm Shora, to stanowiłoby to rewolucję w kryptografii (gdyż tradycyjne szyfry, w których wykorzystuje się trudność problemu faktoryzacji stałyby się bezużyteczne).

2.2. Przeprowadzenie ewolucji układu kwantowego (czyli fizyczne przetworzenie informacji).

2.3. Po skończonej ewolucji wykonanie pomiaru (czyli wydobycie owej informacji z układu).

3. Interpretacja wyniku.

Dzięki temu, że ewolucja układu kwantowego została zdefiniowana w odpowiedni sposób, pomiar pozwala na znalezienie odpowiedzi na wyjściowe pytanie matematyczne. Mówiąc w pewnym uproszczeniu, chodzi o sytuacje, w których na końcu wykonujemy pomiar, i jeśli wynik pomiaru to 1, rozwiązanie naszego problemu jest pozytywne (np. ustalamy, że istnieje odpowiedni obiekt kombinatoryczny). Taki kwantowy dowód realizowałby ideę sformułowaną przez Feynmana: to nie obliczenie komputerowe symuluje proces fizyczny; został skonstruowany proces fizyczny, który prowadzi do takiego samego wyniku jak obliczenie komputera (jednak w czasie wykładniczo krótszym). Wprawdzie nie doczekamy się końca obliczeń naszego klasycznego komputera (chociażby dlatego, że Słońce zgaśnie wcześniej), ale dzięki eksperymentowi kwantowemu wiemy, jaki byłby ich wynik.

Każdy sformalizowany dowód też stanowi swoiste obliczenie i można wyobrazić sobie sytuację, w której istnieje algorytm kwantowy rozwiązujący równania diofantyczne – a przecież przez arytmetyzację składni problem istnienia dowodu sprowadzamy do zagadnienia istnienia rozwiązania pewnego równania diofantycznego[24]. Wyobraźmy sobie, że istnieje układ kwantowy, który pozwoli na stwierdzenie, że zdanie α jest twierdzeniem teorii ZFC (czyli układ kwantowy potwierdza istnienie jego formalnego dowodu w ZFC). Oczywiście algorytmy kwantowe rozwiązują jedynie problemy rozstrzygalne, więc ów komputer nie będzie (w ogólnym przypadku) w stanie stwierdzić, c z y twierdzenie α ma dowód, ale w sytuacji, gdy taki dowód faktycznie istnieje, komputer kwantowy będzie miał

[24] Należy pamiętać, że algorytmy kwantowe nie wyprowadzają poza klasę problemów rozstrzygalnych, a kwestia istnienia rozwiązania równania diofantycznego (10 problem Hilberta) nie jest rozstrzygalny. Jednak j e ś l i równanie ma rozwiązanie (czyli twierdzenie ma dowód), t o wówczas algorytm kwantowy mógłby je wyznaczyć szybko.

szansę znaleźć go wykładniczo szybciej niż zwykły i zdać nam z tej sprawy raport (przeprowadzając procedurę pomiarową i wyświetlając „TAK" na ekranie)[25]. Jakie filozoficzne implikacje miałby fakt istnienia takiego raportu?

Jak na razie komputery kwantowe nie zostały jeszcze zbudowane – pokonanie trudności technicznych związanych z wyeliminowaniem zaburzeń zewnętrznych jest niezwykle trudne[26]. Być może nigdy się to nie uda. Jednak niezależnie od tego (technicznego) zagadnienia, *casus* (hipotetycznych) dowodów kwantowych rodzi szereg pytań filozoficznych. Były one już rozważane w wypadku klasycznych dowodów komputerowych, tu jednak zyskują dodatkową głębię. Zgodnie z przyjętą na początku rozdziału klasyfikacją przedmiotem analiz będą dwie podstawowe grupy zagadnień:

1. Problem obecności czynnika empirycznego w dowodach matematycznych.

2. Problem „zysku poznawczego" wynikającego z zastosowania dowodów komputerowych (w szczególności problem eksplanacyjnej mocy takich dowodów).

3.1. Problem czynnika empirycznego

Zapośredniczenie w teorii empirycznej jest *prima facie* znacznie głębsze niż w przypadku klasycznego komputera i sądzę, że pojawienie się algorytmów kwantowych wprowadza nową jakość do dyskusji dotyczącej natury dowodu matematycznego i standardów matematycznej argumentacji. Czy komputer kwantowy – ze względu na wykorzystanie specyfiki kwantowego świata – jest czymś istotnie innym niż zwykły komputer? Przypuśćmy, że uznamy klasyczny komputer za nieco bardziej skomplikowany technicznie arytmo-

---

25 To, że w ciągu doby komputer kwantowy nie znajdzie dowodu hipotezy Riemanna, nie znaczy, iż ów dowód nie istnieje. Jednak jeśli istnieje, a komputer kwantowy działa 2^{1000} razy szybciej niż zwykły, to prawdopodobnie doba wystarczy.

26 Układy kwantowe są bardzo niestabilne, pod wpływem oddziaływań z otoczeniem z łatwością następuje tzw. dekoherencja. Opis technicznych aspektów prac nad komputerem kwantowym można znaleźć np. w: Stolze, Suter 2004, Nakahara, Ohmi 2008.

metr. Czy również komputerowi kwantowemu chcielibyśmy nadać taki sam status?

Argumentacja na rzecz tej tezy mogłaby wyglądać następująco: działanie zarówno komputera kwantowego, jak i klasycznego komputera opiera się na prawach fizyki. Co więcej, w obu przypadkach są to prawa mechaniki kwantowej – ponieważ działanie klasycznego komputera, jako urządzenia elektronicznego, angażuje zjawiska subatomowe. Czy zatem faktycznie mamy tu do czynienia z nową jakością? Nie ulega wątpliwości, że same a l g o r y t m y są istotnie różne: klasyczne działają na bitach, zaś kwantowe – na kubitach. Ale patrząc z szerszej perspektywy, trzeba przyznać, że zarówno działanie komputera klasycznego, jak i kwantowego opiera się na prawach fizyki[27]. Same szczegóły konstrukcyjne urządzenia fizycznego, które wykorzystujemy, nie są istotne – ważny jest fakt, że zbudowaliśmy to urządzenie, poddaliśmy testom, w czasie których zachowywało się zgodnie z naszymi oczekiwaniami, a więc możemy się nim posłużyć w zdobywaniu nowej wiedzy. A to, czy to urządzenie to mechaniczna kasa sklepowa, tradycyjny komputer, czy też komputer kwantowy nie ma nic do rzeczy, bo mechanizm jest we wszystkich przypadkach – co do zasady – taki sam.

Pytanie zatem dotyczy poziomu empirycznego zapośredniczenia: czy jeśli odwołujemy się do wyrafinowanych teorii fizycznych (jak mechanika kwantowa), to jest to – w jakimś sensie – głębszy rodzaj zapośredniczenia niż w przypadku zastosowania np. praw mechaniki Newtona czy klasycznej termodynamiki? Kiedy owa ingerencja metod fizycznych staje się istotna?[28] Jeśli uznalibyśmy, że odwołanie się w jakikolwiek sposób do wiedzy empirycznej jest ważne i nie ma sensu wprowadzać tu dalszej gradacji, to zarówno kasę sklepową, jak i komputer kwantowy należałoby zaliczyć do tej samej kategorii.

---

[27] Podobnie zresztą jak silnik spalinowy, turbina parowa, telefon komórkowy, radio etc.

[28] Zauważmy przy tym, że bez mechaniki kwantowej nie mielibyśmy komputerów. To, że – co do zasady – komputer nie różni się od (dużej) kasy sklepowej, nie zmienia faktu, iż przy jego budowie odwołujemy się do bardziej wyrafinowanych teorii fizycznych.

Sądzę jednak, że różnice są głębsze. Wszak zwykły komputer można byłoby zrobić z drewna i napędzać wodą albo zrobić z metalu i napędzać silnikiem spalinowym (abstrahuję tutaj od tempa działania). Żeby kontrolować pracę tego typu wodnego (spalinowego) komputera, wystarczyłoby trochę inżynierskiej pomysłowości. W stosunku do komputera kwantowego nie ma nawet sensu rozważanie podobnego myślowego eksperymentu. Uwikłania w zjawiska kwantowe (splątanie) pojawiają się już na poziomie samego programu, co wprowadza nową jakość do dyskusji.

Zauważmy, że dokonanie pomiaru w trakcie ewolucji układu kwantowego spowoduje ustalenie jego stanu i zniszczy całą operację. W przypadku klasycznych dowodów komputerowych mamy (teoretycznie) wgląd w każdy krok obliczenia. Możemy lokalnie sprawdzić, czy faktycznie urządzenie liczące działa zgodnie z naszymi oczekiwaniami. Jesteśmy więc przekonani o tym, że komputer robi dokładnie to, co robiłby człowiek (ów pracowity urzędnik Turinga), tyle że znacznie szybciej. Obliczenie kwantowe jakościowo różni się od obliczenia klasycznego. Nie możemy kontrolować jego przebiegu. Z naszego punktu widzenia elementarną operacją jest cała ewolucja kwantowa (która może polegać na przejściu 1 kubitu przez jedną bramkę, ale też na przejściu 500 kubitów przez system 1000 bramek kwantowych) i taką ewolucję należy traktować jako niepodzielną całość, jako swoistą „czarną skrzynkę”[29]. Dowód matematyczny opierający się na obliczeniach kwantowych opierałby się więc na zaufaniu do działania takich kwantowych czarnych skrzynek. Pomiar jest wykonywany dopiero na końcu całego ciągu operacji, nie możemy „zaglądać” do układu kwantowego w trakcie jego ewolucji. Ewolucja układu nie przebiega zgodnie z instrukcjami jakiejkolwiek maszyny Turinga – nie jest to więc obliczenie w klasycznym sensie tego słowa[30]. Nie można twierdzić, że układ fizyczny wykonuje to samo

---

[29] Oczywiście w trakcie ewolucji możemy wyróżnić szereg etapów (np. przejść rejestrów przez kolejne bramki kwantowe), jednak nie można przerwać procedury i wykonać pomiaru w trakcie – w tym sensie mówię tu o dowodzie kwantowym jako niepodzielnej całości.

[30] Aby uniknąć potencjalnych nieporozumień, przypomnę, że klasa problemów rozstrzygalnych za pomocą algorytmów kwantowych jest identyczna z klasą

co człowiek, tyle że szybciej – jego działanie opiera się bowiem na zupełnie innej zasadzie niż klasyczny proces obliczeniowy. Na obliczenie nie możemy już patrzeć jako na pewien wyidealizowany proces logiczny (zaimplementowany w komputerze), ale jako na pewien proces fizyczny, którego ewolucja wiąże się w fundamentalny sposób ze specyfiką świata kwantowego. Realizacja tego procesu jest możliwa tylko w świecie kwantowym i tylko eksperyment kwantowy dostarczy nam tej nowej wiedzy matematycznej. Jeśli więc uznamy kwantowe dowody za prawomocne, to problem wiedzy matematycznej zostaje uwikłany w cały splot trudności filozoficznych związanych z mechaniką kwantową: problem pomiaru, problem interpretacji mechaniki kwantowej, problem splątania stanów kwantowych (który nie ma klasycznego odpowiednika) etc. Filozofia matematyki zaciąga więc poważny dług u filozofii fizyki.

Zauważmy, że argumenty na rzecz tezy, iż klasyczne dowody komputerowe nie różnią się – co do istoty – od zwykłych dowodów, opierają się m.in. na argumencie, iż dowód komputerowy ma taką samą strukturę co dowód zwykły i że jest – przynajmniej teoretycznie – możliwy do zweryfikowania (w każdym razie, nawet jeśli nie jesteśmy w stanie sprawdzić całego dowodu, to możemy wybrać pewien fragment i prześledzić obliczenia). Nie można jednak użyć tego argumentu w stosunku do dowodu kwantowego. Tutaj bowiem już na poziomie algorytmu wykorzystujemy specyfikę zjawisk kwantowych.

Sądzę, że nowa jakość, jaką hipotetyczne dowody kwantowe wnoszą do tej dyskusji, jeszcze lepiej będzie widoczna w przypadku modeli hiperobliczeń (które są przedmiotem analiz w rozdziale piątym).

3.2. Problem siły eksplanacyjnej dowodów kwantowych

Drugi problem to poznawcza wartość tak uzyskanych wyników. Przypuśćmy, że pewien problem matematyczny P został rozwiązany za pomocą komputera kwantowego, nie znamy zaś szybkiego al-

---

problemów rozstrzygalnych klasycznie (różnica tkwi w czasie obliczeń). Mam tu na myśli fakt, że sama ewolucja kwantowa nie stanowi realizacji algorytmu klasycznego.

gorytmu klasycznego, który robiłby to samo. Możemy sobie wyobrazić (zgodnie ze scenariuszem rozważanym wcześniej), że komputer kwantowy po tygodniowej pracy ustalił, iż hipoteza Riemanna ma dowód i poinformował nas o tym[31]. Czy uznamy, że posiadamy faktycznie wiedzę na temat hipotezy Riemanna i że status owej wiedzy nie różni się od statusu np. wiedzy na temat 4-kolorowalności grafów planarnych?

W poprzednim rozdziale rozważaliśmy przykład hipotetycznego superszybkiego komputera (szybszego od naszych o czynnik rzędu np. 2^{1000}). Teoria obliczeń kwantowych pokazuje, że tego typu kwestie nie mają charakteru czysto spekulatywnego. Gdyby istniały komputery kwantowe, mogłyby (przy pewnych dodatkowych warunkach) pełnić funkcję takiego właśnie superkomputera. Problem rozumienia i eksplanacyjnej roli dowodu nabiera więc – można rzec – większej dramaturgii i przestaje być problemem czysto spekulatywnym (choć oczywiście należy pamiętać o tym, że na razie komputerów kwantowych nie ma). Analizy dotyczące dowodów kwantowych wprowadzają niewątpliwie nową jakość do tej dyskusji[32].

Dalsze rozważania dotyczące problemu eksplanacyjnej siły dowodów „superkomputerowych" odkładam do kolejnego rozdziału, dotyczącego hiperobliczeń. Sądzę bowiem, że w tym kontekście problem ów można sformułować w najbardziej wyrazisty sposób (stosujący się również do problemu dowodów kwantowych).

---

[31] Komputer mógłby po prostu badać formalne dowody w ZFC, poszukując dowodu hipotezy Riemanna. Gdyby na niego natrafił, przesyłałby do nas raport. Jeśli hipoteza Riemanna faktycznie ma dowód, zaś komputer będzie miał dostatecznie dużo czasu, to na niego natrafi (choć oczywiście może się zdarzyć, że nawet komputer kwantowy będzie potrzebował na to np. 1000 lat).

[32] Jest kwestią otwartą, czy – i w jakim sensie – istnienie takich dowodów miałoby jakiekolwiek znaczenie dla dyskusji dotyczącej algorytmizowalności naszych procesów myślowych. Jak sądzę, z istnieniem dowodów kwantowych można pogodzić zarówno tezę komputacjonizmu, jak i jej negację. Sam fakt potencjalnego istnienia dowodów kwantowych nie stanowi zatem argumentu ani za, ani przeciwko algorytmizowalności procesów umysłowych (czy nawet węziej: algorytmizowalności działalności matematycznej).

ROZDZIAŁ 5
Hiperobliczenia a status dowodów matematycznych

W tym rozdziale przedmiotem zainteresowania będą zjawiska niealgorytmiczne i ich znaczenie dla dyskusji dotyczącej natury dowodu matematycznego. Jest on naturalną kontynuacją dwóch wcześniejszych rozdziałów. Odnotujmy bowiem oczywisty fakt: komputer stanowi najsilniejsze spośród urządzeń fizycznych (takich jak: liczydło, arytmometr, kasa sklepowa), którymi wspieramy się przy rozwiązywaniu problemów matematycznych. Jego teoretycznym modelem jest maszyna Turinga, wyznaczająca oczywiście pewne ograniczenia. W poprzednim rozdziale była mowa o przeszkodach praktycznych i o możliwości ich przełamania przez wykorzystanie specyfiki świata kwantowego. Istnieją jednak również granice teoretyczne – nie każdy problem daje się rozstrzygnąć algorytmicznie (tj. za pomocą maszyny Turinga). Klasycznym przykładem problemu nierozstrzygalnego jest tzw. problem stopu (*halting problem*)[1]. Oznacza to w szczególności, że w klasie algorytmicznych układów fizycznych (tj. układów implementujących maszynę Turinga) nie znajdziemy takiego, który mógłby zostać użyty do rozwiązania tego typu kwestii.

Nie musi to jednak znaczyć, że taki układ fizyczny w o g ó l e nie istnieje – czyli że wszystkie procesy fizyczne mają algorytmiczny charakter. Można bowiem rozważać (zarówno czysto matematycz-

[1] Nie istnieje ogólny algorytm (tj. maszyna Turinga), która – otrzymując jako dane opis pewnej maszyny Turinga M oraz dane wejściowe x – byłaby w stanie stwierdzić, czy maszyna M zatrzyma się dla danych wejściowych x (ściśle: nie istnieje taki u n i w e r s a l n y algorytm działający dla wszystkich danych na wejściu maszyn M i danych x). Innym przykładem problemu nierozstrzygalnego algorytmicznie jest 10 problem Hilberta: czy dany wielomian o współczynnikach całkowitych ma rozwiązanie?

ne, jak i fizyczne) modele procesów niealgorytmicznych i postawić pytanie o to, czy – i w jaki sposób – można byłoby je wykorzystać do wzbogacenia naszej wiedzy matematycznej. Ta problematyka jest przedmiotem rozważań w niniejszym rozdziale. Oczywiście byłoby trudno bronić tezy, iż w dającej się przewidzieć przyszłości te modele zostaną zaimplementowane[2]. Jednak nawet jeśli potraktujemy je jako czysto myślowe eksperymenty, to sądzę, że stanowią one ważny impuls dla filozoficznej analizy natury matematyki.

1. Uwagi wstępne

W trakcie dotychczasowej dyskusji dotyczącej dowodów komputerowych i kwantowych przedmiotem zainteresowania był m.in. problem czynnika empirycznego w matematyce i statusu wiedzy uzyskanej przy użyciu komputerów – z podkreśleniem relacji między wiedzą matematyczną a fizyczną. Zagadnienie to będzie dyskutowane również w tym rozdziale – w kontekście modeli hiperobliczeniowych. Pojawia się przede wszystkim pytanie o status poznawczy potencjalnej wiedzy uzyskanej za pomocą tego typu hipotetycznych procedur o charakterze empirycznym. Czy jest to wiedza matematyczna? Czy można byłoby tu mówić o nowym rodzaju matematycznej argumentacji? Czy mamy do czynienia z nowym typem dowodów matematycznych? Podejmuję tu próbę wyjaśnienia roli metod hiperobliczeniowych i statusu zdobytej tak wiedzy w duchu *quasi*-empirystycznej filozofii matematyki Quine'a.

Zajmowaliśmy się również problemem klasy zjawisk fizycznych, które mogłyby (przynajmniej teoretycznie) zostać wykorzystane w procesie wzbogacania naszej wiedzy matematycznej. W tym rozdziale zaprezentuję jeden z najciekawszych modeli teoretycznych.

Przedmiotem analizy było też wyjaśnianie i rozumienie w matematyce: w przypadku procedur hiperobliczeniowych z pewnością odczuwalibyśmy tu pewnego rodzaju niedosyt (w dalszej części roz-

[2] Jeśli w ogóle doczekają się implementacji, to – z definicji – nie na zwykłym komputerze, ale na urządzeniu innego typu.

działu wyjaśnię, dlaczego ów niedosyt będzie jeszcze silniejszy niż w wypadku zwykłych dowodów komputerowych czy nawet kwantowych). Można postawić pytanie, czy taki dowód, który nie daje wyjaśnienia (i nie pociąga za sobą rozumienia) rzeczywiście stanowi pełnoprawny wkład w tworzenie wiedzy matematycznej. Wszak przedmiotem zainteresowania tej dziedziny wiedzy nie jest jedynie fakt, że pewne twierdzenia dają się formalnie wywieść z pewnych teorii. Takie stanowisko byłoby bliskie formalistycznej wizji matematyki, ale przecież w praktyce mamy do czynienia z pytaniami i przekonaniami matematyków, które mają inny charakter: np. pytanie o to, czy dane twierdzenie jest doniosłe (głębokie, ważne, piękne etc.), albo o to, jaką rolę odgrywa w danej koncepcji. Czym innym jest wiedza, że pewien dowód jest (formalnie) poprawny, zaś czym innym przekonanie, że ma on charakter czysto trickowy, „siłowy" – albo właśnie głęboki i pomysłowy. Matematyk ma świadomość, że dowody mogą istotnie się różnić: jeden faktycznie formalnie prowadzi do wyniku, ale nic nie wyjaśnia i w gruncie rzeczy jest niezrozumiałe, dlaczego działa; inny zaś ukazuje, na czym polega splot idei matematycznych. Istnieje cały katalog tego typu pytań „okołomatematycznych", dotyczących np. tego, czy pewna koncepcja jest spójna i naturalna, czy pewna teoria matematyczna trafnie ujmuje nasze preteoretyczne intuicje[3], czy pewien aksjomat dobrze wyraża intuicyjne przekonania, czy jest wiarygodny. Nie ulega wątpliwości, że są one istotne poznawczo i że zarazem wykraczają poza badania systemów formalnych.

Dyskusja dotycząca modeli hiperobliczeń w naturalny sposób wiąże się z omawianym w rozdziale pierwszym problemem ewolucji w rozumieniu dowodu matematycznego: od (mówiąc w ogólnych zarysach) ujęcia kartezjańskiego do ujęcia w duchu formalizmu. Model Turinga, jako uniwersalny, harmonizuje z formalistyczną wizją matematyki, w szczególności z formalistyczną wizją dowodu matematycznego jako ciągu manipulacji na symbolach. Pozwala na

[3] Możemy zastanawiać się, czy np. znane definicje są dobrymi ujęciami naszego preteoretycznego pojęcia np. ciągłości lub prawdopodobieństwa, a standardowy współczesny przykład to dyskusja dotycząca tezy Churcha.

klarowne zdefiniowanie tego, na czym polega procedura rozwiązywania problemów matematycznych. Jednak pojawienie się modeli hiperobliczeń stawia ten problem w nowym świetle, bowiem wiedza, którą można uzyskać za pomocą owych (podkreślmy – hipotetycznych!) hiperobliczeniowych układów, wykracza poza wiedzę możliwą do uzyskania w ramach paradygmatu formalistycznego i pokazuje istotę problemu semantycznej zawartości dowodów.

Dotykamy tutaj również zagadnienia algorytmiczności aktów poznawczych matematyzującego umysłu. Nie ulega wątpliwości, że szereg operacji matematycznych ma charakter mechaniczny (np. przekształcanie wyrażeń algebraicznych etc.). Naturalne jest jednak pytanie, jak duży fragment czynności poznawczych matematyka można imitować w ten sposób, czyli jaką ich część można sformalizować i zmechanizować. W szczególności pytamy o to, czy za pomocą k o m p u t e r a można w jakiś sposób naśladować procesy poznawcze towarzyszące uprawianiu matematyki. „Imitacja myślenia matematycznego" to niewątpliwie szczególny przypadek ogólnego problemu algorytmiczności naszych procesów myślowych. Gdyby bowiem nasze myślenie miało w całości charakter algorytmiczny, to w szczególności również nasze myślenie matematyczne musiałoby mieć taki charakter. Jeśli zatem przyjęlibyśmy tezę radykalnego komputacjonizmu w filozofii umysłu, powinniśmy konsekwentnie uznać, że również nasze poznanie matematyczne daje się zalgorytmizować (gdyż nasze operacje umysłowe mają – na odpowiednio głębokim poziomie – charakter algorytmiczny). W drugą stronę implikacja nie musi zachodzić: teoretycznie jest możliwe, że nasze myślenie nie ma charakteru mechanicznego, natomiast czynności poznawcze pojawiające się przy uprawianiu matematyki takie właśnie są[4].

---

4 Podobny pogląd żywi wiele osób nierozumiejących istoty matematyki – uważają, że bycie dobrym matematykiem sprowadza się do umiejętności szybkiego wykonywania różnych skomplikowanych obliczeń (co nie wystarczy, aby być np. dobrym poetą). Jest to oczywiście bardzo naiwny pogląd, ale być może jakieś ślady tego typu myślenia tkwią u podłoża przekonania o możliwości pełnej formalizacji i mechanizacji matematyki. Wszak stanowisko radykalnego formalizmu głosi, że zasadniczym przedmiotem badań tej dyscypliny są przekształcenia

Kiedy dyskutujemy o problemie formalizacji i mechanizacji myślenia, mamy na myśli oczywiście głównie „twardą" wiedzę matematyczną: o tym, że dowód jest poprawny, czy że dane zdanie wynika formalnie z przyjętych założeń lub że dla udowodnienia danego twierdzenia są konieczne takie, a nie inne założenia etc. Jednak np. samo uzasadnianie takich, a nie innych reguł nie ma już charakteru czysto formalnego. Sądzę, że dyskusja dotycząca hiperobliczeń może rzucić pewne światło na nasze rozumienie również owej wiedzy „okołomatematycznej" i inspirować rozważania na temat związanych z nią mechanizmów poznawczych.

2. Zagadnienie algorytmiczności przetwarzania informacji

Na problem dowodzenia twierdzeń matematycznych można spojrzeć od strony procesów przetwarzania informacji[5]. Z tego punktu widzenia komputer (maszyna Turinga) jest mechanicznym narzędziem służącym do tego celu. W naturalny sposób pojawia się pytanie, czy można myśleć o szerszej klasie systemów przetwarzających informacje, które w szczególności mogłyby – przy odpowiednich warunkach – rozwiązywać problemy nierozstrzygalne algorytmicznie (czyli za pomocą maszyny Turinga). Dla nas jest ciekawe pytanie, czy takie systemy można byłoby wykorzystać przy zdobywaniu nowej wiedzy matematycznej, przede wszystkim przy dowodzeniu twierdzeń. Zauważmy tutaj, że szczególnym przypadkiem tego problemu jest pytanie o to, czy umysł matematyka jest algorytmicznym, czy niealgorytmicznym systemem przetwarzania informacji.

Pytanie dotyczące systemów niealgorytmicznych nie ma charakteru czysto spekulatywnego. Dyskusja na ten temat toczy się już od dłuższego czasu i istnieje szereg modeli teoretycznych tego typu

symboliczne – mające formalny i mechaniczny charakter – i że to one niejako wyczerpują jej istotę.

5 Robi to *explicite* algorytmiczna teoria informacji Chaitina (por. np. Chaitin 1987), gdzie stosuje się pojęcia i metody teorii informacji do opisu zjawisk metamatematycznych (w tym zjawisk typu gödlowskiego).

struktur. Przedstawię tutaj wybrane, które są najciekawsze dla dyskusji filozoficznej[6].

Termin „hiperobliczenie" (określający procedury wykraczające poza możliwości maszyny Turinga) został wprowadzony w pracy Copelanda i Proudfoot (1999). Sami autorzy jednak podkreślają, że dotyczy on problemu rozważanego w literaturze już od dawna. Copeland twierdzi wręcz, że za jednego z „ojców założycieli" teorii hiperobliczeń można uznać Turinga (Copeland 2002). Copeland ma na myśli jego badania dotyczące tzw. maszyn z wyrocznią (w terminologii Turinga – *o-machines*, por. Turing 1938)[7]. Maszyna z wyrocznią różni się od zwykłej maszyny Turinga tym, że dopuszcza pewną dodatkową procedurę, w ramach której zadaje wyroczni pytanie dotyczące wartości pewnej n i e r e k u r e n c y j n e j funkcji f, a wyrocznia w jednym kroku udziela na nie odpowiedzi[8]. Wyrocznia może np. znać odpowiedzi na wszystkie pytania w postaci: „Czy maszyna o numerze n zatrzyma się dla danych wejściowych m?" i udzielać ich w jednym kroku. Proces obliczenia maszyny z wyrocznią można wyobrażać sobie jako zwykłe obliczenie, w którym dodatkowo pojawia się nieredukowalna procedura zadawania pytania o wartość $f(n)$ dla pewnej funkcji f. Z czysto technicznego punktu widzenia należy po prostu postulować istnienie pewnego dodatkowego stanu wewnętrznego (stanu „pytajnego"). Jeśli maszyna znajdzie się w nim, wówczas zadaje wyroczni pytanie dotyczące wartości funkcji f dla danych znajdujących się na taśmie, a następnie uzyskuje

6 Prezentacja całości problematyki wykracza poza ramy tej książki. Czytelnik znajdzie monograficzne ujęcie w Syropoulos 2008; wiele informacji zawierają też przeglądowe prace: Copeland 2002, 2004, Cotogno 2003, Ord 2006, Stannett 2006. Problematyce hiperobliczeń są poświęcone też numery specjalne "Minds and Machines" (No. 12, 2002; No. 13, 2003), "Applied Mathematics and Computation" (No. 178, 2006), "Theoretical Computer Science" (No. 317, 2004) i inne. Czytelnik zainteresowany problematyką znajdzie dużo informacji na stronie http://hypercomputation.net.

7 Podobnie stawiają sprawę np. Shagrir i Pitowsky (2003). Por. jednak uwagi Davisa i Hodgesa przytaczane w dalszej części tekstu.

8 Ściśle: w dowolnym momencie maszyna ma prawo zadać pytanie „Ile wynosi $f(n)$?" i otrzyma odpowiedź w jednym kroku.

odpowiedź[9]. To prowadzi do nowej hierarchii, przy definicji której podstawowe znaczenie odgrywa pojęcie obliczalności relatywnie do wyroczni *f*: powiemy, że *g* jest obliczalna relatywnie do *f*, jeśli możemy obliczyć wartości funkcji *g*, mając do dyspozycji wyrocznię, która informuje nas o wartościach funkcji *f*[10]. Rzecz jasna – klasa zwykłych funkcji obliczalnych to klasa funkcji obliczalnych relatywnie do pustej wyroczni.

Copeland traktuje więc maszynę Turinga z wyrocznią jako najogólniejszy model dla hiperobliczeń. Nie wiadomo jednak, czy jest to zasadne – np. Davis (wybitny znawca problematyki) twierdzi wprost, że takie podejście to zwykłe nieporozumienie, bo celem Turinga nie było przecież rozważanie hiperobliczeń, ale badanie wzajemnych relacji, jakie zachodzą między pewnymi problemami nieobliczalnymi (Davis: 2004, 2006). Podobną opinię wyraża Hodges, który uważa, że model maszyny z wyrocznią to jedynie narzędzie matematyczne, dzięki któremu można badać pojęcie rozstrzygalności – relatywnie do zadanej (przez wyrocznię) nierekurencyjnej funkcji *f* (Hodges 2011). Sama wyrocznia zaś jest (na ogół) silniejsza niż dowolny komputer i nie stanowi modelu dla żadnej operacji komputerowej (można tu dodać: w rozsądnym sensie tego terminu)[11]. Przy tym ujęciu traktowanie maszyny Turinga z wyrocznią jako hiperkomputera jest pewnym nadużyciem.

Jednak niezależnie od kwestii historycznych (czy terminologicznych), nie ulega wątpliwości, że problem istnienia modeli procedur, które rozwiązują kwestie nierozstrzygalne algorytmicznie ma charakter naturalny. Można tu wyróżnić dwa podstawowe aspekty:

---

9 „Przypuśćmy, że mamy do dyspozycji bliżej nieokreślony rodzaj wyroczni. Nie będziemy bliżej wnikać w jej naturę poza stwierdzeniem, że nie może to być maszyna. Z pomocą tej wyroczni możemy stworzyć nowy typ maszyny (nazwijmy je o-maszynami), których jednym z podstawowych procesów będzie proces rozwiązywania zadanego problemu teorioliczbowego" (Turing 1938: 173).

10 W przypadku badań dotyczących relatywnej obliczalności również mamy do czynienia z całą hierarchią stopni (będących klasami abstrakcji problemów wzajemnie rozstrzygalnych). Istnieje kontinuum owych stopni, a więc tworzą bardzo bogatą strukturę (por. np. Lerman 1983, Simpson 1977).

11 Sam Turing zresztą zauważał, że wyrocznia nie ma charakteru maszyny (Turing 1938: 173).

1. matematycznego, czysto teoretycznego opisu takich modeli;
2. fizycznego sensu takich modeli.

Niektóre modele bowiem wydają się mieć charakter wyłącznie spekulatywny, jednak w przypadku wielu z nich można zasadnie twierdzić, iż posiadają dobrze określony sens fizyczny (niezależnie od praktycznego problemu ich implementacji).

Problematyka hiperobliczeń ma także związek z zagadnieniem tzw. *supertasks*[12]. Inspiracji dla rozważań tego typu zjawisk można doszukać się już w starożytności (paradoksy Zenona), zaś w czasach najnowszych o tego typu zjawiskach mówili np. Blake, Russell czy Weyl[13]. Najogólniej chodzi tutaj o sekwencyjne procesy, w których w skończonym czasie można wykonać nieskończenie wiele kroków. Tak się dzieje, np. gdy każdy kolejny krok jest wykonywany dwa razy szybciej niż poprzedni. Jeśli więc wykonanie pierwszego z nich zajmie 1 minutę, to w chwili $t_0=2$ cały (nieskończony) proces będzie już zakończony[14].

Procedury typu *supertask* niosą ze sobą problemy pojęciowe (chodzi np. o to, czy stan układu p o wykonaniu owego zadania jest w ogóle określony; taki problem stawia np. Thomson – w pracy z 1954 roku – na przykładzie gasnącej i zapalającej się lampy), zaś założenie dotyczące tego, że dane urządzenie fizyczne działa coraz szybciej jest niefizyczne[15]. Niektóre z modeli hiperobliczeń wykazują podobieństwo do *supertasks*, jednak nie zawsze tak jest. By-

---

[12] Nie jest mi znany polski odpowiednik; pozostanę więc przy terminie angielskim.

[13] Russell rozważa problem wykonania nieskończenie wielu operacji w skończonym czasie – każda kolejna jest dwukrotnie szybsza od poprzedniej (Russell 1936). Weyl również rozważa ciąg nieskończenie wielu czynności w skończonym czasie w odniesieniu do zagadnień dotyczących liczb naturalnych (Weyl 1949). Podobny motyw pojawia się też we wczesnej pracy Blake'a (1926).

[14] Nie będę tu przedstawiał modeli takich zjawisk; dobrym źródłem informacji (zawierającym także obszerną bibliografię) jest np. artykuł Laraudogoitii (2011). O historii problematyki traktuje m.in. Copeland 2002a; praca ta zawiera również opis przyspieszającej maszyny Turinga, którą można uznać za teoretyczny model dla *supertasks*.

[15] Por. np. wczesną dyskusję w pracach: Thomson 1954, Benacerraf 1962, Chihara 1965; czy bardziej współczesną, np. Earman, Norton: 1993, 1996. Niefizyczność owych modeli można obserwować z punktu widzenia np. mechaniki kwantowej i ogólnej teorii względności.

łoby błędem traktowanie procesów hiperobliczeniowych po prostu jako realizujących pewnego typu *supertask*, warto jednak pamiętać o takich inspiracjach.

3. Niektóre teoretyczne modele hiperobliczeń

Naturalna grupa modeli procesów hiperobliczeniowych stanowi uogólnienie klasycznej maszyny Turinga przez rozważenie niestandardowego czasu obliczeń[16]. W (standardowej) maszynie Turinga czas maszyny T_m ma typ porządkowy ω_o (czyli maszyna może wykonywać potencjalnie nieskończenie wiele kroków w stałych odstępach czasu). Czas maszyny T_m pozostaje w pewnej relacji do czasu obserwatora T_o; relację tę wiąże funkcja *observe*: $T_m \rightarrow T_o$. Intuicyjnie, funkcja *observe* mówi nam, w którym momencie (naszego czasu) obserwujemy dany etap obliczenia[17]. W standardowym przypadku jest ona współkońcowa w T_o (czyli nieco upraszczając: nie jesteśmy w stanie zaobserwować całości obliczenia maszyny M w czasie, który z naszego punktu widzenia ma charakter ograniczony)[18]. Przypuśćmy jednak, że funkcja *observe* nie jest współkońcowa w T_o, czyli, że zaobserwujemy całość obliczenia maszyny M przed pewnym ustalonym momentem czasowym t_o ([19]). Taki model jest silniejszy niż standardowy model obliczeń: jeśli np. maszyna M zapętli się dla pew-

---

16 Tak przedstawia problem np. Stannett (2006).

17 Wymaga to przyjęcia naturalnych założeń dotyczących T_o, np. tego, że na T_o został zadany pewien porządek i że funkcja *observe* go zachowuje (tj. obserwujemy etapy obliczeń zgodnie z ich kolejnością) etc. Natomiast funkcja ta nie musi być w ogólnym wypadku identycznością: może się przecież zdarzyć, że obserwujemy działania maszyny Turinga z opóźnieniem (a skala tych opóźnień może się zmieniać).

18 Jeśli $(X, \leq)$ i $(X^*, \leq^*)$ to dwa porządki liniowe, wówczas współkońcowość funkcji $f{:}(X, \leq) \rightarrow (X^*, \leq^*)$ znaczy po prostu, że $\forall x^* \in X^* \exists x \in X\ (x^* \leq f(x))$, czyli wartości funkcji f znajdą się dowolnie daleko w X^*.

19 Formalnie: $sup\{observe(t){:}t \in T_m\} = t_o$ dla pewnego $t_o \in T_o$. Zauważmy, że w taki sposób można interpretować wykonanie *supertask*: możemy w czasie (z naszego punktu widzenia) ograniczonym zaobserwować wynik działania pewnego sekwencyjnego procesu, którego czas własny to ω_o.

nych danych wejściowych, to w standardowym modelu nie mamy możliwości, aby się o tym dowiedzieć, natomiast w przypadku tego modelu możemy ten fakt zaobserwować. Podkreślmy, że wzmocnienie siły obliczeniowej nie polega na tym, iż sama maszyna Turinga zostaje poddana modyfikacji, ale na tym, że jej czasowa (czy raczej: czasoprzestrzenna) relacja względem obserwatora jest nietypowa. W dalszej części rozdziału będziemy rozważać fizyczną realizację takiej sytuacji.

Standardowy model możemy też uogólnić przez rozważanie innych struktur czasowych i rozważać np. czas będący liczbą porządkową $\alpha>\omega_0$. Warto tu zauważyć (por. np. Shagrir 2004), że tego typu modele usuwają pewne trudności pojęciowe, które pojawiają się w przypadku niektórych *supertasks.* Choćby w przypadku *supertask* realizowanego za pomocą przyspieszającej maszyny Turinga (w której każdy kolejny krok jest wykonywany dwa razy szybciej od poprzedniego) pojawia się problem ciągłości w chwili $t_0=2$. Z punktu widzenia definicji działania takiej przyspieszającej maszyny ten moment czasowy po prostu wykracza poza model i stan maszyny w tej chwili nie jest określony. Innymi słowy, pytanie o jej stan w chwili $t_0=2$ nie ma sensu (podobnie jak pytanie o to, co będzie się działo zaraz po końcu czasu). Tę trudność usuwa się w modelu maszyn Turinga z czasem nieskończonym $\alpha>\omega_0$. Należy jednak pamiętać, że taka maszyna Turinga to inny model i że ta różnica widoczna jest już na poziomie definicji samej maszyny (a nie jej relacji z obserwatorem). W tego typu modelach musimy dodatkowo wprowadzić warunek definiujący to, co dzieje się w krokach granicznych λ: stany maszyny w momentach czasowych $\alpha<\lambda$ wyznaczają stan w chwili λ. Oczywiście w kroku granicznym nie możemy uzależnić stanu maszyny w chwili λ od stanu maszyny w kroku poprzednim (bo takiego po prostu nie ma), ale od całego wcześniejszego procesu obliczenia – np. od tego, czy o pojawiało się nieskończenie wiele razy albo czy stan maszyny się ustabilizował etc. Modele maszyn Turinga z czasem nieskończonym są badane np. w pracach: Hamkins, Lewis 2000, Hamkins 2002 (tam też znajdziemy wyniki dotyczące siły obliczeniowej takiej maszyny, w zależności od zadanej struktury czasowej).

Oprócz rozważania niestandardowych struktur czasowych, inne uogólnienia powstają przez rozważenie odmiennego sposobu reprezentacji danych lub zasobów elementarnych operacji. W maszynie Turinga dane są reprezentowane przez dyskretne symbole (wystarczy alfabet złożony z dwóch symboli: 0 i 1). Elementarne operacje maszyny to operacje na pojedynczych symbolach zgodnie z instrukcjami z pewnej skończonej listy. Można jednak rozważać modele, w których operacji dokonuje się np. bezpośrednio na liczbach rzeczywistych, a nie na ich skończonych reprezentacjach. Tak jest w modelu z pracy Blum, Shub, Smale 1989 (por. też Blum, Cucker, Shub, Smale 1998)[20]. Innego typu modele zakładają dostępność dodatkowych elementarnych operacji. W klasycznej maszynie Turinga elementarna akcja polega na odczytaniu z taśmy symbolu, ruchu głowicy i wpisaniu na taśmę symbolu (przy czym zbiór symboli, stanów i instrukcji jest skończony), jednak można rozważać modele, w których urządzenie potrafi np. obliczyć wartość pewnej funkcji. Na przykład w modelu GPAC (*General Purpose Analog Computer*), zdefiniowanym przez Shannona (1941), mamy do dyspozycji możliwość bezpośredniego wyliczenia całki Riemanna–Stieltjesa[21]. Jej uogólnieniem jest teoria analogowych rekurencyjnych funkcji rzeczywistych (Moore 1996, Costa, Loff, Mycka 2009). Mamy tam do dyspozycji tzw. rekursję różniczkową, czyli operację generowania rozwiązania pewnego układu równań różniczkowych cząstkowych (problemu Cauchy'ego – oczywiście przy pewnych założeniach dotyczących wyjściowych funkcji). Jeszcze innym modelem jest model analogowych sieci neuronowych (tzw. model ARNN – *Analog Re-*

[20] Można problem obliczeń rozważać w bardziej ogólny sposób, a działanie algorytmu (maszyny Turinga) definiować nie relatywnie do skończonego alfabetu (tu wystarczy {0,1}), ale do struktur bogatszych (np. dowolnych pierścieni). Oczywiście mamy tutaj do czynienia z silną idealizacją wykraczającą zdecydowanie poza model Turinga, bowiem zakładamy np., że ów algorytm operuje bezpośrednio na elementach tej bogatej struktury (w szczególności rozpoznaje nieskończenie wiele symboli).

[21] Ściślej: jeśli $u(x)$ i $v(x)$ są danymi funkcjami wejściowymi, to GPAC liczy wartość całki $\int u(x)dv(x)+a$ w przedziale od t_0 do t, gdzie t oraz a są pewnymi parametrami charakterystycznymi dla danego urządzenia. Ścisła definicja modelu GPAC została przedstawiona w pracy Pour-El 1974.

current Neuronal Network), w którym mamy do czynienia z siecią przetwarzającą informacje w sposób niealgorytmiczny (model został zdefiniowany w pracach Siegelmann, Sontag: 1994, 1995; por. też Siegelmann: 1998, 2003)[22]. Nie będziemy tutaj rozważać szczegółów technicznych tych modeli[23].

4. Problem sensu fizycznego modeli hiperobliczeniowych

Istnieje zatem szereg modeli teoretycznych, pojawia się jednak problem ich sensu fizycznego. Na przykład nie jest jasne, czy jakikolwiek sens fizyczny można przypisać maszynie Turinga z czasem typu ω_1. Powstaje więc naturalna wątpliwość, czy rozważania dotyczące procesów niealgorytmicznych nie mają charakteru czczej spekulacji. W dyskusjach są formułowane również zarzuty, że ewentualny efekt hiperobliczeniowy *de facto* polega jedynie na tym, iż do danego układu zostały już uprzednio wprowadzone pewne dodatkowe informacje. A zatem – twierdzą krytycy – mamy tu do czynienia ze swoistym błędnym kołem: aby uzyskać (zaimplementować czy zainicjować) proces nieobliczalny, musimy już uprzednio mieć do dyspozycji pewien proces nieobliczalny[24]. Podobny zarzut dotyczy problemu ewentualnego wydobycia informacji z systemu hiperobliczeniowego przez pomiar. Bardzo krytycznie na temat hiperobliczeń wypowiada się np. Davis (2004, 2006). Zarzuty rzeczywiście są poważne: jeśli faktycznie dla ustalenia wartości jakiegoś parametru nieobliczalnego (klasycznie) byłoby konieczne zadanie na wejściu wartości nieobliczalnej dla jakiegoś innego parametru, to czar hiperobliczeń pryska. Dlatego za bardzo ważne dla tej dyskusji uważam wyniki Pour-El i Richardsa (Pour-El, Richards:

---

[22] Model jest silniejszy niż model Turinga, jednak jeśli w ARNN ograniczymy się do wymiernych wartości wag, otrzymamy model równoważny turingowskiemu (Siegelmann, Sontag 1995). Jako ciekawostkę można podać, że sieć obliczająca wszystkie funkcje częściowo rekurencyjne liczy 886 neuronów.

[23] Ciekawy przegląd problematyki zawierają prace Mycka: 2006, 2010.

[24] Taki zarzut jest formułowany np. w stosunku do modelu ARNN, który redukuje się do modelu Turinga, jeśli współczynniki są obliczalne.

1979, 1981, 1989). W pierwszej pracy dowodzą oni istnienia równania różniczkowego postaci *y'(x)=F(x,y)* zdefiniowanego na pewnym obszarze (prostokącie) *R*, przy czym funkcja *F(x,y)* jest funkcją obliczalną, natomiast równanie nie ma obliczalnego rozwiązania na żadnym podobszarze *R* ([25]). Jeszcze ciekawsze z punktu widzenia naszej dyskusji są wyniki z pracy Pour-El, Richards 1981, w której autorzy wykazują, że istnieje trójwymiarowe równanie fali mające obliczalne dane wejściowe (a także współczynniki równania), lecz którego rozwiązanie nie stanowi funkcji obliczalnej. Jest to zatem opis procesu fizycznego, który wyspecyfikowano w sposób algorytmiczny, natomiast sama ewolucja układu nie daje się symulować na maszynie Turinga: to proces fizyczny tworzy wartości nieobliczalne. Kreisel interpretuje wyniki Pour-El i Richardsa jako opis analogowego komputera, który nie może być (nawet teoretycznie) symulowany za pomocą maszyny Turinga (Kreisel 1982: 901). Mówiąc o analogowym komputerze, ma na myśli dowolny system fizyczny, który realizuje odpowiednie procedury[26]. Wyniki Pour-El i Richardsa (wyniki w podobnym duchu zawiera również praca Pour-El, Zhong 1997) pokazują, że rozważaniom dotyczącym procesów niealgorytmicznych w żadnej mierze nie można postawić zarzutu niefizyczności i czystej spekulatywności[27].

Omawiane wyniki są ciekawe z punktu widzenia rozważań prowadzonych znacznie wcześniej przez Kreisla (autorzy odwołują się do

---

[25] Nie wchodząc w szczegóły techniczne: liczba rzeczywista *a* jest obliczalna, jeśli można podać algorytm, który będzie mógł ją przybliżyć z dowolną zadaną z góry dokładnością (np. generując ciąg liczb wymiernych zbieżny do *a*, spełniający warunek Cauchy'ego).

[26] Warto odnotować tutaj użycie terminu „komputer analogowy". Oczywiście my stosujemy termin „komputer" w ściśle określonym sensie (i *ex definitione* nasz komputer jest cyfrowy). Pomijając względy terminologiczne, chodzi o istnienie układu (urządzenia) rozwiązującego problemy matematyczne i mającego ma charakter analogowy.

[27] Podobny problem był rozważany w pracy Scarpellini 1963, w której autor zastanawia się, czy jest możliwe skonstruowanie analogowego komputera mogącego wygenerować funkcję $f(x)$ taką, że zdanie $\int f(x)\cos(nx)dx > 0$ jest nierozstrzygalne (za pomocą maszyny Turinga), natomiast ów analogowy komputer byłby w stanie stwierdzić za pomocą bezpośredniego pomiaru, czy faktycznie zachodzi ta nierówność.

nich w swoich pracach). Badacz postawił w jednej ze swych rozpraw (Kreisel 1974) zagadnienie istnienia stałych fizycznych, które nie są liczbami (rzeczywistymi) obliczalnymi, i zastanawiał się nad problemem, czy istnienie takich stałych można przewidzieć w ramach istniejących teorii fizycznych. W innym miejscu autor argumentuje, że zachowanie systemów fizycznych opisywanych w mechanice klasycznej jest rekurencyjne, jednak nie musi być tak w przypadku mechaniki kwantowej (Kreisel 1965: 44). Odnosił to również do problemu myślenia, twierdząc, że hipoteza, zgodnie z którą nasze myślenie nie ma charakteru algorytmicznego, nie ma charakteru antymaterialistycznego czy antyfizycznego[28]. Zdaniem Kreisla nie ma bowiem żadnych danych świadczących o rekurencyjnym charakterze mechaniki kwantowej – nie jest wszelako oczywiste, że rekurencyjnie opisany system fizyczny musi wykazywać zachowania rekurencyjne, obliczalne (Kreisel 1967: 270). Wyniki Pour-El i Richardsa można interpretować znacznie silniej, jako świadczące przeciwko tezie o algorytmicznym charakterze procesów w mechanice klasycznej. W tych interpretacjach należy jednak zachować pewną ostrożność. Nie byłby uprawniony wniosek, że oto możemy skonstruować urządzenie fizyczne, w którym – za pomocą odpowiednich zjawisk falowych – będziemy mogli wytworzyć efekty hiperobliczeniowe. Spostrzeżenia Pour-El i Richardsa mają charakter teoretyczny i nie jest przy tym jasne, czy owe równania fali, o których piszą, mają szanse na fizyczne implementacje. Na przykład w pracy Weihrauch, Zhong 2002 autorzy badają propagację fal na różnego typu przestrzeniach funkcyjnych (przestrzenie funkcji ciągłych i przestrzeni Sobolewa) i konkludują stwierdzeniem, że – w ramach rozsądnego modelu obliczeń – nie widać możliwości implementacji „komputera falowego" w oparciu o wyniki Pour-El i Richardsa (co oczywiście nie wyklucza istnienia innego typu zjawisk fizycznych stanowiących taką implementację).

Powyższe analizy dotyczą możliwości fizycznego przetwarzania informacji przez układy niealgorytmiczne. Tak można patrzeć na

[28] Zwolennikiem tezy o niealgorytmiczności naszego myślenia jest też Penrose, por. np. Penrose 1994.

ową hipotetyczną „maszynę falową" – byłaby ona układem fizycznym, który na wejściu otrzymuje informacje (w postaci stosownych parametrów układu i danych wejściowych), zaś na wyjściu generuje informację, której nie moglibyśmy uzyskać za pomocą symulacji algorytmicznej. Jest to zatem jawne odejście od cyfrowego paradygmatu rozumienia informacji. W paradygmacie cyfrowym patrzymy na informację jako na – mówiąc najogólniej – coś, co jest zakodowane za pomocą ciągu 0–1, zaś operacje dokonywane na owych informacjach (kodach) mają charakter algorytmiczny. Abstrahuje się więc tutaj od aspektów fizycznych, traktując operowanie na informacjach jako wyidealizowane procedury mechaniczne[29].

Jeśli jednak proces przetwarzania informacji będziemy chcieli ująć szerzej, wówczas pytania o jego fizyczne aspekty nabierają nowego znaczenia[30]. Od dłuższego już czasu zwraca się uwagę na fakt, że informacja i jej przetwarzanie mają aspekt nie tylko matematyczny, ale też fizyczny (często cytuje się stwierdzenie „Informacja jest fizyczna" pochodzące z klasycznej pracy Landauer 1961). W literaturze są dyskutowane np. fizyczne ograniczenia dotyczące możliwości kodowania informacji, a także – problem rozpraszania ciepła przy obliczeniach nieodwracalnych. Świadczy to o tym, że pewne pojęcia czysto matematyczne (np. obliczenie nieodwracalne) mają swoje odbicie w postaci fizycznych zjawisk. Jednym z dyskutowanych problemów jest w szczególności to, jaki jest zakres pojęcia obliczenia – czy (i kiedy) można mówić np. o tym, że to Natura dokonuje pewnych obliczeń[31]. Pojawia się pytanie, czy procesy niealgorytmiczne

---

[29] Ograniczenia fizyczne są w tym sensie uwzględniane w tych badaniach, że jako praktycznie obliczalne traktuje się funkcje o złożoności wielomianowej. Jednak i to stanowi pewną idealizację – wszak algorytm o złożoności wielomianowej $O(n^{100!})$ byłby w oczywisty sposób bezużyteczny w praktyce.

[30] Słynną wypowiedź Einsteina „Boga nie obchodzą nasze problemy matematyczne. On całkuje empirycznie", możemy interpretować w tym duchu.

[31] Istnieje szereg zjawisk przyrodniczych, które można interpretować jako obliczenia (procesy fizyczne i biologiczne, np. synteza białek czy rozmnażanie bakterii) i które można wykorzystać w modelach obliczeniowych. Od 2002 roku ukazuje się czasopismo "Natural Computing" poświęcone tej problematyce. Ciekawą ilustrację takiego typu obliczenia stanowi (wspomniany w rozdziale trzecim) „linowy komputer" Gaudiego.

też można uznać za formę przekształcania informacji (przy czym – być może – samo rozumienie informacji musiałoby zostać zmodyfikowane). Sądzę, iż odpowiedź jest pozytywna: np. wyniki Pour-El i Richardsa można interpretować tak, że pewna informacja na temat stanu układu fizycznego po określonym czasie *t* niejako zawiera się w specyfikacji układu, ale nie jest możliwe dotarcie do niej na drodze algorytmicznej (należy po prostu rozpocząć ewolucję i dokonać pomiaru).

W odniesieniu do matematyki owemu problemowi możemy nadać następującą postać: jak można rozumieć proces przetwarzania informacji zawartych w teoriach matematycznych? W klasycznym, turingowskim paradygmacie informacja zawarta w aksjomatach formalnej teorii może być wydobyta (bądź wykorzystana) przez proces algorytmiczny (obliczenie bądź dowód). Próbą opisania relacji ilościowych, dotyczących tego, ile informacji zawiera się w danych aksjomatach, jest algorytmiczna teoria informacji Chaitina[32]. To niewątpliwie ujęcie spójne z formalistyczną wizją dowodu matematycznego jako pewnego procesu (co do zasady) zmechanizowanego. Przejście od wizji dowodu jako procesu semantycznego (opartego na pewnych intuicjach) do wizji dowodu jako procesu formalnego (obliczenia, por. rozdział pierwszy) w naturalny sposób kieruje w stronę paradygmatu turingowskiego. Wydaje się zatem, że formalistyczne rozumienie procesów przetwarzania informacji winno dominować, czy wręcz wykluczyć, możliwość innych interpretacji. Jednak da się wskazać naturalne motywacje do wyjścia poza ten obraz i zadania pytania o możliwość niealgorytmicznego przetwarzania informacji[33]. Przede wszystkim należy dopuścić przy tym możliwość, iż stan

---

32 W tym duchu można też interpretować zjawiska gödlowskie: niedowodliwość – swobodnie mówiąc – oznacza, że dane twierdzenie zawiera zbyt dużo informacji, aby można je było wydobyć z teorii.

33 Motywacją do rozważania takiego niealgorytmicznego ujęcia może być zarówno analiza zachowania układów fizycznych, jak i refleksja na temat np. intuicyjnej oceny siły perswazyjnej argumentu. Problem ten występuje również w matematyce jako zagadnienie wiarygodności aksjomatów albo np. rzetelności formalnego ujęcia pewnych intuicji preteoretycznych. Nie wydaje się, aby ów problem dał się opisać w duchu algorytmicznym.

układu fizycznego „koduje" pewne informacje, choć nie są one możliwe do zapisania w tradycyjnej postaci ciągu 0–1 ([34]). W takiej sytuacji nie byłoby możliwe dotarcie do informacji w inny sposób niż przez bezpośrednie przeprowadzenie ewolucji układu i odpowiednie zinterpretowanie stanu końcowego.

5. Przykład modelu fizycznego – relatywistyczna maszyna Turinga

Granica między modelami czysto matematycznymi a mającymi sens fizyczny nie jest jasno określona. Nawet status hipotetycznego „komputera falowego", o którym można byłoby myśleć w kontekście wyników Pour-El i Richardsa nie jest jasny. Modele mają sens fizyczny zawsze relatywnie do określonej teorii fizycznej. Jednak zgodzimy się, że modele, których akcja rozgrywa się w czasoprzestrzeni newtonowskiej i w których zakładamy dowolnie duże prędkości albo dowolnie małe odcinki czasu, są sprzeczne z fizyką relatywistyczną (bądź kwantową) i w tym sensie mają charakter czysto matematyczny. Rozważania dotyczącego typowych *supertasks* mogą mieć jedynie charakter eksperymentu myślowego na temat świata, w którym obowiązują inne prawa fizyki. Z kolei inne modele są całkowicie zgodne z prawami fizyki, jakie znamy (choć oczywiście pozostaje problem ich praktycznej realizowalności). Literatura na ten temat jest bogata, a szczegółowa prezentacja całości problematyki wykracza zdecydowanie poza ramy niniejszej pracy[35]. Wybrałem zatem tu

---

[34] Jeśli kubit jest postaci np. $a_0|0\rangle+a_1|1\rangle$, gdzie a_0 i a_1 są współczynnikami niealgorytmicznymi.

[35] Można tu wymienić przykładowo: wspomniane wcześniej modele ARNN, Bluma, Shuba i Smale'a czy model rekursji różniczkowej Moore'a, a także model obliczeń kwantowych Kieu, w którym mowa o kwantowym systemie ewoluującym w taki sposób, że rozstrzyga problem stopu (por. Kieu: 2001, 2001a, 2002, 2002a). Należy jednak dodać, że nie ma powszechnej zgody co do tego, czy model Kieu jest poprawny, por. np. dyskusję w Smith 2006. Istnieje szereg prac dotyczących wykonalności pewnych obliczeń w zależności od znajdującej się w tle teorii fizycznej – np. dotyczących obliczalności w mechanice klasycznej (np. Beggs, Tucker: 2006, 2007, 2009).

jeden model, który uważam za ciekawy. Jego zaletą jest duża poglądowość, a także to, że pewne pytania filozoficzne można postawić w bardzo klarowny i obrazowy sposób. Jest to model tzw. komputera relatywistycznego (czy relatywistycznej maszyny Turinga). Będzie on – z punktu widzenia tej pracy – niejako kanonicznym i do niego odniosę analizy filozoficzne. Należy jednak zauważyć, że mogą one – *mutatis mutandis* – zostać zastosowane także w odniesieniu do wielu innych modeli hiperobliczeniowych. W tym sensie specyfika fizyczna czy techniczna komputera relatywistycznego nie odgrywa fundamentalnej roli w dyskusji.

Pomysł komputera relatywistycznego pojawił się w pracach: Pitowsky 1990, Hogarth 1992[36]. Problematyce tej są poświęcone też np. artykuły: Hogarth: 1993, 1994, 2000, Etesi, Németi 2002, Earman, Norton 2003, Shagrir, Pitowsky 2003, zaś dyskusję dotyczącą fizycznej wiarygodności takiego scenariusza znajdziemy w: Németi, David 2006 oraz Andréka, Németi, Németi 2009.

Mówiąc ogólnie, komputer relatywistyczny jest zdefiniowany jako pewien układ fizyczny znajdujący się w tzw. czasoprzestrzeni Malamenta–Hogartha. Są spełnione w niej następujące warunki:

1. Istnieje krzywa γ taka, że czas własny podróży po krzywej γ jest nieskończony;
2. Istnieje punkt p (tzw. zdarzenie Malamenta–Hogartha) taki, że cała krzywa γ leży w przeszłości punktu p;
3. Krzywa γ startuje z punktu q;
4. Z punktu q do p można dostać się w skończonym czasie (po innej krzywej α);
5. Z krzywej γ można przesyłać sygnały do punktu p.

Przykładowo – dwóch podróżników startuje z punktu q do punktu p. Podróż pierwszego (po krzywej γ) trwa nieskończenie długo (z jego punktu widzenia), zaś drugi dociera do punktu p w skończonym czasie i może zobaczyć całą historię podróży pierwszego podróżnika po krzywej γ.

---

[36] Z podobnymi ideami wystąpili Malament i Németi w 1988 roku (por. Németi, David 2006: 126).

W jaki sposób można byłoby wykorzystać taki układ fizyczny do rozwiązywania problemów niealgorytmicznych? Wyobraźmy sobie urządzenie składające się z dwóch komputerów K_γ oraz K_α, które mają za zadanie przeprowadzić pewne nieskończone obliczenie (np. sprawdzić wszystkie liczby naturalne w poszukiwaniu przykładu liczby o pewnej własności P). Schemat postępowania jest następujący:

1. Komputer K_γ uruchamiamy i wysyłamy po krzywej γ (K_γ sprawdza po kolei wszystkie przypadki – np. wszystkie liczby naturalne);
2. Drugi komputer K_α podróżuje po krzywej α;
3. Jeśli komputer K_γ znajdzie przykład liczby o własności P, to wysyła sygnał do komputera K_α. Komputer K_α otrzyma ten sygnał w momencie, gdy znajdzie się w punkcie p;
4. Brak sygnału w punkcie p oznacza więc, że komputer K_γ nigdy nie znalazł przykładu liczby o własności P;
5. Wtedy można uznać, że takiej liczby o własności P nie ma (czyli że udowodniono zdanie $\forall n \neg P(n)$).

Poszukiwanie liczby naturalnej o pewnej własności to schemat, pod który podpada wiele przypadków. Możemy tutaj myśleć o „ręcznej weryfikacji" hipotezy Fermata (spodziewamy się oczywiście, jaki będzie jej wynik) czy hipotezy Goldbacha bądź innych faktów teorioliczbowych. W analogiczny sposób mogą zostać potraktowane problemy kombinatoryczne, które można kodować w postaci zdań o liczbach naturalnych (taki charakter ma np. hipoteza czterech barw), czy też zdania o charakterze metamatematycznym (np. problem niesprzeczności ZFC, który – po zakodowaniu – staje się problemem o charakterze teorioliczbowym).

Model ten wydaje się mieć czysto spekulatywny charakter, jest jednak w pełni zgodny z ogólną teorią względności. Ma on zatem zdecydowanie bardziej fizyczny charakter niż np. modele *supertasks* w przestrzeni newtonowskiej. Co więcej, w pracy Németi, David 2006 autorzy twierdzą, że ów model jest nie tylko niesprzeczny z prawami fizyki, ale że teza o możliwości praktycznej realizacji takiego scenariusza nosi znamiona prawdopodobieństwa (niezależnie od oczywistych problemów technicznych).

Badacze opisują dwa komunikujące się komputery: H (*high*) oraz L (*low*). L podróżuje w stronę czarnej dziury pewnego szczególnego typu (czarnej dziury Kerra, która powoli się obraca). Komputer H w międzyczasie prowadzi obliczenia i przesyła sygnały do komputera L. Autorzy rozważają sytuację, w której komputer H poszukuje dowodu sprzeczności ZFC – czyli przegląda wszystkie możliwe dowody formalne. Dzięki temu, że reprezentacja dowodów jest rekurencyjna, takie przeszukiwanie sprowadza się do przeglądania liczb naturalnych w celu znalezienia tej, która koduje dowód sprzeczności ZFC. Jeśli jej nie znajdziemy, to znaczy, że sprzeczności nie ma. W momencie znalezienia dowodu komputer H ma obowiązek wysłać sygnał do komputera L. Ponieważ akcja rozgrywa się w okolicach czarnej dziury, w miarę jak komputer L zbliża się do horyzontu zdarzeń, stosunek prędkości między zegarami L oraz H zwiększa się do nieskończoności. Mówiąc obrazowo, kiedy L jest blisko horyzontu zdarzeń, w czasie 1 sekundy komputera L mija 10^{100} sekund komputera H. W szczególności, jeśli komputer H znajdzie wynik (np. sprzeczność w ZFC) w czasie 10^{100}, komputer L dowie się o tym po owej jednej sekundzie. Im bliżej horyzontu zdarzeń znajdzie się L, tym większa jest różnica w prędkości upływu czasu.

To na razie nie wprowadza nowej jakości – po prostu mamy niesłychanie szybkie urządzenie, które w ciągu sekundy prowadzi 10^{100} operacji (owym superkomputerem jest *układ* obu komputerów znajdujący się w pobliżu czarnej dziury). Nowa jakość pojawia się w sytuacji, w której komputer L przekracza horyzont zdarzeń. Przy zbliżaniu się doń stosunek prędkości między zegarami H i L rośnie do nieskończoności w taki sposób, że w momencie przekraczania horyzontu zdarzeń przez komputer L, „widzi” on całą historię komputera H – zgodnie ze scenariuszem, jaki może zajść w czasoprzestrzeni Malamenta–Hogartha. Jeśli więc przekraczając horyzont zdarzeń, komputer L nie otrzyma sygnału od komputera H, oznacza to, że komputer H *nigdy* takiego sygnału nie wysłał. W szczególności, jeśli L nie otrzymał raportu o sprzeczności ZFC, oznacza to, że H nie znalazł sprzeczności (można dodać: przez całą *swoją* wieczność). Tym samym więc relatywistyczny hiperkomputer rozwiąże problem niesprzeczności ZFC.

Należy też zauważyć, że działanie komputera relatywistycznego nie opiera się na wykonaniu *supertask*. Oczywiście gdybyśmy mieli do dyspozycji urządzenie do wykonywania *supertasks*, to moglibyśmy rozwiązywać problemy nierozstrzygalne, jak np. problem stopu, 10 problem Hilberta, moglibyśmy dowiedzieć się, czy ZFC jest niesprzeczna etc.[37] Należy jednak wątpić, czy faktycznie *supertask* mógłby być wykonany przez jakikolwiek układ fizyczny. Natomiast komputer relatywistyczny działa w sposób zgodny z prawami fizyki – każdy z komputerów H oraz L zachowuje się standardowo[38]. Komputer H dokonuje standardowych obliczeń i z jego punktu widzenia nie dzieje się nic niezwykłego. Podobnie jest w przypadku komputera L, który po prostu podróżuje po pewnej krzywej czasoprzestrzennej, aż w pewnym momencie sprawdza, czy nadszedł oczekiwany sygnał, czy nie.

6. RTM w służbie matematyki

Owe hipotetyczne urządzenie (hiperkomputer) moglibyśmy wykorzystać przy rozwiązywaniu np. problemów teorioliczbowych czy kombinatorycznych (np. hipotezy Goldbacha czy problemu sprzeczności ZFC). Ogólny schemat wyglądałby tak:

---

[37] We wcześniejszej części rozdziału był rozważany problem relacji między czasem maszyny Turinga a czasem obserwatora. Można powiedzieć, że układ wykonujący *supertask* to układ, w którym funkcja *observe* ma ograniczony charakter: jesteśmy w stanie „z zewnątrz" zaobserwować c a ł o ś ć obliczenia w skończonym (dla nas) czasie. Relatywistyczna maszyna Turinga ma podobną strukturę: obserwator otrzymuje sygnały w skończonym (z jego punktu widzenia) czasie, kontrolując c a ł e obliczenie komputera H. Subtelność polega na tym, że w klasycznym *supertask* zakładamy, iż urządzenie działa coraz szybciej (co jest założeniem niefizycznym), tutaj natomiast tego typu założeń brak. Efekt przyspieszenia ma relatywistyczne źródło i relatywistyczny charakter – w tym sensie, że komputer H nigdy nie dowie się, że ustalił niesprzeczność ZFC, ponieważ z jego punktu widzenia czas po prostu płynie, a H wykonuje kolejne kroki obliczeń.

[38] Niektórzy autorzy (np. Earman, Norton 1993) piszą, że komputer relatywistyczny wykonuje – jako całość – pewien *supertask*: chodzi o to, iż w czasie skończonym z punktu widzenia obserwatora uzyskuje on wynik takiego nieskończonego obliczenia. Jednak na pewno to nie ów obserwator wykonuje nieskończenie wiele kroków obliczenia. Skłaniam się więc do odrzucenia tezy, iż działanie komputera relatywistycznego można opisywać jako *supertask*.

1. Upewniamy się, że (zgodnie z naszą teorią fizyczną T_F), pewien układ fizyczny M_{HIPER} implementuje stosowny proces hiperobliczeniowy;

2. Upewniamy się (część teoretyczna), że ten proces rozwiązuje problem P (na przykład sprawdza hipotezę Goldbacha albo sprawdza, czy wśród wszystkich dowodów w ZFC nie znajdzie się dowód zdania „0=1”);

3. Uruchamiamy M_{HIPER} i czekamy (część praktyczna);

4. M_{HIPER} drukuje „TAK” lub „NIE”;

5. Uznajemy nasz problem P (np. hipotezę Goldbacha, problem sprzeczności ZFC) za rozwiązany.

W monografiach twierdzenie P jest opatrzone gwiazdką i w miejscu klasycznego dowodu ma adnotację „hiperobliczenie przeprowadzono w okolicach czarnej dziury Kerra (w odległej galaktyce...)”.

Nasz hiperkomputer mógłby udowodnić jakieś zdanie (np. hipotezę Goldbacha), informując jednocześnie, że najkrótszy dowód formalny ma długość np. $10^{100!}$. Oczywiście nigdy nie bylibyśmy w stanie takiego dowodu prześledzić; stosują się tutaj więc zastrzeżenia, które były czynione w stosunku do dowodów komputerowych. Jest przy tym oczywiste, że w takim przypadku stopień owej niedostępności byłby nieporównywalnie wyższy niż w przypadku zwykłych dowodów komputerowych. W pewnym sensie taki hiperkomputer działałby trochę jak wróżka, która udziela nam informacji, jednak my nie mamy żadnej możliwości ich zweryfikowania.

Dopóki mówimy tylko o (nawet bardzo radykalnym) przyspieszeniu operacji, nie pojawia się efekt hiperobliczeniowy – choć oczywiście problemy dotyczące naszego rozumienia uzyskiwanych wyników czy ich włączania w nasz system wiedzy matematycznej ulegają dalszemu wyostrzeniu. Rozważmy jednak kolejny scenariusz, który nie ma analogii w przypadku klasycznych komputerów (ani komputerów kwantowych). Wykorzystanie hiperkomputera mogłoby bowiem polegać na sprawdzeniu, czy dane twierdzenie α daje się udowodnić (bądź obalić) w ramach teorii T, czy też jest niezależne: hiperkomputer szuka jednocześnie dowodów α oraz $\neg\alpha$ i albo znajduje któryś z nich, albo informuje o niezależności zdania α od T ([39]). Przypuśćmy, że tak właśnie stało się z hipotezą Goldbacha G: nasz komputer przekazał nam raport, z którego dowiadujemy się, że zdanie G jest niezależne od ZFC. Jeśli zatem uznamy, iż granice matematycznej argumentacji (tj. powszechnie przyjmowanych założeń i dopuszczalnych metod dowodowych) są wyznaczone przez teorię mnogości ZFC (a jest to założenie standardowo czynione), to będzie to oznaczać, że nie istnieje *matematyczny* sposób ustalenia, czy hipoteza Goldbacha jest prawdziwa czy nie[40]. Podobnie mogłoby być oczywiście z każdym zdaniem niezależnym od ZFC – nasz hiperkomputer musiałby po prostu przeszukać wszystkie możliwe dowody, stwierdzając, że nie ma tam ani dowodu α, ani dowodu negacji α ([41]).

Jednak pomimo niezależności danego zdania α od ZFC, można spróbować wykorzystać hiperkomputer do *bezpośredniego* uzyskania informacji na temat prawdziwości zdania α. Takie wykazanie prawdziwości danego zdania nie polegałoby więc na znalezieniu faktycznego dowodu formalnego na podstawie aksjomatów ZFC, ale po prostu na sprawdzeniu wszystkich przypadków. W kontekście hipotezy Goldbacha schemat byłby następujący: przeszuku-

---

39 W ogólnym przypadku możemy sprawdzić, czy dana liczba *n* jest elementem pewnego rekurencyjnie przeliczalnego zbioru A, który nie jest rekurencyjny. W przypadku rekurencyjnego zbioru mamy oczywiście zwykłą procedurę sprawdzania, w przypadku zbioru rekurencyjnie przeliczalnego tak nie jest. Można zatem na taki relatywistyczny komputer patrzeć jak na wyrocznię, która odpowiada na pytania dotyczące pewnego zbioru rekurencyjnie przeliczalnego: w przypadku problemu niesprzeczności ZFC udziela odpowiedzi na pytanie, czy zdanie „0=1” należy do (rekurencyjnie przeliczalnego) zbioru twierdzeń ZFC.

40 Gdybyśmy uznali przykład hipotezy Goldbacha za mało realistyczny (można przypuszczać, że nie jest ona niezależna od ZFC), to wystarczy wziąć dowolne zdanie teorioliczbowe niezależne od ZFC – jest ich pod dostatkiem.

41 Można więc powiedzieć żartobliwie, że gdybyśmy mieli hiperkomputery, nie byłoby konieczne wymyślanie *forcingu*, bo niezależność hipotezy kontinuum moglibyśmy sprawdzić za pomocą hiperobliczenia. Jednak oczywiście metoda *forcingu* informuje nas nie tylko o tym, że pewne zdanie jest niezależne, ale dostarcza różnych informacji pozwalających rozumieć głębsze przyczyny owej niezależności.

jemy wszystkie liczby parzyste w poszukiwaniu ewentualnego kontrprzykładu – jeśli go nie znajdziemy, to znaczy, że hipoteza Goldbacha jest prawdziwa[42].

7. Status hiperobliczeniowej argumentacji

Przypuśćmy więc, że hipoteza Goldbacha została potwierdzona za pomocą hiperkomputera[43]. Czy twierdzenie Goldbacha zostanie umieszczone w kursie teorii liczb (w rozdziale „Dowody empiryczne z wykorzystaniem czarnych dziur")? Jaki status przypiszemy tak uzyskanej wiedzy – a mówiąc inaczej: jakie są warunki prawdziwości dla zdania (twierdzenia?) Goldbacha? W rozważanej sytuacji G byłoby zdaniem niezależnym od ZFC, a więc nie moglibyśmy uznać go za standardowe twierdzenie matematyczne. Z drugiej zaś strony mielibyśmy poczucie prawdziwości G (*modulo* zaufanie do naszego hiperkomputera) i potrafilibyśmy sformułować argumenty na rzecz tej tezy. Czy miałyby one charakter matematyczny czy empiryczny? Co stanowiłoby uprawdziwiacz (*truth-maker*) dla G? Nie jest nim dowód, bo ustaliliśmy, że taki dowód w ramach standardowej matematyki nie istnieje. Nie mamy również żadnych ar-

---

[42] W podobny sposób moglibyśmy ręcznie dowodzić różnych zdań – np. twierdzenia o czterech barwach – przeglądając po kolei wszystkie mapy. Można też tak sprawdzić ręcznie np. zmodyfikowane twierdzenie Ramseya czy twierdzenie Goodsteina. W tych przypadkach nie dowiedzielibyśmy się jednak niczego nowego – są to bowiem twierdzenia ZFC. Jednak taką procedurą można objąć również zdania teorioliczbowe niezależne od ZFC – a więc takie, których prawdziwości nie da się ustalić standardowymi metodami matematycznymi (prostym przykładem takiego zdania jest Con(ZFC)). Oczywiście trudno wyobrazić sobie procedurę *bezpośredniego* sprawdzania prawdziwości CH – CH dotyczy własności **R**, a więc obiektu nieprzeliczalnego; zatem nawet wykonanie ω_0 kroków w skończonym czasie nie dostarczy nam żadnych informacji.

[43] Gdyby hipoteza Goldbacha została obalona, tzn. gdyby nasz hiperkomputer znalazł kontrprzykład, to ów kontrprzykład moglibyśmy sprawdzić na zwykłym (dostatecznie szybkim) komputerze, a więc zjawiska niealgorytmiczne odegrałyby rolę jedynie w kontekście odkrycia. Z drugiej jednak strony, jeśli najmniejsza liczba stanowiąca kontrprzykład byłaby większa niż np. $10^{100!}$, to żaden standardowy komputer nie byłby w stanie zweryfikować owego faktu.

gumentów o charakterze metodologicznym[44]. Jedynym argumentem, jaki znamy, jest wynik działania pewnego układu fizycznego, którego – w odróżnieniu od obliczenia zwykłego komputera – nawet co do zasady nie jesteśmy w stanie prześledzić. Trudno jednak twierdzić, że G jest zdaniem prawdziwym z powodów empirycznych w tym sensie, iż prawdziwość G wynika z praw fizyki (np. z prawa grawitacji albo mechaniki kwantowej czy – jak w tym wypadku – z ogólnej teorii względności). Oczywiście gdyby uniwersum fizyczne uniemożliwiało istnienie hiperkomputerów, to nie dowiedzielibyśmy się nigdy o tym, że G jest prawdą – więc prawa fizyki mają istotne znaczenie w kontekście odkrycia. Jednak nie twierdzimy, że to one uprawdziwiają G (podobnie jak nie twierdzimy, że to prawa elektroniki uprawdziwiają 4CT – choć to prawa elektroniki umożliwiają skonstruowanie urządzenia, dzięki któremu możemy się przekonać, że istnieje dowód 4CT). Nasz hiperkomputer pełni funkcję pomocniczego (choć ważnego) narzędzia, ale to nie jego działania p o w o d u j ą prawdziwość G – on jedynie umożliwia nam zdobycie wiedzy o tym. Do tej sytuacji stosują się wszystkie rozważania dotyczące empirycznego komponentu w dowodach komputerowych i kwantowych, tyle że w tym przypadku pojawiające się problemy są niejako zwielokrotnione: nawet hipotetycznie nie jesteśmy w stanie prześledzić działania hiperkomputera i (inaczej niż w przypadku komputerów kwantowych) wiemy, że prowadzi ono do wyników niedających się uzyskać (nawet teoretycznie) w wyniku symulacji na klasycznym komputerze. Sądzę więc, że w tym wypadku empiryczne zapośredniczenie jest bez porównania głębsze i nie sprowadza się jedynie do przyspieszenia naszych czynności. Powstaje przepaść, której nie można przekroczyć. Wiedza uzyskana za pomocą

[44] Takie argumenty metodologiczne są rozważane w kontekście np. problemu poszukiwania aksjomatów pozwalających na ustalenie prawdziwej wartości kontinuum (np. argumenty Freilinga czy Woodina, o których wspomniano w rozdziale drugim). Gdybyśmy uznali tego typu argumentację za dopuszczalną w matematyce, to właśnie ona określałaby warunki prawdziwości dla zdań matematycznych.

hiperobliczeń będzie miała zatem raczej charakter wiedzy empiryczno-matematycznej niż czysto matematycznej[45].

Osobnym problemem jest pytanie o eksplanacyjną rolę takiej argumentacji hiperobliczeniowej. W rozdziale dotyczącym standardowych dowodów komputerowych była mowa m.in. o sceptycznych reakcjach niektórych matematyków (wyrazicielem takich opinii jest np. Rota, por. Rota 1997), którzy twierdzą, że tego typu argumentacja nie może być uznana ze pełnowartościową argumentację m a t e m a t y c z n ą: niezależnie od problemu empirycznych uwikłań, takie dowody nie dostarczają zrozumienia i *de facto* jedynie pozornie wypełniają luki w naszej wiedzy matematycznej. Te same zarzuty – ze zwielokrotnioną siłą – można byłoby wysunąć w stosunku do argumentacji hiperkomputerowej: przeprowadzenie pewnej empirycznej procedury nie zastąpi dowodu matematycznego.

W najbardziej skrajnej wersji ten zarzut głosiłby, iż z punktu widzenia tworzenia wiedzy m a t e m a t y c z n e j takie zabiegi są poznawczo bezwartościowe. Jednak stanowisko to wydaje się zbyt radykalne: wszak nasze nastawienie poznawcze w stosunku do hipotezy Goldbacha zmieniłoby się po przeprowadzeniu hiperobliczeniowego eksperymentu i intelektualną nieuczciwością byłoby ignorowanie tego faktu. Należy raczej zastanowić się nad tym, na jakiej podstawie jesteśmy skłonni włączyć G w system naszych matematycznych przekonań. Rysują się dwie drogi opisania tej sytuacji:

1. Uznanie, że w matematyce pojawiła się nowa kategoria dopuszczalnych argumentów matematycznych („hiperdowody").

2. Uznanie, że mamy argumenty empiryczne przemawiające na korzyść G, co tym samym stanowi ważny argument pragmatyczny na rzecz przyjęcia G jako nowego aksjomatu teorii liczb.

Ad. 1. Wprowadzenie kategorii hiperdowodów nie byłoby prostym następstwem akceptacji dowodów komputerowych – wszak w przypadku dowodów komputerowych (nawet kwantowych) wiemy, że c o d o z a s a d y można byłoby przeprowadzić zwykły dowód. Jeśli abstrahujemy od ograniczeń czasowych czy pamięciowych, to działanie dowolnej maszyny Turinga daje się symulować na

[45] O wyjaśnieniu tego w ramach koncepcji Quine'a piszę dalej.

odpowiednio dużej kartce papieru. Analizy Turinga na temat pojęcia obliczalności dotyczyły wszak „ludzkiego komputera" – kogoś, kto działa ściśle mechanicznie według instrukcji. Każdy „ludzki komputer" jest w stanie symulować działanie komputera rzeczywistego (oczywiście z dużą stratą czasową – mówimy tutaj o możliwości teoretycznej). Można więc powiedzieć, że używamy komputera po to, aby (empirycznie) przekonać się o istnieniu klasycznego dowodu, np. 4CT (czy też: aby empirycznie uwiarygodnić tezę o istnieniu klasycznego dowodu). Do wiedzy na temat prawdziwości 4CT dochodzimy więc nie przez bezpośrednie sprawdzenie („przeliczenie" grafów), lecz przez empiryczne sprawdzenie, że jest ono klasycznie dowodliwym twierdzeniem matematycznym. Nie mamy bezpośredniego argumentu empirycznego na rzecz prawdziwości 4CT, ale raczej empiryczny argument na rzecz istnienia klasycznego dowodu 4CT. Twierdzenie o czterech barwach jest zatem – w tym sensie – dowodliwe klasycznie[46].

Natomiast bezpośredni, hiperkomputerowy „siłowy" dowód 4CT polegałby na tym, że hiperkomputer sprawdza wszystkie możliwe mapy (dają się one reprezentować w sposób rekurencyjny) i informuje nas o tym, że cztery kolory zawsze wystarczą. Przypuśćmy, iż mamy do dyspozycji tylko taki argument na rzecz 4CT. Z praktycznego punktu widzenia byłby on oczywiście wystarczający, jestem jednak przekonany, że nie przypisywalibyśmy wówczas zdaniu 4CT statusu twierdzenia matematycznego. Nie jest nawet jasne, czy uznalibyśmy, że wzbogaciła się nasza wiedza matematyczna na temat grafów planarnych[47]. Przecież działanie hiperkomputera nie dawałoby nam żadnego argumentu na rzecz ist-

[46] W rozdziale trzecim są przytoczone wyniki dotyczące dowodliwości zdań w różnych teoriach (przykład podany przez Boolosa czy przykład twierdzenia Kruskala). Zauważmy, że zdanie podane przez Boolosa jest zdaniem dowodliwym klasycznie (w logice pierwszego rzędu), jednak dowód ten znajduje się całkowicie poza naszym zasięgiem. W wypadku 4CT sytuacja jest nieco podobna.

[47] Przypuśćmy, że mamy pewien problem matematyczny, który ma określoną empiryczną stylizację, i że wykonaliśmy bardzo dużo eksperymentów, które sugerują, iż rozwiązanie tego problemu jest takie-to-a-takie. Czy uznamy, że wzbogaciła się nasza wiedza matematyczna?

nienia klasycznego dowodu. Co więcej, mogłoby się nawet zdarzyć, że – podobnie jak w przykładzie hipotezy Goldbacha – hiperkomputer wykazałby b r a k takiego dowodu!

Wprowadzenie hiperdowodów stanowiłoby w pewnym sensie zaprzeczenie wizji matematyki jako czynności racjonalnej: oto włączamy pewne urządzenie, nie mamy najmniejszego pojęcia, jaki będzie wynik jego działania, ale nagle po 5 (naszych) minutach wyświetla ono na ekranie wynik i my go akceptujemy, przyjmując jako nowe twierdzenie. Nie możemy tu mówić o racjonalnej argumentacji, o tym, że następuje swoisty „transfer prawdy" z przesłanek do wniosków. Nawet termin „hiperdowód" należałoby uznać za niefortunny – nie mamy bowiem do czynienia z elementem matematycznej argumentacji, a jedynie z pewnego typu empirycznym, „siłowym" sprawdzeniem. Trudno się zgodzić z tym, że taki dowód wyjaśnia czy ukazuje nam jakiś splot idei matematycznych. Jeszcze trudniej byłoby zaakceptować taki typ argumentu z punktu widzenia formalistycznego – wszak teza nie wynikałaby z przesłanek na mocy symbolicznych manipulacji, ale na mocy sprawdzenia nieskończonego zbioru przesłanek (i przyjęcia – na metapoziomie – założeń dotyczących wiarygodności eksperymentów fizycznych).

Ad. 2. Możemy przyjąć, iż wynik hiperobliczeniowej procedury upoważnia nas do uznania G za nowe, wiarygodne założenie (nowy aksjomat). W takim ujęciu nie będziemy zmuszeni do wprowadzania nowej kategorii dowodu. Zauważmy przy tym, że ów „siłowy hiperdowód" nie stanowiłby argumentu na rzecz istnienia dowodu klasycznego (co więcej, nasza procedura może prowadzić do konkluzji, że takiego dowodu faktycznie nie ma). Jest to sytuacja radykalnie odmienna w stosunku do dowodów komputerowych. Jednak trudno całkiem zignorować wynik naszego eksperymentu fizycznego (nie ignorujemy przecież wyniku klasycznego eksperymentu komputerowego dowodzącego 4CT!). Rozsądnym kompromisem wydaje się więc uznanie, że istnieją empiryczne powody skłaniające nas do przyjęcia danego zdania jako nowego aksjomatu.

Motywacja na rzecz przyjęcia G jako nowego aksjomatu miałaby zupełnie nowy (w stosunku do zwykłej praktyki matematycznej) charakter. Współcześnie toczy się dyskusja na temat możliwości i zasadności przyjęcia nowych aksjomatów dla teorii mnogości – aksjomatów, które niejako pełniej ujmują nasze rozumienie pojęcia zbioru[48]. Dyskusje takie dotyczą zarówno niejako „konkretnych" zdań teorii mnogości, jak i całych grup aksjomatów (wspomniano o nich w rozdziale drugim). Argumentacja, jaka pojawia się w takich dyskusjach opiera się bądź na odwołaniu do intuicyjnego poczucia prawdziwości tych zdań – do tego, że aksjomaty te stanowią naturalne uogólnienie dotychczas przyjmowanych założeń – bądź do ich porządkującej roli czy owocności w rozwiązywaniu otwartych problemów matematycznych etc. Można powiedzieć, że argumenty te odnoszą się często do analiz pojęciowych na poziomie ich bezpośredniej matematycznej wiarygodności czy przez odwołanie do kryteriów metodologicznych (jak np. w przypadku argumentacji Woodina czy analiz Maddy dotyczących różnych wzmocnień ZFC). Tutaj byłoby inaczej – po prostu musielibyśmy poczekać na koniec eksperymentu hiperkomputerowego i zaakceptować jego wynik jako nowy aksjomat.

Z punktu widzenia dyskusji na temat wyjaśniania i rozumienia w matematyce, taka sytuacja z całą pewnością jest niezadowalająca – i to w sensie znacznie silniejszym niż w przypadku klasycznego dowodu komputerowego. Hiperobliczeniowy dowód (może lepiej: hiperargument) nie wyjaśnia przyczyn, dla których hipoteza Goldbacha jest zdaniem prawdziwym – należy go raczej traktować jako pomiar pewnej zmiennej, co do wyniku którego nie mamy nawet żadnych oczekiwań. Zdania uzasadnione hiperobliczeniowo uznawalibyśmy za wiarygodne założenia, dla których istnieją empiryczne, pozamatematyczne przesłanki, jednak dla których nie potrafimy podać *stricte* matematycznego uzasadnienia[49].

---

[48] W niniejszej pracy wspomniano – w rozdziale drugim – argumenty Freilinga czy Woodina dotyczące hipotezy kontinuum. Dyskusja na temat uzasadniania aksjomatów jest jednak znacznie szersza. Szczegółowe analizy znajdziemy np. w pracach Maddy: 1988a, 1988b, 1990, 1993, 1997; bardzo ciekawa jest dyskusja w formie „czwórgłosu": Feferman 2000, Friedman 2000, Maddy 2000, Steel 2000.

[49] Na marginesie rozważań o wyjaśnianiu zauważmy, że gdyby hiperkomputer uzasadnił empirycznie np. niesprzeczność ZFC, to nie zadawalibyśmy pytań o matematyczne przyczyny tego faktu – raczej uznalibyśmy go za pierwotny (ewentualnie interpretując to jako argument na rzecz spójności naszych

Pojawia się pytanie, z jaką filozoficzną wizją matematyki najlepiej harmonizuje akceptacja tego typu argumentów. Sądzę, że bardzo trudno byłoby interpretować hiperargumenty w duchu klasycznego poglądu, w myśl którego matematyka stanowi wiedzę aprioryczną, zaś wgląd w prawdziwość aksjomatów czy prawomocność przejść argumentacyjnych (dowodowych) uzyskujemy dzięki czysto intelektualnym aktom. Przy takim podejściu źródłem naszej wiedzy (czy to na poziomie analiz preformalnych, czy dowodów) jest nasz rozum. Jeśli przyjęlibyśmy ten obraz matematyki, to trudno byłoby nam zaakceptować argumenty oparte na działaniu hiperkomputerów. Można go (choć trudno tu mówić o jakiejś harmonii) pogodzić z akceptacją klasycznych dowodów komputerowych (uznajemy, że komputer informuje nas o istnieniu klasycznego dowodu), jednak argumenty oparte na hiperkomputerowych eksperymentach należałoby w zasadzie odrzucić. W każdym razie nie można byłoby zasadnie twierdzić, że nasza wiedza m a t e m a t y c z n a wzbogaciła się np. o wiedzę, iż każda liczba parzysta jest sumą dwóch liczb pierwszych. Zarazem zignorowanie wyników tych eksperymentów wydaje się nienaturalne (bo przecież – jak już wspomniałem wcześniej – nie ignorujemy wyników komputerowego dowodu 4CT, nawet jeśli pozostawia w nas poczucie pewnego niedosytu). Sądzę, że naturalnym stanowiskiem filozoficznym, które pozwoli na uwzględnienie wyników hiperargumentów jest stanowisko *quasi*-empiryzmu Quine'a. Jest mu poświęcony następny paragraf.

8. Stanowisko Quine'a

Nie ma tu miejsca na szczegółowe referowanie koncepcji Quine'a, jej motywacji i późniejszej dyskusji na ten temat. Nawet gdyby ograniczyć się wyłącznie do analizy poglądów Quine'a dotyczących filozo-

intuicji). Inaczej byłoby w przypadku zdań ściśle matematycznych: gdyby hiperkomputer rozwiązał jakiś otwarty problem (np. hipotezę Goldbacha czy problem „P=NP?"), to zadawalibyśmy pytania o matematyczne przyczyny tego stanu rzeczy. Sam fakt istnienia „hiperargumentu" nie byłby dla nas poznawczo satysfakcjonujący.

fii matematyki, pełna prezentacja wykraczałaby zdecydowanie poza ramy tej pracy (stanowi to bowiem materiał na oddzielną monografię). Problematyka jest zresztą dobrze znana i przypomnę tylko najważniejsze, z punktu widzenia naszej dyskusji, punkty.

W myśl stanowiska Quine'a nasza wiedza stanowi swoistą sieć przekonań i nie można w niej ostro odgraniczyć wiedzy fizycznej od wiedzy matematycznej (a także czysto obserwacyjnej od teoretycznej). Stanowi ona całościowy system, który musi harmonizować z wynikami naszej obserwacji – w tym sensie, że musi być z nimi zgodny i pełnić funkcje teoretyczne (organizować owe wyniki w pewną spójną całość). Jednak o s t a t e c z n e kryterium stanowi konfrontacja z doświadczeniem, bowiem nasza wiedza „styka się ze światem" przez doświadczenie. W przyjmowanym systemie przekonań nie ma wyraźnego rozgraniczenia np. na czysto instrumentalistycznie traktowaną wiedzę matematyczną i wiedzę czysto empiryczną[50]. Quine podkreśla, że mechanizm postulowania bytów pewnego typu dla uporządkowania obrazu świata pojawia się na każdym etapie budowania naszej wiedzy – również na poziomie wiedzy zdroworozsądkowej. Mamy zatem do czynienia ze swoistym mechanizmem reifikacji: „Przedmioty fizyczne są pojęciowo wnoszone do sytuacji jako wygodne ogniwa pośredniczące – nie przez definiowanie ich w terminach doświadczenia, lecz jako nieredukowalne byty postulowane" (Quine 1953b: 67). Dotyczy to wszystkich klas przedmiotów: zarówno obserwowalnych, jak i teoretycznych – w szczególności też przedmiotów matematycznych: „W s z y s t k o [podkr. K. W.], czemu przypisujemy istnienie, jest przedmiotem postulowanym z punktu widzenia opisu procesu budowania teorii, a zarazem jest rzeczywiste z punktu widzenia samej tworzonej teorii. Nie powinniśmy również traktować punktu widzenia teorii jako gry pozorów, zawsze musimy bowiem przyjmować perspektywę tej

[50] „Nasze twierdzenia o świecie zewnętrznym stają przed trybunałem doświadczenia zmysłowego nie indywidualnie, lecz zbiorowo" (Quine 1953b: 63). „Wzięta w całości nauka pozostaje w podwójnej zależności – od języka i od doświadczenia; lecz dualizm ten nie daje się zasadnie odwzorować na poszczególnych twierdzeniach nauki" (Quine 1953b: 64).

czy innej teorii – najlepszej, na jaką w danej chwili potrafimy się powołać" (Quine 1960: 37)[51].

Quine proponuje zatem następujący obraz wiedzy: przy próbie opisu i zrozumienia świata poszukujemy takiego systemu przekonań, który dobrze harmonizuje z doświadczeniami. Na poziomie tworzenia wiedzy naukowej postulujemy istnienie bogatej ontologii, w szczególności obejmującej obiekty matematyczne. Matematyka zaś (a w każdym razie jej fragment) wchodzi w skład konstruowanego przez nas systemu przekonań. Tym samym przekonania matematyczne muszą być spójne z pozostałymi przekonaniami w naszej sieci, a w ostatecznym rozrachunku – z naszymi danymi empirycznym. Ta spójność jest widoczna zarówno w przypadku elementarnych prawd matematycznych (przysłowiowej tabliczki mnożenia), jak i zaawansowanych teorii matematycznych, odgrywających rolę w fizyce. System przekonań matematycznych (czy może: matematyczny fragment systemu przekonań) musi harmonizować z wynikami eksperymentów – w szczególności eksperymentów komputerowych, hipotetycznych dowodów kwantowych czy hipotetycznych wyników eksperymentów z układami hiperobliczeniowymi. Jeśli więc wynik pewnego eksperymentu fizycznego (z użyciem zwykłego komputera, komputera kwantowego, komputera analogowego takiego czy innego typu) będzie prowadził nas do stwierdzenia, że zachodzi pewne zdanie matematyczne α (np. hipoteza Goldbacha), to naturalne będzie uznanie owego zdania za składnik naszej wiedzy. Będzie tak nawet wtedy, jeśli zdanie owo nie jest konsekwencją przyjętych uprzednio założeń matematycznych (takich jak np. aksjomaty teorii mnogości czy innej interesującej nas teorii matematycznej). Hiperobliczenia dostarczają nam nowych danych, które musimy uzgodnić z naszymi matematycznymi przekonaniami (czy raczej: musimy z nimi uzgodnić nasze

[51] „Łącząc oddzielne doznania zmysłowe i traktując je jako percepcję jednego przedmiotu, ujmujemy bogactwo naszych doznań w prostym i operatywnym schemacie pojęciowym. Przyporządkowywanie danych zmysłowych przedmiotom zewnętrznym jest [...] podyktowane zasadą prostoty: wcześniejsze i późniejsze wrażenie okrągłości łączymy z tą samą monetą lub z dwiema różnymi monetami, kierując się postulatem maksymalnej prostoty naszego całościowego obrazu świata" (Quine 1953a: 31).

matematyczne przekonania). Gdyby jakieś zdanie α było niezależne od ZFC (albo nie znalibyśmy jego statusu – jak np. w wypadku hipotez Goldbacha czy Riemanna), lecz za pomocą hiperkomputera moglibyśmy podać argument na jego rzecz, to byłby to istotny empiryczny argument przekonujący o prawdziwości owego zdania. Mam na myśli fakt, że w tej sytuacji teoria ZFC+α dobrze harmonizowałaby z doświadczeniem, zaś teoria ZFC+$\neg\alpha$ – nie![52] Przyjęcie zdania α jako nowego aksjomatu będzie wówczas bardzo naturalne. Z punktu widzenia takiej holistycznej wizji Quine'a nie różnicujemy statusu poszczególnych zdań matematycznych (o ile oczywiście wchodzą w skład owego uprawomocnionego empirycznie systemu przekonań)[53]. Po prostu niektóre prawdy matematyczne będą pochodzić z naszego

---

[52] Pojawia się pytanie: czy można sobie wyobrazić, że dane zdanie niezależne od ZFC może mieć znaczenie dla fizyki w tym sensie, że w zależności od tego, czy wybierzemy teorię ZFC+ α, czy też ZFC+$\neg\alpha$, otrzymamy inne obrazy fizycznej rzeczywistości? Niewątpliwie nie byłaby to sytuacja standardowa: fizykom raczej nie przeszkadza to, że CH jest niezależna od ZFC. Jednak w literaturze pojawiają się przykłady, które mogą sugerować, iż taki scenariusz jest prawdopodobny. Na przykład Da Costa podał (wraz z innymi autorami) szereg przykładów zdań niezależnych od ZFC, którym (w każdym razie w opinii tych badaczy) można przypisać sens fizyczny. Na przykład zdanie „Istnieje wyrażenie *m(t)* definiujące ruch na $\mathbf{R}^2$ takie, że stwierdzenie '*m(t)* jest ruchem ergodycznym w $\mathbf{R}^2$'" jest niezależne od ZFC (w pracy Da Costa, Doria 1996 można znaleźć dalsze przykłady). Autorzy dowodzą (w serii prac) szeregu podobnych wyników, które dotyczą mechaniki klasycznej, ogólnej teorii względności czy nawet teorii gier. Należy jednak pamiętać o tym, że pytanie o to, na ile te zdania są istotne i naturalne z punktu widzenia samej fizyki, a na ile są to – mówiąc swobodnie – swoiste artefakty metamatematyczne, nie ma oczywistej odpowiedzi. W każdym jednak razie nie ma powodu, aby *a priori* odrzucić tego typu rozważania i wyniki jako niefizyczne.

[53] Quine przypisywał realistyczny status tylko tym teoriom matematycznym, które mają odniesienie do teorii fizycznych: „Ta część matematyki, która jest potrzebna w naukach empirycznych, ma ten sam status, co reszta nauki. Pozaskończone rozgałęzienia mają ten sam status, o ile pełnią rolę upraszczającego usystematyzowania (*simplificatory rounding out*), jednak reszta ma status niezinterpretowanych systemów" (Quine 1984: 788). „Uznaję nieprzeliczalne nieskończoności tylko dlatego, że są one konieczne dla systematyzacji zagadnień. Obiekty wykraczające poza te potrzeby, np. Beth_ω lub liczby nieosiągalne, uważam za matematyczną rozrywkę i za pozbawione statusu ontologicznego" (Quine 1986: 400).

codziennego doświadczenia (np. przemienność dodawania), niektóre będą miały źródło w potrzebie opisu bardziej złożonych zjawisk (np. rachunek różniczkowy dla opisu zjawisk mechanicznych, teoria przestrzeni Hilberta w mechanice kwantowej czy geometria różniczkowa w mechanice relatywistycznej etc.), a inne z kolei w eksperymentach z układami hiperobliczeniowymi.

Jeśli zaakceptujemy ujęcie quine'owskie, to w naturalny sposób prowadzi nas to do realistycznego postrzegania matematyki. Jego znany argument z niezbędności (*indispensability argument*) odwołuje się bowiem do faktu, że matematyka stanowi nieusuwalny składnik teorii fizycznych oraz do kwantyfikatorowego kryterium istnienia, w myśl którego identyfikacja zobowiązań ontologicznych danej teorii odbywa się przez analizę jej twierdzeń egzystencjalnych. Wszystkie te twierdzenia winny być interpretowane na równi, niezależnie od tego, jakiej kategorii byty postulują. Należy tutaj pamiętać, że pytanie o istnienie jest zawsze stawiane relatywnie do określonej teorii. Nie ma sensu pytanie: „Czy przedmiot P istnieje *simpliciter* – w ogólnym, metafizycznym sensie tego terminu?". Możemy jedynie pytać: „Czy przedmiot P istnieje w myśl teorii T?". Innymi słowy, kiedy zastanawiamy się nad istnieniem obiektu pewnego typu, pytamy w gruncie rzeczy o założenia, jakie musimy przyjąć, aby móc zaakceptować daną teorię T, czyli o jej zobowiązania ontologiczne. Nie będę tu szczegółowo referował koncepcji zobowiązań ontologicznych, przypomnę jedynie, że – zdaniem Quine'a – zobowiązania te identyfikujemy po sprowadzeniu badanej teorii do pewnej kanonicznej postaci (czyli po sparafrazowaniu jej twierdzeń w postaci wypowiedzi logiki elementarnej). Dzięki temu jesteśmy w stanie stwierdzić, jaki jest aparat referencjalny danej teorii i w jaki sposób następuje odnoszenie się do przedmiotów (i do jakich przedmiotów). Usuwa to bałagan pojęciowy i pozwala na zidentyfikowanie ontologii[54]. Oczywi-

54 „Ontologia zwykłego człowieka jest niejasna i nieporządna pod dwoma względami. Obejmuje ona wiele domniemanych przedmiotów, które są niejasno lub nieadekwatnie określone. Ale co ważniejsze, nie jest jasny jej zakres; nie sposób nawet ogólnie stwierdzić, które z tych niejasno określonych przedmiotów wolno w ogóle przypisać ontologii danego człowieka, co traktować jako rzeczy przez niego przyjmowane" (Quine 1981: 38).

ście takie ujęcie opiera się na rozmaitych założeniach dotyczących np. tego, że logika elementarna jest w pewien sposób wyróżniona (tzw. *first-order thesis* – teza o logice pierwszego rzędu).

Z punktu widzenia naszej dyskusji najważniejsze pozostaje przyjęcie istotnego składnika empirycznego w poznaniu matematycznym. Podkreślał to również Putnam: „będziemy musieli stanąć przed faktem, że przeciwstawienie empiryczny – matematyczny jest tylko przeciwstawieniem relatywnym: większość matematyki jest także »empiryczna« w sensie mniej ścisłym i bardziej pośrednim niż zwykłe stwierdzenia »empiryczne«" (Putnam 1975: 264). Nie jest więc wykluczone, że „źródłem odpowiedzi na fundamentalne pytania, powiedzmy, że na temat kontinuum, będą w przyszłości nie jedynie nowe »intuicje«, ale także odkrycia fizyko-matematyczne" (Putnam 1975: 264–265).

Wyniki dotyczące hiperobliczeń można interpretować właśnie w tym duchu: to eksperymenty hiperkomputerowe motywują przyjęcie pewnych zdań jako nowych aksjomatów[55]. A zatem również wiedza matematyczna będzie – w ostatecznym rozrachunku – zapośredniczona empirycznie. Nasza wiedza na temat np. liczb naturalnych nie ma charakteru czysto pojęciowego, ale zawiera empiryczny komponent. Oczywiście ten komponent nie jest rozumiany tutaj w sposób tak naiwny, jak chciałby tego np. Mill (jego zdaniem – przypomnijmy – wiedza geometryczna czy arytmetyczna stanowi swoiste indukcyjne uogólnienie wyników jednostkowych obserwacji). W ujęciu Quine'a to zapośredniczenie empiryczne ma charakter znacznie bardziej subtelny. Zdania matematyczne nie różnią się jednak co do zasady od zdań mówiących o obiektach fizycznych. Wszystkie one stanowią fragment przyjmowanej całościowo sieci przekonań[56].

---

[55] Należy dodać, że – podobnie jak Quine – Putnam także odrzuca instrumentalistyczne traktowanie teorii naukowych, w szczególności instrumentalistyczne traktowanie matematyki: „Jeżeli mówienie o liczbach i »przyporządkowaniach« pomiędzy masami itd. a liczbami jest »teologią« (w pejoratywnym sensie), to prawo powszechnego ciążenia także jest teologią" (Putnam 1975: 262).

[56] „W granicach nauk przyrodniczych istnieje kontinuum poziomów, od twierdzeń, które są sprawozdaniami z obserwacji, do tych, które wyrażają podstawowe idee, powiedzmy, teorii kwantów czy teorii względności. [...] twierdzenia

W takim ujęciu można podać naturalną interpretację statusu wiedzy na temat liczb naturalnych uzyskanej w wyniku eksperymentów hiperobliczeniowych. Będzie ona z pewnością miała obiektywny charakter. Mechanizm jest tu podobny jak w wypadku włączenia 4CT w nasz system przekonań matematycznych na podstawie eksperymentu komputerowego. To, że na rzecz zdania G nie posiadamy matematycznego argumentu, tylko argument odwołujący się do hiperobliczeniowego eksperymentu, pokazuje, iż nie ma podstaw, aby uznać wynik owego eksperymentu za wiedzę czysto konwencjonalną.

Należy zaznaczyć, że w ujęciu quine'owskim nie będziemy umieli dobrze postawić problemu wyjaśniania. Pozwala ono bowiem jedynie podać argument na rzecz tego, iż pewien system przekonań najlepiej harmonizujący z danymi empirycznymi należy interpretować realistycznie (wraz z jego matematyczną składową). Nie rozstrzyga to jednak, skąd biorą się nasze przekonania dotyczące np. naturalności czy intuicyjności głoszonych twierdzeń.

9. Problem mechanizmów poznawczych

9.1. Czy tworzenie matematyki ma z natury charakter algorytmiczny?

Problem empirycznego (w tym hiperobliczeniowego) wspierania dowodów należy odróżnić od problemu natury naszych procesów poznawczych, przede wszystkim zaś od natury aktów poznawczych matematyzującego umysłu. Zagadnienia te są w zasadzie niezależne: można wyobrazić sobie sytuację, w której nasze procesy poznawcze (w szczególności leżące u podłoża uprawiania matematyki) mają charakter algorytmiczny, jednak jednocześnie posługiwać się hiper-

ontologii, a nawet twierdzenia matematyki i logiki są kontynuacją tego kontinuum, kontynuacją, która jest zapewne jeszcze bardziej odległa od obserwacji niż główne zasady teorii kwantów czy teorii względności. Różnice w tej dziedzinie są [...] jedynie różnicami stopnia, a nie rodzaju. Nauka jest strukturą jednolitą i w zasadzie ta struktura jako całość, nie zaś jej zdania składowe z osobna, jest tym, co doświadczenie potwierdza lub podważa" (Quine 1951: 171).

komputerami wspomagającymi zdobywanie wiedzy[57]. Może zachodzić również sytuacja odwrotna, w której wprawdzie (z powodu braku wiedzy czy środków technicznych) nie potrafimy skonstruować żadnego urządzenia hiperobliczeniowego, ale nasze procesy umysłowe mają charakter niealgorytmiczny. Może tak być przede wszystkim w przypadku aktywności poznawczej dotyczącej matematyki.

Pytanie o mechanizmy poznawcze matematyzującego umysłu jest szczególnym przypadkiem ogólnego pytania o jego naturę w ogóle. Z punktu widzenia komputacjonizmu działanie umysłu ma charakter algorytmiczny, a zatem – co do zasady – jest on równoważny pewnej (oczywiście bardzo złożonej) maszynie Turinga[58]. Jeśli przyjmiemy taką tezę, to należy konsekwentnie uznać, że uprawianie matematyki (zarówno dowodzenie twierdzeń, jak i uzasadnianie aksjomatów) ma swoje źródło w działaniu owej „mentalnej maszyny w tle". Rzecz jasna, komputacjonista nie twierdzi, że mamy świadomy dostęp do działania owego mechanizmu liczącego, ale że działanie takiego mechanizmu leży u źródła naszych fenomenów mentalnych. W szczególności takie zjawiska psychologiczne towarzyszące uprawianiu matematyki, jak przebłyski intuicji, głębokiego zrozumienia pewnej koncepcji matematycznej, ogarnięcia całej struktury dowodu („wglądu w istotę dowodu"), dostrzeganie głębokich powiązań między różnymi jej działami, rozumienie źródeł i motywacji dla pewnych idei etc., mogą być wyjaśnione przez odwołanie do owego turingowskiego mechanizmu poznawczego działającego „w tle" naszych świadomych aktów.

Wizja dowodu matematycznego jako formalnej, skodyfikowanej procedury jest nierozerwalnie związana z wizją procedury tworzenia wiedzy matematycznej jako procesu algorytmicznego. Z takiego punktu widzenia matematyk przypominałby nieco ów „ludzki

---

[57] Jeśli np. owa niealgorytmiczność miałaby być uzyskiwana przez wykorzystanie efektów relatywistycznych, to można sobie wyobrazić właśnie taką sytuację.

[58] Należałoby tutaj dodać pewne zastrzeżenie: maszyna Turinga ma pamięć potencjalnie nieskończoną, co jest zbyt daleko idącą idealizacją w stosunku do pojemności naszej pamięci. Być może zatem nasz umysł należałoby uznać za maszynę Turinga z pamięcią ograniczoną. W każdym jednak razie można stwierdzić, że nasz umysł nie byłby silniejszy niż maszyna Turinga.

komputer", o którym pisał Turing: miałby w punkcie wyjścia pewne dane wejściowe (aksjomaty), reguły logiczne (jako fragment swoich instrukcji), zaś jego działanie można byłoby (w dużym uproszczeniu i z pominięciem kwestii psychologicznych) wyobrażać sobie jako poszukiwanie dowodów twierdzeń zgodnie z zadanym algorytmem. Rzecz jasna, taka wizja matematyki jest odległa od praktyki matematycznej i z całą pewnością nie opisuje trafnie psychologicznych zjawisk związanych z uprawianiem tej dyscypliny, być może jednak stanowi rozsądną racjonalną rekonstrukcję procesu tworzenia wiedzy matematycznej.

W takim duchu można interpretować stanowisko *derivation-indicator view* Azzouniego (dyskutowane w rozdziale trzecim). Badacz twierdzi, że u podłoża (niejako „w tle") każdego standardowego, treściowego dowodu matematycznego tkwi pewna formalna derywacja. Stanowisko takie jest naturalne z punktu widzenia komputacjonizmu (choć sam Azzouni w swoich rozważaniach nie odwołuje się do tezy komputacjonistycznej): ponieważ procesy mentalne mają charakter obliczeniowy, więc również wszelkie zjawiska, z którymi mamy do czynienia przy dowodach treściowych, mają swoje źródło w pewnych przebiegach obliczeniowych. Zgodne – jak sądzę – z wizją Azzouniego będzie ich utożsamienie z derywacjami w systemach formalnych[59].

[59] Zauważmy tutaj, że samo przyjęcie tezy komputacjonistycznej nie stanowi jeszcze uzasadnienia tezy Azzouniego: fakt, iż „w tle" naszych procesów, które (z punktu widzenia fenomenologicznego) są aktami świadomej akceptacji aksjomatu lub kroku dowodowego, tkwią przebiegi obliczeniowe, nie znaczy automatycznie, że mają one charakter formalnej derywacji – chyba, że przyjmiemy tak szerokie rozumienie pojęcia formalnej derywacji, w którym wszelkie działanie algorytmiczne uznamy za pewną derywację formalną. To jest oczywiście dozwolone (przecież działanie maszyny Turinga można opisać w formalny sposób), ale nie wydaje się, aby taka była faktycznie intencja Azzouniego. Twierdzi on raczej, że „w tle" dowodu treściowego jest dowód formalny w systemie, który bylibyśmy skłonni uznać za formalny odpowiednik naszej matematyki (np. formalna wersja PA czy ZFC) – a nie, że „w tle" znajduje się dowolny algorytm przekształcający ciągi 0–1 – niezależnie od tego, czy interpretujemy wyniki działania owego algorytmu jako przekonania matematyczne, moralne, upodobania kulinarne, klaustrofobię etc.

Dla radykalnego naturalisty (przyjmującego założenie o istnieniu odpowiedniości między umysłem a mózgiem) pytanie o możliwość istnienia niealgorytmicznych procesów poznawczych jest szczególnym przypadkiem pytania o to, czy w ogóle w przyrodzie mogą istnieć procesy niealgorytmiczne. Z punktu widzenia naturalisty tworzenie matematyki to proces o podłożu biologicznym (czyli fizycznym). Jeśli więc nie istniałyby niealgorytmiczne procesy fizyczne (w szczególności biologiczne), to nie ma również możliwości, aby tworzenie matematyki zawierało jakąś niealgorytmiczną składową. Naturalista przyjmujący fizyczną tezę Churcha–Turinga (głoszącą, iż nie istnieją niealgorytmiczne procesy fizyczne) uzna zatem również uprawianie matematyki za proces algorytmiczny.

Powstanie modeli niealgorytmicznych stanowi istotny impuls dla tej dyskusji. Oczywiście komputer relatywistyczny – który stanowił główny przykład w rozważaniach w tym rozdziale – zapewne trudno uznać za model, który mógłby wyjaśniać niealgorytmiczność naszego myślenia. Jeśli faktycznie nasz umysł jest analogowym układem przetwarzającym informację w sposób niealgorytmiczny, to raczej nie dzięki efektom relatywistycznym[60]. W literaturze rozważa się jednak także inne modele układów działających niealgorytmicznie, które wydają się znacznie mniej egzotyczne[61]. Fakt ten jest istotny z punktu widzenia dyskusji dotyczącej natury uprawiania matematyki – przede wszystkim może on stanowić inspirację dla podjęcia prób wyjaśnienia naszych mechanizmów poznawczych.

W rozdziale pierwszym była mowa o swoistej ewolucji rozumienia dowodu matematycznego – ewolucji w kierunku rozumienia formalistycznego, w myśl którego na dowód matematyczny należy patrzeć jako na konstrukt formalny, abstrahując od jego aspektów

---

[60] Penrose twierdzi w wielu publikacjach, że nasz umysł jest systemem niealgorytmicznym, jednak za ów niealgorytmiczny charakter procesów umysłowych mogą być odpowiedzialne efekty kwantowe. Por. np. Penrose 1994; należy jednak pamiętać, iż jego argumentacja przeciwko mechaniczności umysłu odwołująca się do twierdzeń Gödla nie jest powszechnie akceptowana.

[61] Na przykład model ARNN, model kwantowych algorytmów Kieu, nie należy też zapominać o wynikach Pour-El i Richardsa – niezależnie od możliwych zastrzeżeń.

semantycznych (a w każdym razie: kryteria poprawności dowodu mogą zostać sformułowane w oparciu jedynie o analizę owych formalnych, algorytmicznych procesów). Powstanie turingowskiego modelu obliczeń w naturalny sposób wpisuje się w taką wizję matematyki. Ważnym impulsem dla wzmacniania się paradygmatu komputacjonistycznego w filozofii umysłu (również w odniesieniu do matematyki) było też niewątpliwie zaimplementowanie owego modelu i spektakularny rozwój technologii komputerowych. Podstawowym matematycznym modelem procesów przetwarzania informacji stał się model turingowski – a sukcesy technologiczne rozbudziły nadzieje na to, że wszelkie zjawiska poznawcze będzie można modelować w jego ramach[62]. Miało to też niewątpliwie istotny wpływ na dyskusję dotyczącą natury matematyki (należy tu pamiętać o wykorzystaniu komputerów w obrębie tej dziedziny – czy to w symulacjach metod numerycznych, czy to na poziomie dowodzenia twierdzeń). W szczególności też algorytmiczna wizja dowodów zdawała się jedyną możliwą do pogodzenia z próbą naukowego wyjaśnienia natury wiedzy matematycznej. Dla filozofa-naturalisty jedyny możliwy do zaakceptowania model poznania matematycznego stanowił model turingowski. Działo się to niezależnie od tego, że określenie go mianem „modelu" to zapewne nadużycie. Jest to bowiem raczej pewna jakościowo sformułowana idea i ciągle brak precyzyjnego opisania zależności między przebiegami obliczeniowymi a treściami naszej świadomości. Paradygmat turingowski, wraz z towarzyszącą mu wizją matematyki, zdawał się najbardziej naturalny (a może nawet jedyny możliwy do przyjęcia) z punktu widzenia analiz filozoficznych odwołujących się do wyników nauk szczegółowych. Dlatego pojawienie się modeli niealgorytmicznych jest dla dyskusji niezwykle ważne – otwiera nawet radykalnemu naturaliście drogę do odrzucenia dogmatu komputacjonistycznego. Można bowiem przyjąć

---

[62] Można powiedzieć, że teza dotycząca algorytmiczności myślenia jest przyjmowana jako swoista reguła regulatywna w klasycznych badaniach dotyczących sztucznej inteligencji, w szczególności mających za zadanie modelowanie naszych procesów kognitywnych. Jednak nawet gdyby dała się tak modelować (co na razie wciąż jest wątpliwe) duża klasa naszych procesów poznawczych, nie wynika stąd wcale, że dotyczyłoby to ich w s z y s t k i c h.

tezę, że działania „biologicznej maszyny" mają charakter nieturingowski, a wynikające z nich akty poznawcze matematyzującego umysłu nie dają się zredukować do formalnych obliczeń „w tle", i pozostać przy tym w ściśle fizykalistycznym paradygmacie[63]. Taki stan rzeczy niejako uchyla owe zarzuty wobec anty-komputacjonizmu, w myśl których wiąże się on z przyjęciem jakiejś formy dualizmu psychofizycznego. Pozwala to też uznać za pełnoprawne takie rozumowania matematyczne, dla których nie da się przedstawić żadnej rekonstrukcji zalgorytmizowanej. Byłaby to więc interpretacja niejako przeciwna do tej w duchu *derivation-indicator view* Azzouniego, sądzę jednak, że nie ma powodu uznawać jej za mniej uprawnioną.

W procesie tworzenia matematyki można wyróżnić dwa ważne momenty: (1) ustanawianie aksjomatów; (2) prowadzenie dowodów[64]. Rzecz jasna, w praktyce matematycznej są one często nierozerwalnie związane: zdarza się, że dopiero prowadząc dowód, uświadamiamy sobie, jakie założenia są niezbędne – i zarazem konieczność przyjęcia pewnych założeń w dowodzie może stanowić argument na rzecz ich wiarygodności (o takich mechanizmach pisali np. Gödel czy Lakatos). Jest mimo to jasne, że inny charakter ma argumentacja na rzecz wiarygodności czy naturalności pewnego aksjomatu, a inny ma dowód twierdzenia. Jednak wcześniejsze rozważania dotyczące hipotezy Goldbacha pokazują, że – w pewnym sensie – owa granica między argumentacją a dowodzeniem może ulec zatarciu[65]. Sądzę, że dla wyjaśnienia tego typu zjawisk płodna

---

63 Na przykład model ARNN modeluje niealgorytmiczne działanie sieci neuronowej. Być może również nasz system neuronów działa niealgorytmicznie, np. ingerują tam jakieś (fizyczne lub chemiczne itp.) stałe niealgorytmiczne.

64 Nie podejmuję tutaj problemu źródeł naszej wiedzy logicznej, w szczególności dotyczącej reguł wnioskowania.

65 Nie tylko to jest argumentem: zauważmy tutaj, że przecież dowody matematyczne znane z praktyki nie mają charakteru sformalizowanego, choć powszechnie przyjmuje się tezę o ich formalizacji. Jednak – jak wskazywano w wielu miejscach niniejszej pracy – takie znane z praktyki dowody mogą zawierać liczne elementy, których formalizacja nie jest przecież oczywista (np. odwołania do diagramów, rysunków, intuicyjnego ujęcia pewnych terminów etc.). Nie jest jasne, czy faktycznie wszystkie te dowody są formalizowalne (przypomnijmy ponownie przykłady Boolosa i podobne – rozważane w rozdziale trzecim).

może okazać się interpretacja odwołująca się do tez antykomputacjonistycznych. Może być ona szczególnie przydatna przy wyjaśnieniu naszego sposobu nieformalnej argumentacji na rzecz wiarygodności pewnych aksjomatów – intuicyjnej oceny prawdziwości pewnych zdań (także zdań typu gödlowskiego), intuicyjnej oceny spójności teorii, naturalności aksjomatów etc. Opis naszego intuicyjnego ujęcia prawdziwości (czy wiarygodności) zdań matematycznych zdaje się bowiem już całkowicie wymykać opisowi w terminach działań algorytmicznych.

Próby wyjaśnienia procesów poznawczych w duchu komputacjonizmu są niewątpliwie bardzo odległe od tych podejmowanych w duchu fenomenologicznym. Dla fenomenologa fundamentalny charakter mają pewne nieredukowalne akty poznawcze – akty swoistego wglądu w treść czy naturę pojęć matematycznych. Na przykład Gödel pisał w tym kontekście o analizie i rozumieniu pojęcia obliczalności – przez „ejdetyczny ogląd" tego pojęcia z różnych punktów widzenia (miał na myśli różne równoważne definicje)[66].

Trudno ujęcie fenomenologiczne pogodzić z wizją mechaniczności procesów poznawczych leżących u podłoża naszego matematyzowania (np. z *derivation-indicator view* Azzouniego). Sądzę natomiast, że fenomenologiczny opis procesów poznawczych matematyka nie kłóci się z tezą o istnieniu niealgorytmicznych procesów fizycznych. Zjawiska, które na poziomie opisu fenomenologicznego mają charakter nieredukowalnych do opisu formalnego aktów poznawczych, można interpretować przez odwołanie się do zjawisk niealgorytmicznych „w tle". W tym sensie da się pogodzić różne sposoby opisu poznania matematycznego – fenomenologiczny i naturalistyczno-empirystyczny. Oczywiście takie stwierdzenie ma charakter bardzo ogólnikowy – nie oferuje żadnej konkretnej recepty na stworzenie „fenomenologiczno-analogowego" modelu kognitywistycznego. Sądzę jednak, iż swoista ofensywa teoretycznych modeli obliczeń analogowych (w szczególności hiperobliczeń) pozwala na dostrzeżenie przynajmniej takiej szansy. Zaś zarzut, że nie jeste-

---

[66] Fenomenologiczną wizję matematyki rozwija np. Tieszen: 1992, 1998, 2000; podobne myśli znajdziemy też w artykule Roty (1997).

śmy w stanie podać konkretnych przepisów (w sensie: w jaki sposób owe przebiegi niealgorytmiczne tłumaczą się na nasze świadome akty) stanowi przecież odpowiednik analogicznego zarzutu stawianego modelowi komputacjonistycznemu, który również nie oferuje takiego konkretnego przepisu, pozostając na poziomie analiz jakościowych. Sądzę więc, że ten kierunek jest obiecujący.

9.2. Czy modele hiperobliczeniowe są realistyczne?

Aby utrzymywać, że analizy prowadzone w tym rozdziale są istotne dla naszego rozumienia matematyki, należy wyjaśnić wątpliwość, czy dokonywane tutaj eksperymenty myślowe nie mają zbyt spekulatywnego charakteru[67]. Na razie przecież nie są znane praktyczne implementacje analogowych komputerów, a tym bardziej takie, które prowadziłyby do nowej wiedzy matematycznej. Co więcej: czy np. na rozważania dotyczące komputerów podróżujących w okolicy czarnych dziur nie należy patrzeć jak na czystą *science fiction*? Nawet jeśli takie modele teoretyczne nie są sprzeczne z ogólną teorią względności (a nawet jeśli gdzieś istnieją odpowiednie czarne dziury), to nie jest wcale jasne, czy rozważanie podróży poza horyzont zdarzeń owych czarnych dziur wyjaśni nam, na czym polega specyfika naszego poznania matematycznego. Co owe hipotetyczne wydarzenia (na przysłowiowych odległych krańcach galaktyki) mogą mieć wspólnego z myślowym wysiłkiem pokoleń matematyków? Być może zatem prowadzenie filozoficznych analiz dotyczących tego typu zjawisk jest ciekawym ćwiczeniem intelektualnym, ale nic nie wnosi do rozumienia tego, czym jest matematyka? W jaki więc sposób owe spekulatywne rozważania na temat hiperobliczeń mają nam przybliżyć jej naturę?

---

[67] Oczywiście można wskazać na fakt, że np. w dyskusjach dotyczących filozofii umysłu są stosowane eksperymenty myślowe dotyczące mózgów w słoju czy transferu osobowości; w filozofii pojawia się motyw bliźniaczej Ziemi etc. A skoro takie sposoby argumentacji są dopuszczalne w innych dyskusjach filozoficznych, to dlaczego nie w filozofii matematyki? Chciałbym jednak uzasadnić tezę o znaczeniu tych rozważań nie tylko przez wskazanie precedensów (np. rozważań dotyczących teleportowania naszych ciał z jednoczesną modyfikacją osobowości), ale niejako wprost.

Samo użycie modelu relatywistycznej maszyny Turinga w rozważaniach było motywowane tym, że jest on bardzo ciekawy teoretycznie, a zarazem poglądowo ukazuje potencjalny mechanizm fizyczny procesów hiperobliczeniowych. Pozwala to na klarowne postawienie pewnych pytań i tez. Należy jednak pamiętać, że techniczne szczegóły nie są kluczowe dla samego sposobu argumentacji. Istnieją modele znacznie mniej egzotyczne, dlatego zarzut dotyczący nadmiernej spekulatywności, formułowany w stosunku do modelu RTM, nie ma mocy ogólnej[68].

Nie wiemy, czy w przyrodzie istnieją procesy niealgorytmiczne. Jednak dogmatyczne przyjęcie założenia, że na pewno nie mogą one odegrać żadnej roli w naszych procesach poznawczych, jest nieuprawnione. Być może to właśnie procesy niealgorytmiczne są normą – taką tezę stawia np. Stannett. Twierdzi on, że to procedury rekurencyjne stanowią raczej swoisty artefakt, widoczny na powierzchni zjawisk (posługuje się tu analogią z mechaniką kwantową i klasyczną: zjawiska klasyczne są dostrzegalne na powierzchni, ale w głębi tkwią procesy kwantowe). Zauważa też, że model Turinga wynikał z pewnych potrzeb w ramach matematyki: należało zdefiniować pojęcie mechanicznej procedury i odzwierciedlić wizję rozumowań z punktu widzenia formalizmu matematycznego. Motywacją była zatem potrzeba podania ogólnej definicji tego, czym jest procedura rozstrzygania problemów matematycznych. Natomiast kwestia stworzenia modeli (może lepiej byłoby tu użyć określenia procesy)[69], które dobrze odzwierciedlają te obliczenia i które znajdziemy w przyrodzie, ma zupełnie inny charakter. „Nie jest zatem niespodzianką, że modele obliczeń naturalnych nie muszą się zgadzać z modelami w teorii obliczeń" (Stannett 2006: 10).

---

68 W pracy Németi, David 2006 autorzy dużo uwagi poświęcają problemowi nie tylko fizycznej dopuszczalności, ale wręcz praktycznej realizowalności takiego scenariusza. Zarzut czczej spekulatywności byłby więc całkiem chybiony.

69 Stannett używa tutaj terminu „obliczenie". W niniejszej pracy jest on raczej zarezerwowany do obliczenia w klasycznym sensie (tj. przez maszynę Turinga), zaś w ogólnym przypadku mówię o przetwarzaniu informacji czy o rozwiązywaniu problemów (ewentualnie – o obliczeniach analogowych bądź procesach analogowych, aby zasygnalizować inne rozumienie tego pojęcia).

Istotna staje się refleksja nad ogólnym zagadnieniem przetwarzania informacji jako pewnego procesu fizycznego uzależnionego od posiadanych zasobów i dostępnych metod, które są wyznaczane przez postać teorii fizycznych. Istnieją np. wyniki dotyczące problemu, co dawałoby się obliczyć, gdyby np. nasz świat był newtonowski i dopuszczał nieskończone prędkości – okazuje się, że w takiej przestrzeni mogą pojawiać się efekty hiperobliczeniowe (por. np. Beggs, Tucker: 2006, 2007, 2009). Prace Kieu (2001, 2001a, 2002, 2002a) są poświęcone hiperobliczalności w mechanice kwantowej. Inna, wspomniana już, praca dotyczy efektów hiperobliczeniowych w czasoprzestrzeni relatywistycznej o pewnych szczególnych własnościach (Németi, David 2006). Natomiast rozprawy Siegelmann (np.: 1998, 2003) opisujące model sieci neuronowych pokazują, co można byłoby obliczyć, gdyby pewne parametry fizyczne miały charakter niealgorytmiczny. Z kolei wyniki Pour-El i Richardsa pokazują, że zjawiska niealgorytmiczne mogłyby powstawać nawet w klasycznych układach fizycznych, które nie angażują efektów relatywistycznych czy kwantowych i nie wymagają zadania niealgorytmicznej wartości na wejściu. Te wszystkie spostrzeżenia świadczą o tym, że w nasze rozumienie pojęcia fizycznie efektywnej procedury (czy: fizycznie efektywnego rozwiązywania problemów) są uwikłane pojęcia empiryczne. Co więcej, pokazują, że zakres naszej wiedzy matematycznej może w istotny sposób zależeć wprost od teorii fizycznej leżącej „w tle" naszych działań.

Ta uwaga może wydawać się oczywista – wszak jeśli używamy standardowego komputera do sprawdzenia, czy pewna liczba jest liczbą pierwszą, to mamy do czynienia z fizycznym komponentem. Jednak w tym wypadku nie powiemy, że jest to wiedza co do zasady nowa – „tkwi" ona bowiem w naszych teoriach matematycznych, a my tylko musimy ją (przez obliczenie) wydobyć na światło dzienne. W przypadku procedur hiperobliczeniowych może być zupełnie inaczej – możemy dowiedzieć się czegoś zupełnie nowego na temat np. liczb naturalnych: hiperobliczenia pozwalają na bezpośrednie sprawdzenie dajmy na to prawdziwości zdania G niezależnego od ZFC. A zatem mielibyśmy tutaj do czynienia z matematyczną wiedzą, co do zasady wykraczającą poza standardową matematykę. To uważam za istotne w rozważaniach dotyczących empirycznych aspektów tej dyscypliny.

W literaturze pojawiają się też zarzuty związane z problemem pomiaru: mówiąc swobodnie, nie jest jasne, czy uzyskaną informację da się faktycznie wydobyć z układu. Pomiar zawsze odbywa się ze skończoną dokładnością, w jego wyniku zawsze otrzymamy liczbę wymierną (a więc rekurencyjną). Czy zatem cały efekt hiperobliczeniowy nie zniknie w momencie pomiaru i tym samym teza o istnieniu zjawisk hiperobliczeniowych stanie się tezą empirycznie pustą? Ten zarzut jest jednak chybiony. Można sobie przecież łatwo wyobrazić sytuację, w której sposób ewolucji układu bardzo silnie zależy od zmiany wartości pewnego parametru λ. Może być tak, że równanie różniczkowe opisujące ewolucję układu jest niestabilne, ale obserwowalne różnice w ewolucji układu pojawią się dopiero po długim czasie (a samego zaburzenia nie będziemy mogli uchwycić empirycznie). W tej sytuacji sam pomiar może nie być w stanie wskazać wartości parametru λ (np. nie będziemy w stanie stwierdzić, czy $\lambda>0$), jednak może się zdarzyć, że jeśli $\lambda>0$, to po dostatecznie długim czasie zaobserwujemy zjawisko A, zaś w przeciwnym – empirycznie odróżnialne zjawisko B (słynny efekt motyla). Zatem sam fakt, że proces pomiaru generuje wartości rekurencyjne nie znaczy, iż nie może istnieć sposób na przekonanie się o tym, jakie są wartości parametrów (np. przez zainicjowanie stosownej ewolucji i dokonanie pomiaru dopiero potem).

Reasumując, stwierdzamy, że badania dotyczące efektów hiperobliczeniowych są mocno osadzone w teoriach fizycznych. Z całą pewnością nie można im postawić zarzutu spekulatywności, a w każdym razie nie w większym stopniu niż innym modelom. Mimo iż nie istnieją ich praktyczne implementacje, to stanowią ważną inspirację dla dyskusji filozoficznej i dla prób wyjaśniania natury naszego matematyzowania.

9.3. Hiperobliczenia a teza Churcha–Turinga

Czy wyniki rozważań dotyczących procesów niealgorytmicznych mogą stanowić argument przeciwko tezie Churcha? Na pierwszy rzut oka może się wydawać, że tak: wszak podano przykład procedury, która pozwala na rozwiązywanie problemów teorioliczbowych, jest dla nas zrozumiała, potrafimy ją opisać (być może nawet zaimplementować), ale która nie daje się symulować na maszynie Turinga. Zauważmy jednak, że teza Churcha–Turinga może być rozumiana na dwa sposoby:

1. Klasycznie: jako teza dotyczącą naszego rozumienia pojęcia obliczenia. Teza Churcha głosi, że to nasze intuicyjne rozumienie pojęcia obliczalności jest adekwatnie odzwierciedlone (uchwycone) w definicji Turinga.

2. Możemy ją także rozumieć niestandardowo, jako tzw. fizyczną tezę Churcha–Turinga (oznaczę ją tutaj – za literaturą – przez PhCT, od *physical Church-Turing thesis*). W tej wersji głosi ona, że nie istnieją w przyrodzie procesy niealgorytmiczne.

Klasyczna teza Churcha (TC) mówi zatem, że:

1. Wszystko, co liczy komputer, może też (oczywiście ze stratą czasową) wykonać człowiek posługujący się tabelą instrukcji (to jest oczywista część TC).

2. Wszystko to, co możemy wykonać m e c h a n i c z n i e, bez odwołania do intuicji, rozumienia, wglądu etc., może też wykonać komputer.

Część 2. głosi zatem, że kiedy ludzie zachowują się czysto mechanicznie, to czynią to w sposób równoważny komputerom. Oryginalne analizy Turinga dotyczyły właśnie naszego rozumienia pojęcia mechanicznej procedury – ów pilny urzędnik miał być niejako modelowo bezmyślny, pozbawiony własnej inicjatywy, pozbawiony rozumienia sensu wykonywanych przez siebie czynności, realizujący niewolniczo jedynie zadane instrukcje. Turingowi chodziło zatem o wyjaśnienie tego, co potrafimy o b l i c z y ć (abstrahując od ograniczeń praktycznych). W swoich analizach zauważył on np., że przy m e c h a n i c z n y m wykonywaniu czynności postępujemy według skończonej tabeli instrukcji, że rozpoznajemy skończenie wiele symboli, że nasze działania mają charakter lokalny etc. Formalny model obliczeń uwzględnia wyniki tych właśnie analiz i stanowi idealizację owego mechanicznego, bezmyślnego procesu.

Może się zatem wydawać, że pojawienie się modeli hiperobliczeniowych, jako alternatywnych dla klasycznego modelu Turinga, stanowi istotny argument w dyskusji na temat oryginalnej tezy Churcha–Turinga. Twierdzę jednak, że wyniki te mają – wbrew pozorom – marginalne znaczenie. Co więcej, nawet ewentualna praktyczna realizacja tych modeli nie wniosłaby tu nic nowego. Istnienie układów fizycznych, takich jak komputer relatywistyczny w okolicy czarnej dziury (bądź np. kwantowych systemów rozstrzygających problem stopu), nie powoduje, że zmienia się nasze rozumienie tego, co to znaczy, iż ktoś o b l i c z a, czyli dokonuje mechanicznych czynności („*without insight or understanding*"). Wokół klasycznej tezy Churcha toczy się żywa dyskusja (por. np. Olszewski, Woleński, Janusz 2006), ale hiperobliczenia nie mają na nią bezpośredniego wpływu. Sądzę bowiem, że wszelkie możliwe kombinacje: (1) ¬TC+¬Ph-TC; (2) ¬TC+Ph-TC; (3) TC+¬Ph-TC; (4) TC+Ph-TC są dopuszczalne. Spójność stanowisk (1) i (4) jest oczywista (całkowite odrzucenie lub całkowita akceptacja obu tez). Stanowisko (2) głosi, że w przyrodzie istnieją tylko procesy algorytmiczne, ale zarazem nasze intuicyjne pojęcie obliczenia nie jest trafnie odzwierciedlone w postaci definicji turingowskiej. Największe znaczenie dyskusja dotycząca problematyki hiperobliczeń mogłaby mieć w kontekście stanowiska (3), które głosi, że nasze naturalne pojęcie obliczenia trafnie odzwierciedla definicja Turinga, ale że w przyrodzie istnieją procesy niealgorytmiczne. Jest ono spójne, bo przecież można pogodzić tezę Churcha–Turinga (która utożsamia intuicyjne pojęcie o b l i c z e n i a z obliczeniem komputerowym) z przekonaniem, że nasze procesy poznawcze nie muszą mieć charakteru algorytmicznego. Z faktu, że kiedy liczymy mechanicznie, zachowujemy się jak komputery, nie wynika przecież, że z a w s z e zachodzi taka sytuacja. A zatem nawet gdyby istniały konkluzywne argumenty na rzecz tezy, że procesy umysłowe mają charakter niealgorytmiczny, nie znaczyłoby to wcale, iż nasze rozumienie pojęcia obliczenia (m e c h a n i c z n e j procedury) ulega zmianie.

Choć więc dyskusja dotycząca modeli hiperobliczeniowych siłą rzeczy ma pewne odbicie w dyskusji na temat tezy Churcha–Turinga, nie ma tu prostych zależności między fizyczną a klasyczną jej wersją. Oczywiście sama fizyczna jej odmiana jest dyskusyjna. Przykładowo Németi i David twierdzą, że takie stanowisko to emanacja newtonowskiego światopoglądu, w myśl którego natura ma charakter urządzenia mechanicznego. Ich zdaniem w świetle rozwoju fizyki jest to założenie bardzo zawężające i mało wiarygodne. Niewątpliwie – zgodnie z tym, co zostało już powiedziane wcześniej – gigantyczny sukces modelu turingowskiego w rozwoju technologii komputerowych, stosowany przy modelowaniu zjawisk przyrodniczych, może skłaniać do przyjęcia tezy o mechanicznym charakterze owych zjawisk[70]. Nie stanowi jednak ostatecznie rozstrzygającego argumentu przeciwko istnieniu zjawisk niealgorytmicznych. Nie rozstrzyga również dyskusji dotyczącej tezy Churcha.

10. Podsumowanie

Analiza problematyki hiperobliczeń (ciekawa sama w sobie) pozwala na wyraźne postawienie szeregu pytań dotyczących różnych aspektów dowodzenia i szerszego procesu zdobywania wiedzy matematycznej. Główne grupy zagadnień, będące niejako motywem przewodnim monografii, to:

1. Problem relacji między realnymi, znanymi z praktyki dowodami matematycznymi a tymi, które są przedmiotem zainteresowania teorii dowodu (traktowanymi jako swoiste obiekty formalne, ciągi symboli).

2. Problem eksplanacyjnej roli dowodów matematycznych.

3. Problem empirycznych elementów w dowodach matematycznych, w szczególności zaś pytanie o możliwość pojawienia się nowego typu argumentacji w matematyce, będącego modyfikacją dowodu klasycznego.

Z rozważań prowadzonych w tym rozdziale płyną ważne wnioski:

1. Dotyczące styku matematyki i empirii: hiperobliczenia ukazują możliwe empiryczne uwikłania matematyki. Modele te mają oczy-

70 Wolfram, fizyk i głośny popularyzator oraz filozof nauki, idzie jeszcze dalej, twierdząc wręcz, że Wszechświat jest po prostu skończonym (choć gigantycznym) automatem komórkowym, a więc układem prostszym niż maszyna Turinga (por. Wolfram 2002).

wiście charakter teoretyczny, jednak pozwalają na uświadomienie sobie, jakie są faktyczne empiryczne uwikłania procesu dowodzenia.

2. Dotyczące rozumienia w matematyce: jest to kategoria nieeliminowana i istotna dla dyskusji na temat statusu wiedzy matematycznej (mówiąc swobodnie: nie ma wiedzy matematycznej bez rozumienia).

3. Pojawia się hipotetyczna możliwość pogodzenia naturalizmu z odrzuceniem mechanicyzmu i wyjaśniania intuicji matematycznej w duchu naturalistycznym. W szczególności pojawia się możliwość takiego wyjaśniania procedur uzasadniających w matematyce na poziomie uzasadniania aksjomatów – hiperobliczenia pokazują bowiem, że granica między uzasadnianiem a dowodzeniem może ulec pewnemu zatarciu.

Sądzę zatem, że z punktu widzenia filozofii matematyki, analiza problematyki hiperobliczeń jest owocna.

Podsumowanie

W pracy zostały – zgodnie z zapowiedzią – przeanalizowane następujące zagadnienia:

1. Problem relacji między dowodami realnymi (tj. takimi, jakie pojawiają się w codziennej praktyce matematycznej) a dowodami traktowanymi jako obiekty formalne (będące przedmiotem zainteresowania teorii dowodu).

2. Problem eksplanacyjnej roli dowodów matematycznych (i rozumienia w matematyce).

3. Problem empirycznych aspektów dowodów matematycznych i statusu argumentów mających składową empiryczną (w szczególności opartych na najnowszych modelach obliczeń).

Na proces dowodzenia w matematyce można patrzeć jak na pewnego typu uzasadnianie tez, argumentację. W pracy wyróżniłem dwa podstawowe paradygmaty, w ramach których może odbywać się wyjaśnienie tego procesu: formalizmu metodologicznego oraz ujęcia semantycznego. Z punktu widzenia stanowiska formalistycznego konstytutywna dla dowodu jest możliwość jego formalizacji w postaci ciągu formuł, w odpowiednio skodyfikowanym systemie formalnym. Z punktu widzenia ujęcia semantycznego istotny dla dowodu jest element treściowy, pewnego rodzaju nieredukowalny wgląd w prawomocność przejść argumentacyjnych. Wyjaśnienie zależności między tymi dwoma ujęciami jest niezwykle interesujące: powszechnie bowiem wiadomo, że ujęcie formalistyczne traktuje się jako idealizację procesu dowodzenia, a zarazem realne dowody nie są przecież sformalizowane, zaś same procesy dowodzenia nie przebiegają przecież zgodnie z regułami formalnymi.

Ujęcie formalistyczne ma charakter fundacjonalistyczny – w tym sensie, że ma ambicje ustanowienia powszechnie obowiązujących reguł dotyczących poprawności dowodów. Jednak praktyka matematyczna wymyka się tej formalizacji. Prowadzi to do „antyfundacjonalistycznej reakcji", której wyrazistym przedstawicielem jest Lakatos. O ile ujęcie formalistyczne dotyczy w zasadzie jedynie kontekstu uzasadnienia, to badacz dużo uwagi poświęca kontekstowi odkrycia, w szczególności rzeczywistym mechanizmom tworzenia matematyki. Ujęcie autora *Dowodów i refutacji* w naturalny sposób ukazuje związki między zagadnieniami uzasadniania aksjomatów i dowodzenia twierdzeń. Stanowi też dobry punkt wyjścia do dyskusji eksplanacyjnej roli dowodów matematycznych, który może zostać postawiony w bardzo wyraźny sposób w kontekście dowodów komputerowych (a także modelu obliczeń kwantowych i hiperobliczeń).

Osobny problem stanowią empiryczne uwikłania procesów tworzenia wiedzy matematycznej, w szczególności zaś pytanie o to, czy mogą być one w jakiś sposób wspomagane metodami empirycznymi. Oczywistym momentem, w którym pytanie to staje się ciekawe, jest problem dowodów wspomaganych komputerowo (jak rozważany w pracy przykład twierdzenia o czterech barwach). Użycie komputera w dowodzie stanowi pewnego typu eksperyment fizyczny i pojawia się pytanie o status wiedzy uzyskanej przez odwołanie się do niego. Jeszcze wyraźniej kwestia ta uwidacznia się w wypadku (hipotetycznych) dowodów kwantowych, w których empiryczne zapośredniczenie sięga znacznie głębiej i niejako dziedziczy pewne filozoficzne problemy mechaniki kwantowej. Powraca też pytanie o eksplanacyjną wartość tego typu dowodów – nie mamy bowiem żadnej, nawet teoretycznej możliwości wglądu w sam przebieg procedury dowodowej (gdyż pomiar nieodwracalnie zniszczyłby dane obliczenie).

Kulminacją tych rozważań są analizy dotyczące modeli hiperobliczeń. Pokazują one, iż zasób empirycznych technik może być w jawny sposób uzależniony od fizycznej teorii „w tle" (inaczej wygląda to w wypadku mechaniki klasycznej, kwantowej czy relatywistycznej). Empiryczne zapośredniczenie tych (hipotetycznych) procedur dowodowych jest jawne i prowokuje do postawienia pytania o status uzyskanej z ich użyciem wiedzy. Zgodnie z tezą sformułowaną w rozdziale piątym – najbardziej spójne wyjaśnienie oferuje *quasi*-empirystyczne stanowisko w duchu Quine'a, choć oczywiście nie wyjaśnia ono wszystkich problemów. Analiza procedur hiperobliczeniowych pozwala też na uzasadnienie tezy, że granica między procedurami uzasadniania aksjomatów i dowodzenia twierdzeń może być znacznie bardziej rozmyta, niż się wydaje.

W stosunku do rozważań dotyczących obliczeń kwantowych oraz hiperobliczeń można postawić zarzut spekulatywności. Rozdziały 1–3 skupiają się na zjawiskach faktycznie występujących w matematyce, na analizie procesów poznawczych, jakie rzeczywiście zachodzą w praktyce matematycznej. Problem napięcia między dowodami w wersji realnej a dowodami w wersji idealnej jest znany, filozoficznie inspirujący i szeroko dyskutowany. Również dowody komputerowe są dziś już chlebem codziennym matematyków i ten fakt wymaga z pewnością pogłębionej filozoficznej analizy. Natomiast dowody kwantowe pozostają – jak na razie – w sferze teoretycznej i to zarówno z powodów praktycznych (jak na razie udało się stworzyć układy zaledwie kilku kubitów, co oczywiście nie pozwala jeszcze na przeprowadzanie ciekawych obliczeń), jak i z powodów teoretycznych – nie jest jasne, jak szeroka jest klasa potencjalnych zastosowań (tj. jak szeroka klasa problemów kombinatorycznych czy teorioliczbowych daje się rozstrzygać za pomocą algorytmu kwantowego). Z drugiej jednak strony może się okazać, iż sytuacja filozofa A.D. 2012, który rozważa filozoficzne implikacje dowodów kwantowych, przypomina sytuację filozofa A.D. 1940, który rozważał (wówczas jeszcze wykraczające zdecydowanie poza sferę praktyczną) dowody komputerowe. Sądzę więc, że – mimo pewnej spekulatywności – model obliczeń kwantowych skłania do refleksji i pozwala w klarowny sposób postawić pewne pytania.

Jeszcze wyraźniej te cechy pojawiają się w wypadku hiperobliczeń: brak na razie jakichkolwiek implementacji, zaś główny model tu przedstawiany (relatywistycznej maszyny Turinga) jest teoretycznie ciekawy, lecz praktycznie wyklucza się, abyśmy kiedykolwiek doczekali jego implementacji. Rozważania dotyczące hiperobliczeniowych dowodów można zatem – do pewnego stopnia – traktować jako eksperyment myślowy. Sądzę jednak, że ma on bez porównania mniej spekulatywny charakter niż szereg innych eksperymentów myślowych, z jakimi mamy do czynienia w filozofii, a wskazuje na bardzo ciekawy obszar problemowy, dotyczący zagadnienia algorytmiczności w przyrodzie. Przypomnijmy, że w czasoprzestrzeni Newtona można wygenerować zjawiska hiperobliczeniowe – a zatem gdyby obowiązywała fizyka Newtona, rozważania dotyczące hiperobliczeń miałyby praktyczny, a nie teoretyczny charakter. Istnienie hiperobliczeniowych zasobów zależy od kształtu obowiązującej teorii fizycznej. W szczególności też zależy od tego (pośrednio) możliwość rozstrzygania pytań matematycznych z szerszej klasy niż dotychczas. Fakt ten uważam za filozoficznie ciekawy – zwłaszcza z punktu widzenia dyskusji dotyczącej relacji między wiedzą matematyczną i empiryczną – i dlatego zdecydowałem się w niniejszej monografii przedstawić również tę problematykę.

Mam nadzieję, że Czytelnik został przekonany (niezależnie od wyników szczegółowych badań sformułowanych w niniejszej monografii) o prawdziwości wniosku niejako metateoretycznego, dotyczącego żywotności filozofii matematyki jako dyscypliny. Problematyka eksplanacyjnej roli dowodów matematycznych i relacji między realnymi a idealnymi ich wersjami oraz empirycznych uwarunkowań matematyki dostarcza inspiracji do dyskusji. Z całą pewnością filozofia matematyki ma przed sobą okres owocnych badań.

DODATEK

Uwagi i wyjaśnienia dotyczące obliczeń kwantowych

UWAGA 1. Matematyczny odpowiednik bramki kwantowej

Jeśli wyjściowy kubit ma postać $a_0|0\rangle+a_1|1\rangle$, to po jego przejściu przez bramkę kwantową V znajdzie się on na ogół w nowym stanie $b_0|0\rangle+b_1|1\rangle$. Schematycznie:

$$V: a_0|0\rangle+a_1|1\rangle \to b_0|0\rangle+b_1|1\rangle.$$

Nie wszystkie takie przejścia są możliwe – współczynniki a_0, a_1, b_0, b_1 muszą spełniać stosowne warunki techniczne[1].

UWAGA 2. Przestrzeń stanów układu *n* kubitów

Rozważmy najpierw układ złożony z dwóch kubitów (np. fotonów), z których pierwszy jest w stanie $a_0|0\rangle+a_1|1\rangle$, zaś drugi w stanie $b_0|0\rangle+b_1|1\rangle$. Stan układu mieszanego możemy zapisać jako swoisty iloczyn ich obu:

$$(a_0|0\rangle+a_1|1\rangle)(b_0|0\rangle+b_1|1\rangle).$$

Wykonajmy zwykłe mnożenie czynników (traktując je po prostu jak wyrażenie algebraiczne). Otrzymamy:

$$a_0b_0|0\rangle|0\rangle + a_0b_1|0\rangle|1\rangle + a_1b_0|1\rangle|0\rangle + a_1b_1|1\rangle|1\rangle.$$

---

[1] V jest operatorem samosprzężonym na dwuwymiarowej przestrzeni Hilberta.

Uprościmy notację, pisząc $|00\rangle$ zamiast $|0\rangle|0\rangle$, $|01\rangle$ zamiast $|0\rangle|1\rangle$ etc. Otrzymujemy zapis:

$$a_0b_0|00\rangle + a_0b_1|01\rangle + a_1b_0|10\rangle + a_1b_1|11\rangle.$$

Możemy więc uznać $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$ za wektory bazowe dla układu 2-kubitowego[2]. Wektor $a_0b_0|00\rangle + a_0b_1|01\rangle + a_1b_0|10\rangle + a_1b_1|11\rangle$ odpowiada więc układowi dwóch kubitów, z których pierwszy jest w stanie $a_0|0\rangle + a_1|1\rangle$, zaś drugi w stanie $b_0|0\rangle + b_1|1\rangle$. Ogólnie – stan każdego dwukubitowego układu będziemy zapisywać w postaci sumy: $c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle$ (gdzie zespolone współczynniki c_{00}, c_{01}, c_{10}, c_{11} spełniają warunek $|c_{00}|^2+|c_{01}|^2+|c_{00}|^2+|c_{11}|^2=1$). Zauważmy na marginesie, że aby układ postaci $c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + {}$ ${}+ c_{11}|11\rangle$ dał się zapisać w postaci iloczynu dwóch kubitów, muszą istnieć liczby zespolone a_0, a_1, b_0, b_1 spełniające warunki: $|a_0|^2+|a_1|^2=1$; $|b_0|^2+|b_1|^2=1$; $a_0b_0= c_{00}$; $a_0b_1= c_{01}$; $a_1b_0= c_{10}$; $a_1b_1= c_{11}$.

Dla przykładu rozważmy układ złożony z trzech kubitów: $a_0|0\rangle+a_1|1\rangle$, $b_0|0\rangle+b_1|1\rangle$, $c_0|0\rangle+c_1|1\rangle$. Po formalnym mnożeniu (oraz skróceniu zapisu: zamiast $|0\rangle|1\rangle|0\rangle$ piszemy $|010\rangle$ etc.), stan tak powstałego układu można zapisać jako:

$$a_0b_0c_0|000\rangle + a_0b_0c_1|001\rangle + a_0b_1c_0|010\rangle + a_0b_1c_1|011\rangle+ a_1b_0c_0|100\rangle + {}$$
$${}+ a_1b_0c_1|101\rangle + a_1b_1c_0|110\rangle + a_1b_1c_1|111\rangle.$$

Wektory $|000\rangle$, $|001\rangle$, $|010\rangle$, $|011\rangle$, $|100\rangle$, $|101\rangle$, $|110\rangle$, $|111\rangle$ tworzą więc bazę układu 3-kubitowego i ogólny stan układu 3-kubitowego można zapisać jako:

$$a_{000}|000\rangle + a_{001}|001\rangle + a_{010}|010\rangle + a_{011}|011\rangle+ a_{100}|100\rangle + {}$$
$${}+a_{101}|101\rangle + a_{110}|110\rangle + a_{111}|111\rangle;$$

(przy czym musi być spełniony warunek unormowania do jedności, tzn.

---

[2] Mówiąc inaczej, układ dwóch kubitów (traktowanych jako całość) jest w stopniu a_0b_0 w stanie $|00\rangle$, w stopniu a_0b_1 w stanie $|01\rangle$, w stopniu a_1b_0 w stanie $|10\rangle$, w stopniu a_1b_1 w stanie $|11\rangle$.

$|a_{000}|^2 + |a_{001}|^2 + |a_{010}|^2 + |a_{011}|^2 + |a_{100}|^2 + |a_{101}|^2 + |a_{110}|^2 + |a_{111}|^2 = 1$).

Podobne obliczenia można przeprowadzić dla układu *n* kubitów. Każdy z opisanych byłby wektorem postaci $a_{k0}|0\rangle + a_{k1}|1\rangle$, dla $k=1,\ldots,n$. Po odpowiednim wymnożeniu tych wszystkich wyrażeń i dokonaniu odpowiednich skrótów (iloczyn wektorów postaci $|i_1\rangle|i_2\rangle\ldots|i_n\rangle$ zapisalibyśmy jako $|i_1 i_2\ldots i_n\rangle$; np. $|0\rangle|0\rangle\ldots|1\rangle$ jako $|00\ldots1\rangle$), układ opisanoby wyrażeniem będącym sumą 2^n składników postaci $c_{i_1 i_2 \ldots i_n}|i_1 i_2 \ldots i_n\rangle$ (dla każdego ciągu 0–1 długości *n*).

UWAGA 3. Bramka Hadamarda i pierwiastek z negacji

Jedną z najprostszych bramek kwantowych jest tzw. bramka Hadamarda, opisana matematycznie w następujący sposób:

$$|0\rangle \rightarrow 1/\sqrt{2}\,(|0\rangle + |1\rangle);$$
$$|1\rangle \rightarrow 1/\sqrt{2}\,(|0\rangle - |1\rangle)\ [^3].$$

Informacja, jak zachowują się wektory bazowe 0 i 1, wystarczy do obliczenia zachowań dowolnego wektora, ponieważ operatory opisujące ewolucję układów kwantowych działają w sposób liniowy, czyli:

$$H(a_0|0\rangle + a_1|1\rangle) = a_0 H|0\rangle + a_1 H|1\rangle.$$

Łatwo obliczyć, że dwukrotne wykonanie bramki Hadamarda prowadzi układ do stanu wyjściowego[4].

Operator Hadamarda pojawi się przy okazji opisu najprostszego algorytmu kwantowego, czyli algorytmu Deutscha. Rozważmy teraz inny operator *U*, zdefiniowany jako:

$$U{:}\,|0\rangle \rightarrow ½\,(1-i)|0\rangle + ½(1+i)|1\rangle;$$
$$U{:}\,|1\rangle \rightarrow ½\,(1+i)|0\rangle + ½(1-i)|1\rangle.$$

3 Z fizycznego punktu widzenia ta bramka opisuje np. foton przechodzący przez interferometr, przykład ten można znaleźć choćby w Deutsch, Ekert, Lupaccini 2000 lub w Milburn 2000.

4 Bo $H^2|0\rangle=0$, $H^2|1\rangle=1$, zaś ze względu na liniowość operatora H zachodzi $H^2(a_0|0\rangle+a_1|1\rangle) = a_0H^2|0\rangle+a_1H^2|1\rangle = a_0|0\rangle+a_1|1\rangle$.

Krótkie obliczenie pokazuje, że $UU|0\rangle=1$, zaś $UU|1\rangle=0$. A zatem zdefiniowany tak operator U jest pierwiastkiem z negacji, o którym była mowa wcześniej – $U^2(p)=\neg p$. Możemy go oznaczyć jako √NOT.

UWAGA 4. Kiedy pomiar da pełną informację o stanie przed pomiarem?

Rozważmy kubit, o którym z góry wiemy, że znajduje się w jednym ze stanów bazowych 0 lub 1 (ale nie wiemy w którym). W takiej sytuacji wynik pomiaru pozwoli nam na uzyskanie pełnej informacji na temat jego stanu przed pomiarem (jeśli np. pomiar dał wynik 0, to znaczy, że kubit musiał być w stanie 0). Rozważmy teraz układ dwóch kubitów, o którym wiemy z góry, że znajdują się w jednym z dwóch stanów:

$$\Phi_0: 1/\sqrt{2}(|00\rangle+|01\rangle);$$
$$\Phi_1: 1/\sqrt{2}(|10\rangle+|11\rangle).$$

Przypuśćmy teraz, że dokonamy pomiaru stanu na pierwszym kubicie. Informuje nas on o stanie układu. Jest tak, ponieważ tylko stan Φ_0 mógł dać wynik 0, tylko stan Φ_1 mógł dać wynik 1. Płynie stąd ważny wniosek: jeśli skądinąd wiemy, że układ jest w jednym z takich szczególnym stanów, to wynik pomiaru może dać nam jednoznaczną o nim informację. Osobną kwestią jest to, skąd wiemy, że układ znajduje się w jednym z np. dwóch wyróżnionych stanów. Jednak taki wniosek można niekiedy wyciągnąć na podstawie analizy ewolucji układu.

UWAGA 5. Algorytm Deutscha

W algorytmie Deutscha mamy do czynienia z problemem stwierdzenia, jaki jest typ monety. Matematyczne sformułowanie tego zagadnienia brzmi tak: dano funkcję f: $\{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$, zaś naszym zadaniem jest przekonanie się, czy $f(0) = f(1)$ (moneta jest oszukana), czy też $f(0) \neq f(1)$ (moneta jest prawdziwa). Przypuśćmy, że mamy czarną skrzynkę, która oblicza wartość funkcji f (intuicyjnie – skorzystanie ze skrzynki odpowiada obejrzeniu jednej ze stron monety). Ile razy trzeba skorzystać ze skrzynki, aby odpowiedzieć na pytanie o typ funkcji? Klasycznie – oczywiście dwa razy: trzeba zapytać o wartość $f(0)$, a następnie o wartość $f(1)$. W świecie kwantowym można dowiedzieć się, jaki jest typ owej monety (funkcji), odwołując się do tej procedury tylko jeden raz.

W algorytmie Deutscha korzystamy z układu dwóch kubitów. Sam algorytm wygląda tak (dalej pomijam wszystkie współczynniki typu $1/\sqrt{2}$, ½ etc., aby uprościć zapis):

1. W stanie początkowym stan pierwszego kubitu to $|0\rangle$, zaś drugiego – $|0\rangle - |1\rangle$. Stan całego układu można więc zapisać jako $|0\rangle(|0\rangle - |1\rangle)$.

2. Poddajemy pierwszy kubit działaniu bramki Hadamarda, otrzymując:

$$\mathrm{H}: |0\rangle(|0\rangle - |1\rangle) \rightarrow (|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle).$$

3. Układ poddajemy działaniu procedury U_f:

$$(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle) \rightarrow ((-1)^{f(0)}|0\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle)\,(|0\rangle - |1\rangle)\ [5].$$

Pierwszy kubit znajdzie się więc w stanie $(-1)^{f(0)}|0\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle$. Są dwie możliwości:

a) Jeśli $f(0)=f(1)$, to stanem pierwszego kubitu jest $|0\rangle + |1\rangle$ lub $-(|0\rangle + |1\rangle)$;

b) Jeśli $f(0) \neq f(1)$, to stanem pierwszego kubitu jest $|0\rangle - |1\rangle$ lub $-(|0\rangle - |1\rangle)$.

4. Poddajemy pierwszy kubit transformacji Hadamarda, otrzymując:

– w przypadku a): stan $|0\rangle$ lub $-|0\rangle$;

– w przypadku b): stan $|1\rangle$ lub $-|1\rangle$.

5. Teraz pomiar dokonany na pierwszym kubicie daje nam już pewność co do tego, jaki był stan sprzed pomiaru. Tym samym dowiadujemy się, czy zachodzi sytuacja a), czy b). Dowiadujemy się więc przez jednokrotne wywołanie funkcji „obejrzyj stronę monety", jaka to była moneta.

[5] Czytelnik ma do wyboru: (1) obliczyć, traktując to jako ćwiczenie; (2) uwierzyć.

Uogólnieniem algorytmu Deutscha jest algorytm Deutscha–Jozsy, w którym mamy funkcję $f{:}\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ (każdemu ciągowi 0–1 długości *n* przypisuje ona 0 lub 1). Przypuśćmy, że wiemy z góry, iż zachodzi jedna z dwóch możliwości:

a) funkcja f jest stała;

b) funkcja f taką samą ilość razy przyjmuje wartość 0, co 1;

nie wiemy jednak, czy zajdzie sytuacja a), czy b). Klasycznie, aby rozstrzygnąć, z którą z nich mamy do czynienia, musimy skorzystać z obliczenia wartości funkcji *f* około 2^{n-1} razy[6]. Algorytm Deuscha–Jozsy rozwiązuje problem w czasie wielomianowym. Również w jego przypadku nie można kontrolować poszczególnych etapów eksperymentu. Wykonanie pomiaru w trakcie obliczenia powodowałoby redukcję stanu układu i nieodwracalnie zniszczyło obliczenie. Pomiar może zatem zostać dokonany dopiero po zakończeniu całego procesu.

---

6 Jeśli mamy szczęście, to już za drugim razem otrzymamy różne wyniki i wiemy, że funkcja nie jest stała. Jeśli mamy pecha, to 2^{n-1} razy otrzymamy ten sam wynik i musimy zapytać jeszcze raz, aby rozstrzygnąć, czy funkcja jest stała, czy nie.

Bibliografia

Aharonov D., 1998, *Quantum computation*, "Annual Review of Computational Physics VI" Singapore: World Scientific), dostępne on-line: http://arxiv.org/PS_cache/quant-ph/pdf/9812/9812037v1.pdf (dostęp 01.03.2012 r.).

Allaire F., 1978, *Another proof of the four-color theorem. Part I*, in: "Proceedings of the Seventh Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing (1977)", eds. D. McCarthy, H. C. Williams, Utilitas Mathematica Pub., Winnipeg, s. 3–72.

Andréka H., Németi I., Németi P., 2009, *General Relativistic hypercomputing and foundationof mathematics*, "Natural Computing", No. 8 (3), s. 499–516.

Appel K., Haken W., 1977, *Every planar map is four colorable, part I: discharging*, "Illinois Journal of Mathematics", No. 21, s. 429–490.

Appel K., Haken W., 1983, *Zagadnienie czterech barw*, przeł. J. Kucharczyk, w: *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, red. L. A. Steen, przeł. J. Łukaszewicz (i in.), WNT, Warszawa, s. 170–198.

Appel K., Haken W., Koch J., 1977, *Every planar map is four colorable, part II: reducibility*, "Illinois Journal of Mathematics", No. 21, s. 491–567.

Azzouni J., 2004, *The derivation-indicator view of mathematical practice*, "Philosophia Mathematica", Vol. 12, s. 81–105.

Azzouni J., 2006, *How and why mathematics is unique as a social practice*, in: *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics*, ed. R. Hersh, Springer, New York, s. 201–220.

Bagaria J., 2005, *Natural axioms of set theory and the continuum problem*, in: *Logic, Methodology, and Philosophy of Science: [Proceedings of the Twelfth International Congress]*, eds. P. Hájek, L. Valdés-Villanueva, D. Westerståhl, King's College Publications, London, s. 43–64.

Bagemihl F., 1990, *Throwing a dart at Freiling's argument against the continuum hypothesis*, "Real Analysis Exchange", No. 15, s. 342–345.

Barwise J., 1985, *Model-theoretic logics: background and aims*, in: *Model-theoretic logics*, eds. J. Barwise, S. Feferman, Springer-Verlag, New York, s. 3–23.

Barwise J., 1989, *Mathematical proofs of computer system correctness*, "Notices of the American Mathematical Society", No. 36, s. 844–851.

Bassler O. B., 2006, *The surveyability of mathematical proof: a historical perspective*, "Synthese", No. 148, s. 99–133.

Beggs E. J., Tucker J. V., 2006, *Embedding infinitely parallel computation in Newtonian kinematics*, "Applied Mathematics and Computation", Vol. 178, s. 25–43.

Beggs E. J., Tucker J. V., 2007, *Can Newtonian systems, bounded in space, time, mass and energy compute all functions?*, "Theoretical Computer Science", Vol. 371, s. 4–19.

Beggs E. J., Tucker J. V., 2009, *Computations via Newtonian and relativistic kinematic systems*, "Applied Mathematics and Computation", Vol. 215, s. 1311–1322.

Benacerraf P., 1962, *Tasks and supertasks, and the modern Eleatics*, "The Journal of Philosophy", Vol. 59, s. 765–784.

Benacerraf P., Putnam H. (eds.), 1964, *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Berkeley G., 2004, *Traktat o zasadach ludzkiego poznania*, przeł. J. Salamon, posłowie napisał S. T. Kołodziejczyk, Zielona Sowa, Kraków.

Bernays P., 1967, *Hilbert, David*, w: *The Encyclopedia of Philosophy*, Vol. 3, ed. P. Edwards, Macmillian Publishing Co. and The Free Press, New York, s. 496–504.

Blake R. M., 1926, *The paradox of temporal process*, "The Journal of Philosophy", Vol. 23, s. 645–654.

Blum L., Shub M., Smale S., 1989, *On a theory of computation and complexity over the real numbers: NP-completeness, recursive functions and universal machines*, "Bulletin of the American Mathematical Society. New Series", No. 21, s. 1–46.

Blum L., Cucker F., Shub M., Smale S., 1998, *Complexity and Real Computation*, Springer, New York.

Boolos G., 1987, *A curious* inference, "Journal of Philosophical Logic", No. 16, s. 1–12.

Brown J., 1999, *Philosophy of Mathematics. An Introduction to the World of Proofs and Pictures*, Routledge, New York.

Carnap R., 1950, *Empiricism, semantics and ontology*, "Revue Internationale de Philosophie", No. 4, s. 20–40. Przedruk: Benacerraf, Putnam 1964, s. 233–248.

Cerutti E., Davis P. J., 1969, *Formac meets Pappus*, "American Mathematical Monthly", No. 76, s. 895–904.

Chaitin G., 1987, *Algoritmic Information Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, MA.

Chihara C., 1965, *On the possibility of completing an infinite task*, "Philosophical Review", Vol. 74, s. 74–87.

Chihara C., 1990, *Constructibility and Mathematical Existence*, Clarendon Press, Oxford.

Coffa A., 1986, *From Geometry to tolerance: sources of conventionalism in nineteenth-century geometry*, in: *From Quarks To Quasars: Philosophical Problems Of Modern Physics*, ed. R. Colodny, Pittsburgh University Press, Pittsburgh, PA, s. 3–70.

Cook S., 1971, *The complexity of theorem-proving procedures*, in: *Conference Record of Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, ACM, New York, s. 151–158.

Copeland J., 2002, *Hypercomputation*, "Minds and Machines", No. 12, s. 461–502.

Copeland J., 2002a, *Accelerating Turing machines*, "Minds and Machines", No. 12, s. 281–301.

Copeland J., 2004, *Hypercomputation: philosophical issues*, "Theoretical Computer Science", Vol. 317, s. 251–267.

Copeland J., 2008, *The modern history of computing*, in: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2008 Edition)*, ed. E. N. Zalta, http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/computing-history (dostęp: 01.03.2012 r.).

Copeland J., Proudfoot D., 1999, *Alan Turing's forgotten ideas in computer science*, "Scientific American", Vol. 280, s. 76–81.

Copleston F., 1997, *Historia filozofii. Tom V: Od Hobbesa do Hume'a*, przeł. J. Pasek i in., PAX, Warszawa.

Costa J. F., Loff B., Mycka J., 2009, *A foundation for real recursive function theory*, "Annals of Pure and Applied Logic", Vol. 160, No. 3, s. 255–288.

Cotogno P., 2003, *Hypercomputation and the Physical Church-Turing Thesis*, "British Journal for the Philosophy of Science", Vol. 54, s. 181–223.

Da Costa N. C. A., Doria F. A., 1996, *Structures, Suppes predicates, and Boolean-valued models in physics*, in: *Philosophical Logic and Logical Philosophy: Essays in Honour of Vladimir A. Smirnov*, eds. P. I. Bystrov, V. N. Sadovsky, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, s. 91–118.

Dales H. G., Woodin W. H., 1987, *An Introduction to Independence for Analyst*, Cambridge University Press, Cambridge, MA.

Davis M., 2004, *The myth of hypercomputation*, in: *Alan Turing: Life and Legacy of a Great Thinker*, ed. C. Teuscher, Springer, Berlin, s. 195–212.

Davis M., 2006, *Why there is no such discipline as hypercomputation*, "Applied Mathematics and Computation", Vol. 178, s. 4–7.

Detlefsen M., 1986, *Hilbert's Program*, D. Reidel Publishing Do., Dordrecht.

Detlefsen M., 1990, *On an alleged refutation of Hilbert's program using Gödel's first incompleteness theorem*, "Journal of Philosophical Logic", No. 19, s. 343–377.

Detlefsen M., 2005, *Formalism*, in: Shapiro 2005a, s. 236–317.

Detlefsen M., Luker M., 1980, *The four color-problem and mathematical proof*, "Journal of Philosophy", No. 77, s. 803–820.

Deutsch D., Ekert A., Lupacchini R., 2000, *Machines, logic and quantum physics*, "The Bulletin of Symbolic Logic", No. 6 (3), s. 265–283.

Earman J., Norton J. D., 1993, *Forever is a day: supertasks in Pitowsky and Malament-Hogarth spacetimes*, "Philosophy of Science", Vol. 60, s. 22–42.

Earman J., Norton J. D., 1996, *Infinite Pains: The Trouble with Supertasks*, in: *Benacerraf and his Critics*, eds. A. Morton, S. P. Stich, Blackwell, Oxford, s. 231–261.

Ellentuck E., 1975, *Gödel's square axioms for the continuum*, "Mathematische Annalen", Vol. 216, s. 29–33.

Ernest P., 1997, *The legacy of Lakatos: reconceptualising the philosophy of mathematics*, "Philosophia mathematica", Vol. 5, s. 116–134.

Etesi G., Németi I., 2002, *Turing computability and Malament-Hogarth spacetimes*, "International Journal of Theoretical Physics", No. 41 (2), s. 342–370.

Feferman S., 1978, *The logic of mathematical discovery vs. the logical structure of mathematics*, "Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association", Vol. 2: "Symposia and Invited Papers", s. 309–327.

Feferman S., 1987, *Infinity in mathematics: is Cantor necessary?*, in: *L'infinito nella scienza*, ed. G. T. di Francia, Instituto della Enciclopedia Italiana, Roma, s. 151–209.

Feferman S., 1988, *Hilbert's program relativized: proof-theoretical and foundational reductions*, "Journal of Symbolic Logic", Vol. 53, s. 364–383.

Feferman S., 1996, *Gödel's program for new axioms: Why, where, how and what?*, in: *Gödel '96. Logical foundations of Mathematics, Computer Science, and Physics*, ed. P. Hájek, Springer-Verlag, Berlin–New York, s. 3–22.

Feferman S., 2000, *Mathematical intuition vs. mathematical monsters*, "Synthese", No. 125, s. 317–332.

Feferman S., 2000a, *Why the programs for new axioms need to be questioned*, "The Bulletin of Symbolic Logic", No. 6, s. 401–413.

Feynman R. P., 1982, *Simulating physics with computers*, "International Journal of Theoretical Physics", No. 21, s. 467–488.

Field H., 1980, *Science Without Numbers*, Basil Blackwell, Oxford.
Foreman M., 1998, *Generic large cardinals: new axioms for mathematics?*, in: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berlin 1998*, red. G. Fischer, U. Rehmann, Vol. 2, Deutscher Mathematiker-Vereinigung, Rosenheim, s. 11–21.
Frege G., 1903, *Grundgesetze der Arithmetik 2*, H. Pohle, Jena.
Frege G., 1906, *Über die Grundlagen der Geometrie*, "Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung", Vol. 12, s. 319–324, 368–375.
Freiling C., 1986, *Axioms of symmetry: throwing darts at the real number line*, "Journal of Symbolic Logic", Vol. 51, s. 190–200.
Freiling C., Simms J. C., 1990, *A three-dart response to an argument of Bagemihl*, "Real Analysis Exchange", No. 15, s. 772–776.
Freudenthal H., 1962, *The main trends in the foundations of geometry in the 19th century*, in: *Logic, Methodology and Philosophy of Science, Proceedings of the 1960 Congress*, eds. E. Nagel, P. Suppes, A. Tarski, Stanford University Press, Stanford, CA, s. 613–621.
Friedman H., 1981, *On the necessary use of abstract set theory*, "Advances in Mathematics", No. 41, s. 209–280.
Friedman H., 1986, *Necessary uses of abstract set theory in finite mathematics*, "Advances in Mathematics", No. 60, s. 92–122.
Friedman H., 2000, *Normal mathematics will need new axioms*, "The Bulletin of Symbolic Logic", No. 6, s. 434–446.
Garey M. R., Johnson D. S., 1979, *Computers and Intractibility, a Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, CA.
Giaro K., Kamiński M., 2003, *Wprowadzenie do algorytmów kwantowych*, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa.
Gonthier G., 2004, *A computer-checked proof of the Four Color Theorem*, http://research.microsoft.com/%7Egonthier/4colproof.pdf (dostęp: 01.03.2012 r.).
Gödel K., 1936, *Über die Länge von Beweisen*, "Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums", Vol. 7, s. 23–24. Przekład angielski: Gödel 1986, s. 397–398.
Gödel K., 1944, *Russell's Mathematical Logic*, in: *The philosophy of Bertrand Russell*, "Library of Living Philosophers", Vol. 5, ed. P. A. Schlipp, Open Court Publishing Company, La Salle, IL, s. 123–153. Przedruk: Benacerraf, Putnam 1964, s. 211–232, a także: Gödel 1990, s. 119–141. Przekład polski: Murawski 2002, s. 77–102.
Gödel K., 1946, *Remarks before the Princeton bicentennial conference on problems in mathematics*, in: Gödel 1990, s. 150–153.

Gödel K., 1947/64, *What is Cantor's Continuum Problem?*, "American Mathematical Monthly", No. 54, s. 515–525. Przedruk w rozszerzonej wersji: Benacerraf, Putnam 1964, s. 258–273.

Gödel K., 1970a, *Some considerations leading to the probable conclusion, that the true power of the continuum is* $\aleph_2$, in: Gödel 1995, s. 420–421.

Gödel K., 1970b, *A proof of Cantor's continuum hypothesis from a highly plausible axiom about orders of growth*, in: Gödel 1995, s. 422–423.

Gödel K., 1972, *Some remarks on the undecidability results*, in: Gödel 1990, s. 305–306.

Gödel K., 1986, *Collected Works*, Vol. 1, eds. S. Feferman S. et al., Oxford University Press, New York; Clarendon Press, Oxford.

Gödel K., 1990, *Collected Works*, Vol. 2, eds. S. Feferman et al., Oxford University Press, Oxford.

Gödel K., 1995, *Collected Works*, Vol. 3, eds. S. Feferman et al., Oxford University Press, Oxford.

Gray J., 1989, *Ideas of Space, Euclidean, Non-Euclidean and Relativistic*, Oxford University Press, Oxford.

Grover L., 1996, *A fast quantum mechanical algorithm for database search*, http://arxiv.org/abs/quant-ph/9605043 (dostęp: 01.03.2012 r.).

Hadamard J., 1964, *Psychologia odkryć matematycznych*, przeł. R. Molski, PWN, Warszawa.

Hales T. C., 2000, *Cannonballs and honeycombs*, "Notices of the American Mathematical Society", No. 47 (4), s. 440–449.

Hales T. C., 2005, *A proof of the Kepler conjecture*, "Annals of Mathematics. Second Series", No. 162 (3), s. 1065–1185.

Hahn H., 1980, *Empiricism, Logic and Mathematics*, D. Reidel, Dordrecht–Boston, MA.

Hallett M., 1979, *Towards a theory of mathematical research programs I & II*, "British Journal for the Philosophy of Science", No. 30, ss. 1–25, 135–159.

Hamkins J. D., 2002, *Infinite time Turing machines*, "Minds and Machines", No. 12, s. 521–539.

Hamkins J. D., Lewis A., 2000, *Infnite time Turing machines*, "Journal of Symbolic Logic", Vol. 65, s. 567–604.

Hauser K., 2002, *Is Cantor's continuum problem inherently vague?*, "Philosophia Mathematica", Vol. 10, s. 257–292.

Heesch H., 1969, *Untersuchungen zum Vierfarbenproblem*, "Hochschulskriptum 810/a/b", Bibliographisches Institut, Mannheim.

Hellman G., 1989, *Mathematics Without Numbers*, Clarendon Press, Oxford.

Hempel C. G., 1945, *On the nature of mathematical truth*, “The American Mathematical Monthly”, No. 52, s. 543–556. Przedruk: Benacerraf, Putnam 1964, s. 366–381.

Hilbert D., 1926, *Über das Unendliche*, “Mathematische Annalen”, Vol. 95, s. 161–190. Przekład polski: Murawski 1986, s. 288–307.

Hilbert D., 1928, *Die Grundlagen der Mathematik*, “Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität”, Vol. 6, s. 65–85. Przekład angielski: Van Heijenoort 1967, s. 464–479.

Hirvensalo M., 2004, *Algorytmy kwantowe*, przeł. P. Zabierowski, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

Hodges A., 2011, *Alan Turing*, in: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2011 Edition)*, ed. E. N. Zalta, http://plato.stanford.edu/archives/sum2011/entries/turing/ (dostęp: 01.03.2012 r.).

Hogarth M. L., 1992, *Does General Relativity allow an observer to view an eternity in a finite time?*, “Foundations of Physics Letters”, No. 5, s. 173–181.

Hogarth M. L., 1993, *Predicting the future in relativistic spacetimes*, “Studies in History and Philosophy of Science. Studies in History and Philosophy of Modern Physics”, No. 24, s. 721–739.

Hogarth M. L., 1994, *Non-Turing computers and non-Turing computability*, “PSA”, No. 1, s. 126–138.

Hogarth M. L., 2000, *Predictability, Computability, and Spacetime*, [PhD Dissertation], University of Cambridge, http://ftp.math-inst.hu/pub/algebraic-logic/Hogarththesis.ps.gz (dostęp: 01.03.2012 r.).

Isaacson D., 1987, *Arithmetical truth and hidden higher-order concepts*, in: *Logic Colloquium ’85*, ed. The Paris Logic Group, North Holland, Amsterdam, s. 147–169. Przedruk: *The Philosophy of Mathematics*, ed. W. D. Hart, Oxford University Press, Oxford 1996, s. 203–224.

Jane I., 1993, *A critical appraisal of second-order logic*, “History and Philosophy of Logic”, No. 14, s. 67–86.

Jensen R., 1995, *Inner models and large cardinals*, “Bulletin of Symbolic Logic”, No. 1, s. 393–407.

Johnson G., 2005, *Na skróty przez czas. Czy nadchodzi era komputerów kwantowych?*, przeł. K. Masłowski, Prószyński i S-ka, Warszawa.

Kainen P. C., Saaty T. L., 1986, *The Four-Color Problem: Assaults and Conquest*, Dover, New York.

Kanamori K., Magidor M., 1978, *The evolution of large cardinal axioms in set theory*, in: *Higher Set Theory*, eds. G. H. Müller, D. S. Scott, Springer-Verlag, Berlin, s. 99–275.

Kant I., 1957, *Krytyka czystego rozumu*, przeł. R. Ingarden, t. 1, PWN, Warszawa.

Kartezjusz, 1958, *Prawidła kierowania umysłem; Poszukiwanie prawdy przez światło przyrodzone rozumu*, przeł. L. Chmaj, PWN, Warszawa.

Kartezjusz, 2002, *Rozprawa o metodzie właściwego kierowania rozumem i poszukiwania prawdy w naukach*, przeł. T. Boy-Żeleński, Zielona Sowa, Kraków.

Kaye R., Laflamme R., Mosca M., 2007, *An Introduction to Quantum Computing*, Oxford University Press, Oxford.

Ketland J., 2005, *Some more curious inferences*, "*Analysis*", No. 65 (285), s. 18–24.

Kieu T. D., 2001, *Quantum algorithm for the Hilbert's Tenth Problem*, http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0110136 (dostęp: 01.03.2012 r.).

Kieu T. D., 2001a, *A reformulation of the Hilbert's Tenth Problem through quantum mechanics*, http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0111063v2.pdf (dostęp: 01.03.2012 r.).

Kieu T. D., 2002, *Quantum principles and mathematical computability*, http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0205093v2.pdf (dostęp: 01.03.2012 r.).

Kieu T. D., 2002a, *Quantum hypercomputation*, "Minds and Machines", No. 12, s. 541–561.

Kitaev A. Yu, Shen A. H., Vyalyi M. N., 2002, *Classical and Quantum Computation*, "Graduate Studies in Mathematics", Vol. 47, AMS, Providence, RI.

Kitcher P., 1998, *Mill, mathematics and the naturalist tradition*, in: *The Cambridge companion to Mill*, ed. J. Skorupski, Cambridge University Press, Cambridge, MA, s. 57–111.

Koetsier T., 1991, *Lakatos' Philosophy of Mathematics. A Historical Approach*, North Holland, Amsterdam–London–New York–Tokyo.

Krakowski I., 1980, *The four-color problem reconsidered*, "Philosophical Studies", No. 38, s. 91–96.

Kreisel G., 1965, *Mathematical logic*, in: *Lectures on Modern Mathematics*, ed. T. L. Saaty, Vol. 3, John Wiley, New York.

Kreisel G., 1967, *Mathematical logic: what has it done for the philosophy of mathematics?*, in: *Bertrand Russell: Philosopher of the Century*, ed. R. Schoenman, George Allen and Unwin, London.

Kreisel G., 1974, *A notion of mechanistic theory*, "Synthese", No. 29, s. 11–26.

Kreisel G., 1982, *Review of Pour-El and Richards*, "Journal of Symbolic Logic", Vol. 47, s. 900–902.

Lakatos I., 2002, *Renesans empiryzmu we współczesnej filozofii matematyki?*, w: Murawski 2002, s. 215–243. Oryginał: *A renaissance of empiricism* *in the recent philosophy of mathematics?*, in: I. Lakatos, *Philosophical Papers*, t. 2: *Mathematics, Science and Epistemology*, eds. J. Worall, G. Currie, Cambridge University Press, Cambridge, MA 1978, s. 24–42.

Lakatos I., 2005, *Dowody i refutacje. Logika odkrycia matematycznego*, przeł. M. Kozłowski, K. Lipszyc, Tikkun, Warszawa. Przekład na podstawie wydania z 1999: *Proofs and refutations. The Logic of mathematical discovery*, eds. J. Worral, E. Zahar, Cambridge University Press, Cambridge, MA.

Landauer R., 1961, *Irreversibility and heat generation in the computing process*, "IBM Journal of Research and Development", No. 5, s. 183–191.

Laraudogoitia J. P., 2011, *Supertasks*, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2011 Edition)*, ed. E. N. Zalta, http://plato.stanford.edu/archives/spr2011/entries/spacetime-supertasks/ (dostęp: 01.03.2012 r.).

Lerman M., 1983, *Degrees of Unsolvability*, "Perspectives in Mathematical Logic", Springer-Verlag, Berlin.

Levin M. A., 1981, *On Tymoczko's argument for mathematical empiricism*, "Philosophical Studies", No. 39, s. 79–86.

Macfarlane A., 2009 (pierwodruk: 1916), *Lectures on Ten British Mathematicians of the Nineteenth Century*, "Mathematical Monographs", Vol. 17, Cornell University Library, http://www.archive.org/details/lecturesontenbrioomacf (dostęp: 01.03.2012 r.).

Maddy P., 1988a, *Believing the axioms. I*, "Journal of Symbolic Logic", Vol. 53, s. 481–511.

Maddy P., 1988b, *Believing the axioms. II*, "Journal of Symbolic Logic", Vol. 53, s. 736–764.

Maddy P., 1990, *Realism in Mathematics*, Oxford University Press, New York.

Maddy P., 1993, *Does V equal L?*, "Journal of Symbolic Logic", Vol. 58, s. 15–41.

Maddy P., 1997, *Naturalism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford.

Mancosu P., 2001, *Mathematical explanation: problems and prospects*, "Topoi", No. 20, s. 97–117.

Marciszewski W., Murawski R., 1995, *Mechanization of Reasoning in a Historical Perspective*, "Poznań Studies in the Philosophy of Science and the Humanities", Vol. 43, Rodopi, Amsterdam–Atlanta.

Mathias A. R. D., 2002, *A term of length 4 523 659 424 929*, "Synthese", No. 133, s. 75–86.

McCarty D. C., 2004, *David Hilbert and Paul du Bois-Reymond: limits and ideals*, in: *One Hundred Years of Russell's Paradox*, ed. G. Link, Walter de Gruyter, Berlin–New York, s. 517–532.

Meikle L. I., Fleuriot J. D., 2003, *Formalizing Hilbert's Grundlagen in Isabelle/Isar*, "Theorem Proving in Higher Order Logics, Lecture Notes in Computer Science", Vol. 2758, s. 319–334.

Mermin N. D., 2007, *Quantum Computer Science. An Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, MA.

Milburn G., 2000, *Procesor Feynmana. Wprowadzenie do obliczeń kwantowych*, przeł. P. Amsterdamski, Wydawnictwo CiS, Warszawa.

Mill J. St., 1962, *System logiki dedukcyjnej i indukcyjnej*, przeł. Cz. Znamierowski, wstępem poprzedził K. Szaniawski, t. 2, PWN, Warszawa.

Moore C., 1996, *Recursion theory on the reals and continuous-time computation*, "Theoretical Computer Science", Vol. 162, s. 23–44.

Murawski R., 1984, *G. Cantora filozofia teorii mnogości*, „Studia Filozoficzne", nr 11/12 (8/9), s. 75–88.

Murawski R., (red.) 1986, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Wydawnictwo UAM, Poznań.

Murawski R., 1993, *Rozwój programu Hilberta*, „Wiadomości Matematyczne", nr 30, s. 51–72.

Murawski R., (red.) 2002, *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów*, Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN.

Mycka J., 2006, *Analog computation beyond the Turing limit*, "Applied Mathematics and Computation", Vol. 178, s. 103–117.

Mycka J., 2010, *Obliczenia dyskretne i ciągłe jako realizacje antropomorficznej i fizycznej koncepcji efektywnej obliczalności*, w: *Światy matematyki. Tworzenie czy odkrywanie?*, red. I. Bondecka-Krzykowska, J. Pogonowski, UAM, Poznań, s. 247–260.

Nakahara M., Ohmi T., 2008, *Quantum Computing. From Linear Algebra to Physical Realizations*, Taylor & Francis Group, Boca Raton–London–New York.

Németi I., Dávid G., 2006, *Relativistic computers and the Turing barrier*, "Journal of Applied Mathematics and Computation", Vol. 178 (1), s. 118–142.

Nielsen M. A., Chuang I. L., 2000, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge, MA.

Oliveri G., 2006, *Mathematics as a quasi-empirical science*, "Foundations of Science", No. 11, s. 41–79.

Olszewski A., Woleński J., Janusz R., 2006, *Church's Thesis after 70 Years*, Ontos-Verlag, Frankfurt–New Brunswick.

Ord T., 2006, *The many forms of hypercomputation*, "Applied Mathematics and Computation", Vol. 178 (1), s. 143–153.

Papadimitriou C. H., 2002, *Złożoność obliczeniowa*, przeł. P. Kanarek, K. Loryś, WNT, Warszawa.

Paris J., Harrington L., 1977, *A mathematical incompleteness in Peano Arithmetic*, in: *Handbook of Mathematical Logic*, ed. J. Barwise, North-Holland, Amsterdam, s. 1133–1142.

Pasch M., 1882, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Teubner, Leipzig.

Peacock G., 1830, *A Treatise on Algebra*, Deighton, Cambridge, MA; Rivington, and Whittaker, Treacher & Arnot, London.

Penrose R., 1994, *Shadows of the Mind*, Oxford University Press, Oxford.

Pitowsky I., 1990, *The Physical Church Thesis and physical computational complexity*, "Iyyun", No. 39, s. 81–99.

Poincaré H., 1952, *Science and Method*, Dover Publications, New York.

Pour-El M. B., 1974, *Abstract computability and its relation to the General Purpose Analog Computer*, "Transactions of the American Mathematical Society", Vol. 199, s. 1–28.

Pour-El M. B., Richards J. I., 1979, *A computable ordinary differential equation which possesses no computable solution*, "Annals of Mathematical Logic", No. 17, s. 61–90.

Pour-El M. B., Richards J. I., 1981, *The wave equation with computable initial data such that its unique solution is not computable*, "Advances in Mathematics", No. 39, s. 215–239.

Pour-El M. B., Richards J. I., 1989, *Computability in Analysis and Physics*, Springer, Berlin.

Pour-El M., Zhong N., 1997, *The wave equation with computable initial data whose unique solution is nowhere computable*, "Mathematical Logic Quarterly", No. 43 (4), s. 499–509.

Priest G., 1997, *Inconsistent Models of Arithmetic Part I: Finite Models*, "Journal of Philosophical Logic", No. 26 (2), s. 223–235.

Priest G., 2000, *Inconsistent Models of Arithmetic. Part II: The General Case*, "Journal of Symbolic Logic", Vol. 65 (4), s. 1519–1529.

Pringsheim A., 1920, *Elementare Funktionenlehre und komplexe Integration*, "Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München", s. 145–182.

Pringsheim A., 1925, *Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre, Zweiter Band, Erste Abteilung: Grundlagen der Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, B. G. Teubner, Leipzig–Berlin.

Purkert W., 1989, *Cantor's views on the foundations of mathematics*, in: *The History of Modern Mathematics*, Vol. 1, eds. D. E. Rowe, J. McCleary, Academic Press, New York, s. 49–65.

Putnam H., 1975, *What is mathematical truth?*, in: *Mathematics, Matter and Method: Philosophical Papers*, Vol. 1, Cambridge University Press, s. 60–78. Przekład polski: *Czym jest prawda matematyczna?*, w: Murawski 2002, s. 244–265.

Quine W. V., 1951, *On Carnap's views on ontology*, "Philosophical Studies", No. 2, s. 65–72. Przekład polski: *O poglądach Carnapa na ontologię*, w: *Empiryzm współczesny*, red. B. Stanosz, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 1991, s. 163–172.

Quine W. V., 1953a, *On what there is*, in: *From a Logical Point of View*, Harvard University Press, Cambridge, MA, s. 1–19. Przekład polski: *O tym, co istnieje*, w: *Z punktu widzenia logiki*, red. B. Stanosz, PWN, Warszawa 1969, s. 9–34.

Quine W. V., 1953b, *Two dogmas of empiricism*, in: *From a Logical Point of View*, Harvard University Press, Cambridge, MA, s. 20–46. Przekład polski: *Dwa dogmaty empiryzmu*, w: *Z punktu widzenia logiki*, red. B. Stanosz, PWN, Warszawa 1969,s. 35–70.

Quine W. V., 1960, *Word and object*, MIT, Cambridge, MA. Przekład polski: *Słowo i przedmiot*, przeł. C. Cieśliński, Alatheia, Warszawa 1999.

Quine W. V., 1981, *Things and their place in theories*, in: *Theories and Things*, The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, MA, s. 1–23. Przekład polski: *Rzeczy i ich miejsca w teoriach*, w: *Metafizyka w filozofii analitycznej*, red. T. Szubka, TN KUL, Lublin 1995, s. 31–52.

Quine W. V., 1984, *Review of Parsons C. "Mathematics in Philosophy"*, "The Journal of Philosophy", Vol. 81, s. 783–794.

Quine W. V., 1986, *Reply to Charles Parsons*, in: *The Philosophy of W. V. Quine*, eds. L. Hahn, P. A. Schlipp, Open Court, La Salle, IL, s. 396–403.

Rav Y., 1999, *Why do we prove theorems?*, "Philosophia Mathematica", Vol. 7, s. 5–41.

Rav Y., 2007, *A critique of a formalist-mechanist version of the justification of arguments in mathematicians' proof practices*, "Philosophia Mathematica", Vol. 15, s. 291–320.

Resnik M. D., 1988, *Second-order logic still wild*, "The Journal of Philosophy", Vol. 85, s. 75–87.

Resnik M. D., Kushner D., 1987, *Explanation, independence and realism in mathematics*, "British Journal for the Philosophy of Science", Vol. 38 (2), s. 141–158.

Robertson N., Sanders D. P., Seymour P. D., Thomas R., 1997, *The Four Color Theorem*, "Journal of Combinatorial Theory. Series B", No. 70, s. 2–44.

Rota G.-C., 1997, *The phenomenology of mathematical proof*, "Synthese", No. 111, s. 183–196.

Russell B. A. W., 1924, *Logical Atomism*, in: *Contemporary British Philosophy*, ed. J. M. Muirhead, George Allen & Unwin, London, s. 357–383. Przedruk: *Logic and Knowledge*, ed. R. C. Marsh, George Allen & Unwin, London, s. 323–343.

Russell B. A. W., 1936, *The limits of empiricism*, "Proceedings of the Aristotelian Society", No. 36, s. 131–150.

Russell B. A. W., 1973, *Essays in Analysis*, ed. D. Lackey, George Allen & Unwin, London.

Scarpellini B., 1963, *Zwei Unentscheitbare Probleme der Analysis*, "Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik", Vol. 9, s. 265–289.

Shagrir O., 2004, *Super-tasks, accelerating Turing machines and uncomputability*, "Theoretical Computer Science", Vol. 317, s. 105–114.

Shagrir O., Pitowsky I., 2003, *Physical hypercomputation and the Church-Turing Thesis*, "Minds and Machines", No. 13, s. 87–101.

Shannon C. E., 1941, *Mathematical theory of the differential analyser*, "Journal of Mathematics and Physics of the Massachusetts Institute of Technology", No. 20, s. 337–354.

Shapiro S., 1985, *Second-order languages and mathematical practice*, "Journal of Symbolic Logic", Vol. 50, s. 714–742.

Shapiro S., 1991, *Foundations Without Foundationalism*, Clarendon Press, Oxford.

Shapiro S., 1996, *Space, number and structure: a tale of two debates*, "Philosophia Mathematica", Vol. 4, s. 148–173.

Shapiro S., 2000, *Thinking about Mathematics. The Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford.

Shapiro S. (ed.), 2005a, *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, Oxford.

Shapiro S., 2005b, *Categories, structures, and the Frege-Hilbert controversy: the status of meta-mathematics*, "Philosophia Mathematica", Vol. 13, s. 61–77.

Sher G., 1991, *The Bounds of Logic. A Generalized Viewpoint*, MIT Press, Cambridge, MA–London.

Shor P., 1994, *Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring*, in: *Proc. 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, ed. S. Goldwasser, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, s. 124–134.

Shor P., 1997, *Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer*, "SIAM J. Computing", No. 26, s. 1484–1509.

Sieg W., 1984, *Foundations for analysis and proof theory*, "Synthese", No. 60, s. 159–200.

Siegelmann H. T., 1998, *Neural Networks and Analog Computation: Beyond the Turing Limit*, Birkhauser, Boston, MA.

Siegelmann H. T., 2003, *Neural and super-Turing computing*, "Minds and Machines", No. 13, s. 103–114.

Siegelmann H. T., Sontag E. D., 1994, *Analog computation via neural networks*, "Theoretical Computer Science", Vol. 131, s. 311–360.

Siegelmann H. T., Sontag E. D., 1995, *Computational power of neural networks*, "Journal of Computer System Sciences", No. 50 (1), s. 132–150.

Simms J. C., 1989, *Traditional Cavalieri principles applied to the modern notion of area*, "Journal of Philosophical Logic", No. 18, s. 275–314.

Simms J. C., 1991, *Why the Continuum Hypothesis is false*, in: *Jahrbuch 1990 der Kurt-Gödel-Gesellschaft*, Wien.

Simpson S., 1977, *Degrees of unsolvability: a survey of results*, in: *Handbook of Mathematical Logic*, ed. J. Barwise, North-Holland, Amsterdam, s. 631–652.

Simpson S., 1984, *Which set existence axioms are needed to prove the Cauchy/Peano theorem for ordinary differential equations?*, "Journal of Symbolic Logic", Vol. 49, s. 783–802.

Simpson S., 1987, *Unprovable theorems and fast-growing functions*, in: *Logic and Combinatorics*, ed. S. G. Simpson, "Contemporary Mathematics", Vol. 65, s. 359–394.

Simpson S., 1988, *Partial realizations of Hilbert's Program*, "Journal of Symbolic Logic", Vol. 53, s. 349–363.

Simpson S., 1999, *Subsystems of Second Order Arithmetic*, Springer-Verlag, Berlin–New York.

Skorupski J., 2005, *Later empiricism and logical positivism*, in: Shapiro 2005a, s. 51–74.

Smith W. D., 2006, *Three counterexamples refuting Kieu's plan for "quantum adiabatic hypercomputation"; and some uncomputable quantum mechanical tasks*, "Applied Mathematics and Computation", Vol. 178, s. 184–193.

Smorynski C., 1977, *The incompleteness theorem*, in: *Handbook of mathematical logic*, ed. J. Barwise, North-Holland, Amsterdam, s. 821–864.

Solovay R. M., 1995, *Introductory note to *1970a, *1970b, *1970c*, in: Gödel 1995, s. 405–420.

Stannett M., 2006, *The case for hypercomputation*, "Applied Mathematics and Computation", Vol. 178, s. 8–24.

Steel J. R., 2000, *Mathematics needs new axioms*, "The Bulletin of Symbolic Logic", No. 6, s. 422–433.

Steiner M., 1978, *Mathematics, explanation and scientific knowledge*, “Nous”, No. 12, s. 17–28.

Steiner M., 2005, *Mathematics – application and applicability*, in: Shapiro 2005a, s. 625–650.

Stolze J., Suter D., 2004, *Quantum Computing. A Short Course from Theory to Experiment*, Wiley-VCH, Weinheim.

Swart E. R., 1980, *The philosophical implications of the four-color problem*, “American Mathematical Monthly”, No. 87, s. 697–707.

Syropoulos A., 2008, *Hypercomputation. Computing beyond the Church-Turing Barrier*, Springer, New York.

Tarski A., 1930, *Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik*, “Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et de Lettres de Varsovie”, Vol. 23, s. 22–39. Przekład polski: *Podstawowe pojęcia metodologii nauk dedukcyjnych*, przeł. J. Zygmunt, w: A. Tarski, *Pisma Logiczno-Filozoficzne*, t. 2: *Metalogika*, PWN, Warszawa 2001, s. 31–92.

Teller P., 1980, *Computer proof*, “The Journal of Philosophy”, Vol. 77, s. 797–803.

Tharp L. H., 1975, *Which logic is the right logic?*, “Synthese”, No. 31, s. 1–21.

Thomson J., 1876, *On an integrating machine having a new kinematic principle*, “Proceedings of the Royal Society of London”, No. 24, s. 262–265.

Thomson J. F., 1954, *Tasks and supertasks*, “Analysis”, No. 15, s. 1–13.

Tieszen R., 1992, *Kurt Gödel and phenomenology*, “Philosophy of Science”, Vol. 59, s. 176–194.

Tieszen R., 1998, *Gödel’s path from the incompleteness theorems (1931) to phenomenology (1961)*, “The Bulletin of Symbolic Logic”, No. 4, s. 181–203.

Tieszen R., 2000, *Gödel an Quine on Meaning and Mathematics*, in: *Between Logic and Intuition. Essays in Honor of Charles Parsons*, eds. G. Sher, R. Tieszen, Cambridge University Press, Cambridge, MA.

Turing A. M., 1936, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, “Proc. London Maths. Soc., ser. 2”, No. 42, s. 230–265.

Turing A. M., 1938, *Systems of Logic Based on Ordinals. Dissertation presented to the faculty of Princeton University in candidacy for the degree of Doctor of Philosophy*, “Proceedings of the London Mathematical Society”, No. 45, s. 161–228.

Tymoczko T., 1979, *The four-color problem and its philosophical significance*, “The Journal of Philosophy”, Vol. 76 (2), s. 57–83. Przekład polski: *Problem czterech barw i jego znaczenie filozoficzne*, w: Murawski 2002, s. 310–340.

Van Heijenoort J. (ed.), 1967, *From Frege to Gödel: A Sourcebook in Mathematical Logic, 1879–1931*, Harvard University Press, Cambridge, MA.

Weyl H., 1949, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton University Press, Princeton.

Weihrauch K., Zhong N., 2002, *Is wave propagation computable or can wave computers beat the Turing machine?*, "Proceedings of the London Mathematical Society", No. 85 (2), s. 312–332.

Wilson R., 2004, *Four Colors Suffice: How the Map Problem Was Solved*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Woodin H., 1999, *The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms and the Nonstationary Ideal*, de Gruyter, Berlin–New York.

Woodin H., 2001, *The continuum hypothesis, Part I, II*, "Notices of the AMS", No. 48 (6, 7), s. 567–576, 681–690.

Wolfram S., 2002, *A New Kind of Science*, Wolfram Media, Inc., Champaign, IL.

Wójtowicz K., 2003, *Spór o istnienie w matematyce*, Semper, Warszawa.

Wójtowicz K., 2004, *O pewnym argumencie przeciwko hipotezie continuum*, w: *Wokół filozofii logicznej. W darze Jerzemu Perzanowskiemu*, red. J. Malinowski, A. Pietruszczak, Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń, s. 259–278.

Wójtowicz K., 2005, *A case against the continuum hypothesis?*, in: *Logic, methodology and philosophy of science at Warsaw University*, eds. A. Brożek, J. J. Jadacki, W. Strawiński, Wydawnictwo Naukowe Semper, Warszawa, s. 193–199.

Wójtowicz K., 2006a, *Filozofia matematyki J. St. Milla*, „Przegląd Filozoficzny", nr 4, s. 155–168.

Wójtowicz K., 2006b, *Co to jest teoria obliczeń kwantowych?*, „Edukacja Filozoficzna", nr 42, s. 49–66.

Wójtowicz K., 2007a, *Filozofia matematyki Imre Lakatosa*, „Roczniki Filozoficzne", nr 55 (1), s. 229–247.

Wójtowicz K., 2007b, *Dowód matematyczny z punktu widzenia formalizmu matematycznego. I*, „Roczniki Filozoficzne", nr 55 (2), s. 123–138.

Wójtowicz K., 2007c, *Dowód matematyczny z punktu widzenia formalizmu matematycznego. II*, „Roczniki Filozoficzne", nr 55 (2), s. 139–153.

Wójtowicz K., 2008, *Eksperyment komputerowy – źródło wiedzy matematycznej?*, „Kwartalnik Filozoficzny", t. 36, z. 1, s. 87–104.

Wójtowicz K., 2009, *Filozofia matematyki a filozoficzna kultura masowa*, w: *Nauka a kultura masowa*, red. M. Heller, J. Mączka, P. Polak, M. Szczerbińska-Polak, Biblos, Tarnów.

Wójtowicz K., 2011a, *Dowód matematyczny – argumentacja czy derywacja? (I)*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce", nr 49, s. 63–80.

Wójtowicz K., 2011b, *Dowód matematyczny – argumentacja czy derywacja? (II)*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce", nr 49, s. 81–97.

Wójtowicz K., 2011c, *Status hipotezy kontinuum w świetle koncepcji Woodina*, „Filozofia Nauki", nr 4, s. 67–82.

Zermelo E., 1908, *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*, "Mathematische Annalen", Vol. 65, s. 107–128. Przekład angielski: Van Heijenoort 1967, s. 183–198.

Wykaz używanych skrótów i symboli

Rozdział 2

ZFC+MC	– teoria mnogości ZFC z dodanym aksjomatem istnienia liczby mierzalnej
$\mathrm{Con}_{\mathrm{ZFC+MC}}$	– zdanie wyrażające niesprzeczność teorii ZFC+MC
PA	– arytmetyka Peano (*Peano arithmetic*)
$\mathrm{PA}+\neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$	– teoria PA z dodanym zdaniem wyrażającym sprzeczność PA
ZFC+V=L	– teoria mnogości z dołączonym aksjomatem konstruowalności

Rozdział 3

4CT	– twierdzenie o czterech barwach (*four-color theorem*)

Rozdział 4

SAT	– problem spełnialności formuł rachunku zdań
P	– klasa problemów rozstrzygalnych w czasie wielomianowym
NP	– klasa problemów rozstrzygalnych niedeterministycznie w czasie wielomianowym
KRZ	– klasyczny rachunek zdań
$\vert 0\rangle$ oraz $\vert 1\rangle$	– oznaczenia bazowych kubitów (bazowych wektorów w dwuwymiarowej przestrzeni Hilberta)
$a_0\vert 0\rangle + a_1\vert 1\rangle$	– oznaczenie kubitu w dwuwymiarowej przestrzeni Hilberta
$a_0b_0\vert 00\rangle + a_0b_1\vert 01\rangle + a_1b_0\vert 10\rangle + a_1b_1\vert 11\rangle$	– oznaczenie kubitu w czterowymiarowej przestrzeni Hilberta

$\sqrt{}$NOT – pierwiastek z negacji, jeden z operatorów na kubitach
$\oplus$ – suma prosta przestrzeni Hilberta

Rozdział 5

ω_o – liczba porządkowa (najmniejsza nieskończona); tutaj używana na oznaczenie czasu działania maszny Turinga
GPAC – *General Purpose Analog Machine* – jeden z wczesnych modeli obliczeń (Shannon)
ARNN – *Analog Recurrent Neuronal Network* – podstawowy model badany przez Siegelmann
O(n) – notacja dotycząca złożoności obliczeniowej; klasa problemów o złożoności liniowej
RTM – relatywistyczna maszyna Turinga (od: *Relativisitic Turing Machine*)
M_{HIPER} – (oznaczenie specyficzne dla książki) urządzenie dokonujące hiperobliczeń
TC – teza Churcha (od: *Church's Thesis*)
Ph-TC – fizyczna teza Churcha

Summary
The Notion of Mathematical Proof

The monograph is devoted to the philosophical analysis of the methodological and epistemological status of mathematical proofs. Three main groups of problems are discussed:

(1) The relationship between the non-formal mathematical proofs we encounter in mathematical practice and their formalized counterparts (as investigated within the proof theory).

(2) The explanatory role of mathematical proofs and the problem of understanding in mathematics.

(3) The problem of empirical elements in mathematical proofs, in particular the status of computer-assisted proofs and (hypothetical) proofs involving new computational models.

In the monograph, I consider two radically different points of view concerning the nature of mathematical proof. They might be labeled as the semantic and the formalistic point of view. In the semantic tradition, a mathematical proof is considered to be a sequence of intuitively acceptable propositions. The crucial fact is that competent mathematicians understand the proofs and accept them: they recognize the assumptions and the steps in the proofs as legitimate. From this point of view, proving theorems is a sequence of intellectual acts and doing mathematics is possible because we have a kind of *intelektuelle Anschauung* of the subject matter. From the formalist point of view, on the other hand, a mathematical proof is a formal construct, where purely formal rules of manipulating strings of symbols are given. The intuitive understanding of the proof by the mathematicians is neither a necessary nor a sufficient condition for the correctness of the proof. From this point of view, the essence of proving theorems is therefore performing formal manipulations rather than intellectual acts.

It is a remarkable fact that mathematical proofs we encounter in everyday practice are precise and rigorous. They are not, however, formalized in the sense of proof theory and look rather quite different from their formal counterparts. Practicing mathematics starts not with setting up formal axioms but rather with informal considerations, looking for motivations, identifying crucial notions, formulating important problems to be solved

etc. It cannot be denied that there is always a (inter)subjective element – as certain rules have to be accepted at the pre-theoretic level and the standards of proofs undergo a steady evolution driven by the changes in our intuitive understanding of the notion of legitimate mathematical argumentation. In particular the problem of the relationship between the formal and the informal elements in mathematical proofs (of the so called "Hilbert's bridge" between the informal proof and its formal counterpart) needs to be explained. This leads to an interesting philosophical discussion.

Formalism has a foundational character – in the sense that it has the ambition of formulating criteria of being an acceptable proof. But the proofs we encounter in mathematical practice are not formalized – and these ordinary, non-formal proofs convey mathematical ideas and provide understanding – in general, they produce new mathematical knowledge. It is hard to imagine that mathematicians (with very few exceptions) would like to formulate their proofs as strings of symbols in a formal system. The strong normative claims of formalism are countered by an antifoundationalist reaction, of which a prominent representative is Lakatos. He devotes much attention to the context of discovery and to the dynamics of mathematical notions – the problem, which cannot be adequately addressed within the formalistic framework. The account given by Lakatos is a good starting point for the discussion concerning the explanatory role of mathematical proofs. The problem of explanation in mathematics is an important notion, which occurs often in informal discussions. Surely, there is something more in our notion of mathematical knowledge than just the existence of a formal proof. Usually, we expect proofs not only to prove theorems but also to e x p l a i n why the mathematical facts obtain. The insights offered by the proof are often much more important than the proven theorem itself. The problem of accounting for the explanatory role of proofs becomes more acute, when we consider computer-assisted proofs as well as hypothetical quantum proofs and hypercomputational procedures.

Another group of problems concerns the empirical elements involved in the process of producing mathematical knowledge. Computer-assisted proofs are a case in point (I consider the proof of the four-color theorem here but the considerations apply to other computer-assisted proofs as well). The use of the computer can be considered to be a kind of a physical experiment which needs to be analyzed. This need becomes even more pressing in the case of (hypothetical) quantum-computer-assisted proofs, where additionally certain philosophical problems concerning quantum mechanics are inherited. The question of the explanatory value of such proofs arises, as we have no (even no theoretical) possibility of obtaining insight into the computation (since performing a measurement would destroy the process). The process is thus not even theoretically surveyable, which makes the situation qualitatively quite new.

I also consider a thought experiment, concerning hypercomputation, where we have at our disposal problem-solving devices, which outperform the Turing machine (by providing answers to uncomputable problems like the halting problem). The discussion concerning these models shows that the empirical ingredient (or: resource) depends on the background physical theory – it is different in the case of classical, quantum or relativistic physics. So, if we made use of such empirical devices then the status of the knowledge obtained would become problematic. Could we still call it *mathematical* knowledge? We would not be able to provide any *mathematical* argument in favor of the mathematical claims justified by the (hypothetical) hypercomputational procedure – we have to rely on a verdict of an "empirical oracle". The knowledge obtained seems rather to be a kind of quasi-empirical knowledge. I think that the most coherent account could be given within a Quine-style quasi-empiricist standpoint. From this point of view, our mathematical knowledge constitutes a part of our web of belief: mathematical claims are justified not by intuitive access but, ultimately, by the analysis of the relationships between mathematics and science.

Some of the models discussed in the book have a purely theoretical (speculative) character. However, they invite us to rethink the traditional concept of mathematical knowledge, the notion of explanation in mathematics and the problem of empirical elements in proofs. The considerations concerning these models offer new arguments in the realism-antirealism debate.

Indeks nazwisk

Indeks rzeczowy

PROGRAM
MONOGRAFIE FUNDACJI NA RZECZ NAUKI POLSKIEJ

W 1994 roku Fundacja na rzecz Nauki Polskiej zainaugurowała publikację serii Monografie FNP, obejmującej swoim zakresem nauki humanistyczne i społeczne.
W serii są wydawane niepublikowane wcześniej prace polskich naukowców, wyłaniane w drodze konkursu.

Nadsyłane na konkurs prace powinny charakteryzować się:
- wysokim poziomem naukowym,
- odkrywczością założeń i wagą wyników,
- oryginalnością ujęcia,
- integralnością tematyki i formy,
- interesującym przedstawieniem tematu, dostępnym dla szerszego grona czytelników.

Fundacja zapewnia Laureatom pokrycie kosztów wydania książki w serii Monografie FNP oraz honorarium.
Konkurs odbywa się w trybie ciągłym. Prace należy składać w Fundacji w dwóch egzemplarzach (wydruk oraz wersja elektroniczna), wraz z wypełnionym wnioskiem.

Od 2011 roku wydawcą serii Monografie FNP jest Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu. Oprócz wersji papierowych książki będą dostępne również w formie e-book. Ponadto tytuły wydane w poprzednich latach będą zamieszczane na stronie internetowej www.fnp.org.pl/monografie w formule Open Access.

Dodatkowe informacje znajdą Państwo na stronach
www.fnp.org.pl
www.fnp.org.pl/monografie

FNP

DOTYCHCZAS W SERII
MONOGRAFIE FNP
UKAZAŁY SIĘ NASTĘPUJĄCE TYTUŁY

1995

Jerzy Michalski, *Sarmacki republikanizm w oczach Francuza. Mably i konfederaci barscy*

Magdalena Micińska, *Między Królem Duchem a mieszczaninem. Obraz bohatera narodowego w piśmiennictwie polskim przełomu XIX i XX wieku (1890–1914)*

Dariusz Słapek, *Gladiatorzy i polityka. Igrzyska w okresie późnej Republiki Rzymskiej*

Maciej Soin, *Filozofia Stanisława Ignacego Witkiewicza*

Wojciech Wrzosek, *Historia – Kultura – Metafora. Powstanie nieklasycznej historiografii*

1996

Jerzy Bobryk, *Akty świadomości i procesy poznawcze*

Teresa Kostkiewiczowa, *Oda w poezji polskiej. Dzieje gatunku*

Józef Maciuszek, *Obraz człowieka w dziele Kępińskiego*

Janusz Ruszkowski, *Adam Mickiewicz i ostatnia krucjata. Studium romantycznego millenaryzmu*

Teresa Rysiewska, *Struktura rodowa w społecznościach pradziejowych*

Katarzyna Stemplewska-Żakowicz, *Osobiste doświadczenie a przekaz społeczny. O dwóch czynnikach rozwoju poznawczego*

Andrzej Szahaj, *Ironia i miłość. Neopragmatyzm Richarda Rorty'ego w kontekście sporu o postmodernizm*

1997

Zbigniew Bokszański, *Stereotypy a kultura*

Andrzej Dziubiński, *Na szlakach Orientu. Handel między Polską a Imperium Osmańskim w XVI–XVIII wieku*

Jan Hartman, *Heurystyka filozoficzna*

Jacek Leociak, *Tekst wobec Zagłady (O relacjach z getta warszawskiego)*

Sławomir Mazurek, *Wątki katastroficzne w myśli rosyjskiej i polskiej 1917–1950*

Jacek Migasiński, *W stronę metafizyki. Nowe tendencje metafizyczne w filozofii francuskiej połowy XX wieku*

Tomasz Mikocki, *Zgodna, pobożna, płodna, skromna, piękna... Propaganda cnót żeńskich w sztuce rzymskiej*

Ryszard Nycz, *Język modernizmu. Prolegomena historycznoliterackie*

Łucja Okulicz-Kozaryn, *Dzieje Prusów*

Józef Piórczyński, *Mistrz Eckhart. Mistyka jako filozofia*

Lucylla Pszczołowska, *Wiersz polski. Zarys historyczny*

Joanna Tokarska-Bakir, *Wyzwolenie przez zmysły. Tybetańskie koncepcje soteriologiczne*

Szymon Wróbel, *Odkrycie nieświadomości. Czy destrukcja kartezjańskiego pojęcia podmiotu poznającego?*

1998

Jacek Banaszkiewicz, *Polskie dzieje bajeczne Mistrza Wincentego Kadłubka*

Jan Doktór, *Śladami Mesjasza-Apostaty*

Alina Motycka, *Nauka a nieświadomość. Filozofia nauki wobec kontekstu tworzenia*

Cezary Wodziński, *Światłocienie zła*

Ryszard Zajączkowski, *„Głos prawdy i sumienie". Kościół w pismach Cypriana Norwida*

Piotr Żbikowski, *„...bólem śmiertelnym ściśnione mam serce..." Rozpacz oświeconych u źródeł przełomu w poezji polskiej w latach 1793–1805*

1999

Łukasz Chimiak, *Gubernatorzy rosyjscy w Królestwie Polskim 1863–1915. Szkic do portretu zbiorowego*

Henryk Domański, *Prestiż*

Marcin Kula, *Anatomia rewolucji narodowej (Boliwia w XX wieku)*

Wojciech Tomasik, *„Inżynieria dusz". Literatura realizmu socjalistycznego w planie „propagandy monumentalnej"*

Michał Tymowski, *Państwa Afryki przedkolonialnej*

Andrzej Wierzbicki, *Historiografia polska doby romantyzmu*

Grzegorz Wołowiec, *Nowocześni w PRL. Przyboś i Sandauer*

2000

Hanna Bojar, *Mniejszości społeczne w państwie i społeczeństwie III Rzeczypospolitej Polskiej*

Bogusława Budrowska, *Macierzyństwo jako punkt zwrotny w życiu kobiety*

Katarzyna Cieślak, *Między Rzymem, Wittenbergą a Genewą. Sztuka Gdańska jako miasta podzielonego wyznaniowo*

Anna Engelking, *Klątwa. Rzecz o ludowej magii słowa*

Agnieszka Fulińska, *Naśladowanie i twórczość. Renesansowe teorie imitacji, emulacji i przekładu*

Grzegorz Grochowski, *Tekstowe hybrydy*

Andrzej Hejmej, *Muzyczność dzieła literackiego*

Gerard Labuda, *Święty Wojciech. Biskup-męczennik, patron Polski, Czech i Węgier*

Lech Leciejewicz, *Nowa postać świata. Narodziny średniowiecznej cywilizacji europejskiej*

Paweł Rodak, *Wizje kultury pokolenia wojennego*

Wojciech Sady, *Spór o racjonalność naukową. Od Poincarégo do Laudana*

Danuta Sosnowska, *Seweryn Goszczyński: biografia duchowa*

Tomasz Stryjek, *Ukraińska idea narodowa okresu międzywojennego*

Przemysław Urbańczyk, *Władza i polityka we wczesnym średniowieczu*

Magdalena Zowczak, *Biblia ludowa. Interpretacje wątków biblijnych w kulturze ludowej*

2001

Andrzej Dąbrówka, *Teatr i sacrum w średniowieczu*

Iwona Massaka, *Eurazjatyzm. Z dziejów rosyjskiego misjonizmu*

Maciej Soin, *Gramatyka i metafizyka. Problem Wittgensteina*

Wojciech Szczerba, *Koncepcja wiecznego powrotu w myśli wczesnochrześcijańskiej*

2002

Henryk Domański, *Polska klasa średnia*

Magdalena Heydel, *Obecność T.S. Eliota w literaturze polskiej*

Kazimierz Kondrat, *Racjonalność i konflikt wierzeń religijnych*

Teresa Kostkiewiczowa, *Polski wiek świateł. Obszary swoistości*

Krzysztof Lewalski, *Kościoły chrześcijańskie w Królestwie Polskim wobec Żydów w latach 1855–1915*

Stanisław Łojek, *Hegel i Nietzsche wobec problemu polityczności*

Tomasz Małyszek, *Romans Freuda i Gradivy. Rozważania o psychoanalizie*

Marek Nalepa, *„Takie życie dziś nasze, gdy Polska ustaje..." Pisarze stanisławowscy a upadek Rzeczypospolitej*

Zbigniew Nerczuk, *Sztuka a prawda. Problem sztuki w dyskusji między Gorgiaszem a Platonem*

Ewa Nowak-Juchacz, *Autonomia jako zasada etyczności. Kant, Fichte, Hegel*

Wawrzyniec Rymkiewicz, *Ktoś i Nikt. Wprowadzenie do lektury Heideggera*

Barbara Szmigielska, *Marzenia senne dzieci*

2003

Wojciech Brojer, *Diabeł w wyobraźni średniowiecznej. Trzynastowieczne exempla kaznodziejskie*

Małgorzata Czarnocka, *Podmiot poznania a nauka*

Adam Fitas, *Głos z labiryntu. O pismach Karola Ludwika Konińskiego*

Maciej Gołąb, *Spór o granice poznania dzieła muzycznego*

Jan Krasicki, *Bóg, człowiek i zło. Studium filozofii Włodzimierza Sołowjowa*

Antoni Mączak, *Nierówna przyjaźń. Układy klientalne w perspektywie historycznej*

2004

Jan Doktór, *Początki chasydyzmu polskiego*

Przemysław Gut, *Leibniz. Myśl filozoficzna w XVII wieku*

Alicja Jarzębska, *Spór o piękno muzyki. Wprowadzenie do kultury muzycznej XX wieku*

Agnieszka Kluba, *Autoteliczność – referencyjność – niewyrażalność. O nowoczesnej poezji polskiej (1918–1939)*

Katarzyna Kuczyńska-Koschany, *Rilke poetów polskich*

Franciszek Longchamps de Bérier, *Nadużycie prawa w świetle rzymskiego prawa prywatnego*

Maciej Mycielski, *„Miasto ma mieszkańców, wieś obywateli". Kajetana Koźmiana koncepcje wspólnoty politycznej*

Krzysztof Nawotka, *Aleksander Wielki*

Dorota Pietrzyk-Reeves, *Idea społeczeństwa obywatelskiego. Współczesna debata i jej źródła*

Jan Pisuliński, *Nie tylko Petlura. Kwestia ukraińska w polskiej polityce zagranicznej w latach 1918–1923*

Radosław Sojak, *Paradoks antropologiczny. Socjologia wiedzy jako perspektywa ogólnej teorii społeczeństwa*

Tomasz Szlendak, *Supermarketyzacja. Religia i obyczaje seksualne młodzieży w kulturze konsumpcyjnej*

Przemysław Urbańczyk, *Zdobywcy północnego Atlantyku*

2005

Andrzej Dziubiński, *Stosunki dyplomatyczne polsko-tureckie w latach 1500–1572 w kontekście międzynarodowym*

Magdalena Górska, *Polonia – Respublica – Patria. Personifikacja Polski w sztuce XVI–XVIII wieku*

Roman Michałowski, *Zjazd gnieźnieński. Religijne przesłanki powstania arcybiskupstwa gnieźnieńskiego*

Jerzy Rohoziński, *Święci, biczownicy i czerwoni chanowie. Przemiany religijności muzułmańskiej w radzieckim i poradzieckim Azerbejdżanie*

Krzysztof Skwierczyński, *Recepcja idei gregoriańskich w Polsce do początku XIII wieku*

2006

Nikodem Bończa Tomaszewski, *Źródła narodowości. Powstanie i rozwój polskiej świadomości w II połowie XIX i na początku XX wieku*

Sławomir Buryła, *Opisać Zagładę. Holocaust w twórczości Henryka Grynberga*

Zbigniew Kloch, *Odmiany dyskursu. Semiotyka życia publicznego w Polsce po 1989 roku*

Sebastian Tomasz Kołodziejczyk, *Granice pojęciowe metafizyki*

Rafał Koschany, *Przypadek. Kategoria egzystencjalna i artystyczna w literaturze i filmie*

Józef Piórczyński, *Pierwszy egzystencjalista. Filozofia absolutnej skończoności Fryderyka Jacobiego*

Maciej Płaza, *O poznaniu w twórczości Stanisława Lema*

Małgorzata Puchalska-Wasyl, *Nasze wewnętrzne dialogi. O dialogowości jako sposobie funkcjonowania człowieka*

Justyna Straczuk, *Cmentarz i stół. Pogranicze prawosławno-katolickie w Polsce i na Białorusi*

Stanisław Zapaśnik, *„Walczący islam" w Azji Centralnej. Problem społecznej genezy zjawiska*

2007

Katarzyna Filutowska, *System i opowieść. Filozofia narracyjna w myśli F. W. J. Schellinga w latach 1800–1811*

Jakub Kloc-Konkołowicz, *Rozum praktyczny w filozofii Kanta i Fichtego. Prymat praktyczności w klasycznej myśli niemieckiej*

Barbara Krawcowicz, *William James. Pragmatyzm i religia*

Paweł Majewski, *Między zwierzęciem a maszyną. Utopia technologiczna Stanisława Lema*

Teresa Michałowska, *Średniowieczna teoria literatury w Polsce. Rekonesans*

Małgorzata Mikołajczak, *Pomiędzy końcem i apokalipsą. O wyobraźni poetyckiej Zbigniewa Herberta*

Aneta Pieniądz, *Tradycja i władza. Królestwo Włoch pod panowaniem Karolingów, 774–875*

Wojciech Tomasik, *Ikona nowoczesności. Kolej w literaturze polskiej*

Piotr Żbikowski, *W pierwszych latach narodowej niewoli. Schyłek polskiego Oświecenia i zwiastuny romantyzmu*

2008

Grażyna Jurkowlaniec, *Epoka nowożytna wobec średniowiecza. Pamiątki przeszłości, cudowne wizerunki, dzieła sztuki*

Halina Manikowska, *Jerozolima – Rzym – Compostela. Wielkie pielgrzymowanie u schyłku średniowiecza*

Maciej Potz, *Granice wolności religijnej w państwie demokratycznym. Kwestie wolności sumienia i wyznania oraz stosunek państwa do religii w Stanach Zjednoczonych Ameryki w latach 90. XX wieku*

Beata Śniecikowska, *„Nuż w uhu"? Koncepcje dźwięku w poezji polskiego futuryzmu*

Przemysław Urbańczyk, *Trudne początki Polski*

2009

Weronika Chańska, *Nieszczęsny dar życia. Filozofia i etyka jakości życia w medycynie współczesnej*

Jacek Gądecki, *Za murami. Krytyczna analiza dyskursu na temat osiedli grodzonych w Polsce*

Maciej Gorczyński, *Prace u podstaw. Polska teoria literatury w latach 1913–1939*

Krzysztof Jaskułowski, *Nacjonalizm bez narodów. Nacjonalizm w koncepcjach anglosaskich nauk społecznych*

Justyna Kowalska-Leder, *Doświadczenie Zagłady z perspektywy dziecka w polskiej literaturze dokumentu osobistego*

Stanisław Łojek, *Megalopsychokracja. O cnocie w polityce i polityce cnoty (Od Homera do Arendt i Straussa)*

Grzegorz Myśliwski, *Wrocław w przestrzeni gospodarczej Europy (XIII–XV wiek). Centrum czy peryferie?*

Robert Poczobut, *Między redukcją a emergencją. Spór o miejsce umysłu w świecie fizycznym*

Artur Przybysławski, *Buddyjska filozofia pustki*

Tadeusz Szubka, *Filozofia analityczna. Koncepcje, metody, ograniczenia*

Tomasz Tiuryn, *Boecjusz i problem uniwersaliów*

Marcin Trzęsiok, *Pieśni drzemią w każdej rzeczy. Muzyka i estetyka wczesnego romantyzmu niemieckiego*

Adam Workowski, *Ontologiczne podstawy posiadania*

Paweł Żmudzki, *Władca i wojownicy. Narracje o wodzach, drużynie i wojnach w najdawniejszej historiografii Polski i Rusi*

FNP

2010

Piotr Celiński, *Interfejsy. Cyfrowe technologie w komunikowaniu*

Anna Dziedzic, *Antropologia filozoficzna Edwarda Abramowskiego*

Piotr Filipkowski, *Historia mówiona i wojna. Doświadczenie obozu koncentracyjnego w perspektywie narracji biograficznych*

Krzysztof Hubaczek, *Bóg a zło. Problematyka teodycealna w filozofii analitycznej*

Monika Małek, *Liberalizm etyczny Johna Stuarta Milla. Współczesne ujęcia u Johna Graya i Petera Singera*

Ireneusz Piekarski, *Z ciemności. O twórczości Juliana Stryjkowskiego*

Marek Słoń, *Miasta podwójne i wielokrotne w średniowiecznej Europie*

Jan Wasiewicz, *Oblicza nicości. Z dziejów nihilizmu europejskiego w XIX wieku*

2011

Wojciech Bałus, *Gotyk bez Boga? W kręgu znaczeń symbolicznych architektury sakralnej XIX wieku*

Natalia Bloch, *Urodzeni uchodźcy. Tożsamość diasporyczna pokolenia młodych Tybetańczyków w Indiach*

Mirosława Buchholtz, *Henry James i sztuka auto/biografii*

Paweł Gancarczyk, *Muzyka wobec rewolucji druku. Przemiany w kulturze muzycznej XVI wieku*

Bartosz Kuźniarz, *Goodbye Mr. Postmodernism. Teorie społeczne myślicieli późnej lewicy*

Monika Murawska, *Filozofowanie z zamkniętymi oczami. Fenomenologia ciała Michela Henry'ego*

FNP

Roman Murawski, *Filozofia matematyki i logiki w Polsce międzywojennej*

Andrzej Wypustek, *Bogowie, herosi i wybrańcy: studia nad wizerunkiem zmarłych w greckich epigramatach nagrobnych w epoce hellenistycznej i grecko-rzymskiej*

Radosław Zenderowski, *Religia a tożsamość narodowa i nacjonalizm w Europie Środkowo-Wschodniej. Między etnicyzacją religii a sakralizacją etnosu (narodu)*

Dorota Zygmuntowicz, *Praktyka polityczna. Od „Państwa" do „Praw" Platona*

2012

Tamara Brzostowska-Tereszkiewicz, *Ewolucje teorii. Biologizm w modernistycznym literaturoznawstwie rosyjskim*

Anna Markowska, *Dwa przełomy. Sztuka polska po 1955 i 1989 roku*

Magdalena Rembowska-Płuciennik, *Poetyka intersubiektywności. Kognitywistyczna teoria narracji a proza XX wieku*

Tadeusz Szubka, *Neopragmatyzm*

Paweł Załęski, *Neoliberalizm i społeczeństwo obywatelskie*

W PRZYGOTOWANIU

Łukasz Afeltowicz, *Laboratoria, instrumenty i kolektywy badawcze: praktyka naukowa w perspektywie usytuowanego i rozproszonego poznania*

Anna Engelking, *Kołchoźnicy. Antropologiczne studium tożsamości wsi białoruskiej przełomu XX i XXI wieku*

Janusz Grygieńć, *„Wola powszechna" w nowożytnej i współczesnej myśli politycznej*

Iwona Krupecka, *Filozoficzny kichotyzm Pokolenia '98. O idei podmiotu w myśli hiszpańskiej przełomu XIX i XX wieku*

Michał Łuczewski, *Wieczny naród. Naród i religia w Żmiącej. Wprowadzenie do integralnej teorii narodu*

Łukasz Niesiołowski-Spanò, *Dziedzictwo Goliata. Filistyni i Hebrajczycy oraz ich wzajemne relacje*

Grzegorz Pac, *Rola społeczna żon i córek w dynastii piastowskiej do połowy XII wieku. Studium porównawcze*

FNP