FILOZOFIA MATEMATYKI I LOGIKI
W POLSCE MIĘDZYWOJENNEJ

MONOGRAFIE
FUNDACJI NA RZECZ NAUKI POLSKIEJ

FUNDACJA NA RZECZ NAUKI POLSKIEJ

Roman Murawski

FILOZOFIA MATEMATYKI I LOGIKI W POLSCE MIĘDZYWOJENNEJ

TORUŃ 2011

Książka uzyskała wyróżnienie w programie Monografie FNP.
Wydanie książki subwencjonowane przez
Fundację na rzecz Nauki Polskiej

Redaktor tomu
Elżbieta Kossarzecka

Korekty
Agnieszka Markuszewska

Projekt okładki i obwoluty
Barbara Kaczmarek

Printed in Poland

eISBN 978-83-231-6003-8
https://doi.org/10.12775/978-83-231-6003-8

WYDAWNICTWO NAUKOWE
UNIWERSYTETU MIKOŁAJA KOPERNIKA
Redakcja: ul. Gagarina 5, 87-100 Toruń
tel. +48 56 611 42 95, fax +48 56 611 47 05
e-mail: wydawnictwo@umk.pl
Dystrybucja: ul. Reja 25, 87-100 Toruń
tel./fax: +48 56 611 42 38, e-mail: books@umk.pl

www.wydawnictwoumk.pl

Wydanie pierwsze

Hani i Zosi

Spis treści

Wstęp

Celem niniejszej książki jest prezentacja i analiza koncepcji filozoficznych dotyczących matematyki i logiki formułowanych przez polskich logików, matematyków i filozofów w okresie międzywojennym. Dlaczego ten właśnie okres? Otóż był to czas szczególny w historii nauki polskiej, zwłaszcza w historii polskiej logiki i matematyki. Wtedy to powstały i rozwinęły się lwowsko-warszawska szkoła filozoficzna i związana z nią warszawska szkoła logiczna oraz polska szkoła matematyczna, które wyznaczyły kierunek rozwoju matematyki i logiki, a także filozofii (zwłaszcza filozofii analitycznej) na długie lata, a prowadzone w nich badania i uzyskane wyniki zyskały światowy rozgłos i należą do najważniejszych osiągnięć w poszczególnych dziedzinach. Dlatego warto zadać pytanie, czy temu rozwojowi logiki i matematyki towarzyszyła, i w jakim stopniu, refleksja filozoficzna. W szczególności warto sformułować następujące pytania: (1) czy badania w zakresie matematyki i logiki prowadzone w Polsce w okresie międzywojennym były powiązane z jakimiś koncepcjami filozoficznymi, dokładniej metodologicznymi czy ogólniej epistemologicznymi, dotyczącymi matematyki i logiki, czy u ich źródeł leżały jakieś motywacje i przekonania filozoficzne, czy też były to dziedziny autonomiczne; (2) jeśli były to dziedziny autonomiczne, to jakie były „prywatne" preferencje filozoficzne ich twórców i dlaczego nie wywierały one żadnego wpływu na same badania w zakresie logiki i matematyki; (3) jeśli zaś badania logiczne i matematyczne bazowały na pewnych założeniach natury filozoficznej, to na jakich; (4) czy ścisła współpraca filozofów z matematykami i logikami w okresie międzywojennym w Polsce (a miała ona także wymiar instytucjonalny, a nie tylko osobisty i prywatny) nie wymuszała zainteresowania się tych drugich kwestiami filozoficznymi; (5) czy osiągnięcia i wyniki w zakresie matematyki, a zwłaszcza logiki stanowiły punkt wyjścia do formułowania jakichś koncepcji filozoficznych dotyczących tych dziedzin; (6) czy powstały w Polsce jakieś oryginalne koncepcje w zakresie filozofii matematyki i logiki; (7) jaki był stosunek logików i matematyków oraz filozofów polskich do stworzonych i intensywnie rozwijanych na świecie w pierwszej połowie XX wieku koncepcji w zakresie filozofii matematyki i logiki, a mianowicie logicyzmu, intuicjonizmu i formalizmu.

Na tego typu pytania będziemy poszukiwali odpowiedzi w niniejszej książce. Uczynimy to, poddając analizie zarówno wypowiedzi o charakterze filozoficznym, jak i praktykę badawczą wybitnych polskich matematyków i logików okresu międzywojennego. Spośród możliwych metod prezentacji wybraliśmy sposób według osób, a więc podmiotowy – nie zapominając o wpływach, w szczególności środowiskowych czy instytucjonalnych, jakim podlegali. W celu pewnej systematyzacji i uporządkowania naszych analiz zdecydowaliśmy się na podzielenie rozważanych uczonych na następujące grupy: polska szkoła matematyczna obejmująca ośrodek warszawski i ośrodek lwowski (omawiana w rozdziale 2), lwowsko-warszawska szkoła filozoficzna i związana z nią warszawska szkoła logiczna (poświęcamy im rozdział 3) oraz grupa, którą nazwaliśmy (umownie) ośrodkiem krakowskim (omawiamy ją w rozdziale 4).

Podział taki nie rozwiązuje wszystkich problemów związanych z usytuowaniem poszczególnych uczonych. W szczególności pojawia się pytanie, w której z tych grup umieścić Leona Chwistka i Zygmunta Zawirskiego. Pierwszy z nich pracował najpierw w Krakowie, potem we Lwowie, natomiast drugi zaczął we Lwowie, potem był w Poznaniu, a na koniec (w roku 1937) został profesorem w Krakowie. Ponieważ Zawirski był cały czas związany ze szkołą lwowsko-warszawską, zdecydowaliśmy się umieścić go w rozdziale 3. Jeśli chodzi o Chwistka, to umieszczamy go w rozdziale 2, we fragmencie poświęconym lwowskiej szkole matematycznej. Formalnie Chwistek należał do tej szkoły (był profesorem logiki matematycznej na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Uniwersytetu Jana Kazimierza), aczkolwiek styl jego pracy był nieco odmienny od reszty matematyków lwowskich. Wyrósł wprawdzie ze środowiska krakowskiego i tu zaczynał swą pracę naukową, jednak swoje koncepcje rozwinął właśnie we Lwowie i tu starał się stworzyć szkołę.

Choć przed okresem międzywojennym nie było właściwie w nauce polskiej istotniejszej refleksji filozoficznej nad matematyką i logiką, to chcąc ukazać tło, na jakim powstawały koncepcje międzywojenne, omawiamy w rozdziale 1 idee filozoficzne związane z matematyką i logiką czterech uczonych, którzy działali w okresie od XVIII do początków XX wieku, a mianowicie Jana Śniadeckiego, Józefa Marii Hoene-Wrońskiego, Samuela Dicksteina i Edwarda Stamma.

Do książki dołączamy krótkie biogramy omawianych uczonych – powinny one przybliżyć postaci, których poglądy analizujemy, i pokazać kontekst (także instytucjonalny), w jakim działały.

Rozważając poglądy poszczególnych osób, dokumentujemy nasze stwierdzenia i tezy, cytując obficie oryginalne prace. Żadne omówienia nie zastąpią bowiem słów autora, najlepiej oddających jego poglądy (a przy okazji ilustrujących sposób formułowania myśli i argumentowania). Z drugiej strony cytaty pochodzą na ogół z prac trudno dostępnych – mogą więc w jakimś sensie zastąpić nieistniejącą antologię tekstów filozoficznych polskich logików i matematyków okresu międzywojennego. W przypadku cytatów z tekstów obcojęzycznych, podajemy tłumaczenie polskie, ale zawsze (w przypisie) przytaczamy też tekst oryginalny, wychodząc z założenia, że żaden przekład nie jest w stanie oddać wszystkich subtelności oryginału. Ponieważ rozważane teksty pochodzą z dość odległego okresu, a od tego czasu zasady ortografii polskiej ulegały wielokrotnie zmianom, uwspółcześniliśmy pisownię tak, by teksty były zrozumiałe dla dzisiejszego czytelnika, ale zachowały jednocześnie smaczek dawnej polszczyzny (nie zmienialiśmy oczywiście pisowni tytułów).

Książka powstała w ramach subsydium profesorskiego Fundacji na rzecz Nauki Polskiej.

ROZDZIAŁ 1

Poprzednicy

Przed okresem międzywojennym nie było właściwie w nauce polskiej poważniejszej refleksji filozoficznej nad matematyką i logiką. Nie znaczy to oczywiście, że koncepcje filozoficzne dotyczące matematyki i logiki rozwijane w Polsce międzywojennej – będące głównym tematem tej książki – powstały w próżni intelektualnej, że wcześniej nie było tu żadnej refleksji nad matematyką i logiką. Wspomnimy więc o czterech postaciach, które wywarły pewien – każda z nich zupełnie różny – wpływ na późniejszy rozwój interesujących nas koncepcji, a mianowicie o działających na przełomie wieków XVIII i XIX – Janie Śniadeckim i Józefie Marii Hoene-Wrońskim, oraz Samuelu Dicksteinie i Edwardzie Stammie z przełomu XIX i XX wieku, a więc bliższych okresowi międzywojennemu[1].

1. Jan Śniadecki

Rozważając poglądy filozoficzne Jana Śniadeckiego na matematykę, musimy wyjść od stwierdzenia, że był on zwolennikiem empiryzmu. Głosił, że matematyka jest nauką o otaczającej nas rzeczywistości i że źródłem tej nauki jest doświadczenie. W *Rozprawie o nauk matematycznych początku, znaczeniu i wpływie na oświecenie powszechne* (1781) pisał:

> Nie mówię ja, aby najoderwańsze rozumu prawdy nie brały swego początku ze skutków o zmysły bijących: ale te prawdy umysł swoim

---

[1] Można by do tej listy dodać jeszcze Władysława Gosiewskiego, który pisał m.in. o rachunku prawdopodobieństwa, chcąc uczynić z niego niejako uniwersalne narzędzie teorii matematycznej zjawisk fizycznych. Por. Gosiewski (1904), (1906), (1909a), (1909b).

> działaniem tak potrafił od swych pierwiastków oddalić, iż zostawiwszy je tylko przy najodleglejszych własnościach, nie przywiązał ich do żadnych szczególniejszych przyrodzenia wypadków, ale tylko do własnej swej w działaniu prawości. Takim była obiektem wielkość, własność rozrzucona po całej naturze, oderwana rozumem od wszystkich gatunków rzeczy, zostawiona jedynie przy istotnym swym piętnie, które zależy na sposobności powiększania się lub zmniejszania (1837–1839, t. 3, s. 172).

I dalej:

> Pierwsze grunta matematyki są pewne przypuszczenia, definicje jasne i nieomylne, które nic innego nie są tylko skutki wielkości wyciągnione z natury i do najodleglejszej wyniesione ogólności (1837–1839, t. 3, s. 173).

Dzięki temu matematyka nadaje się do opisu rzeczywistości fizycznej – czyni to dział matematyki zwany matematyką stosowaną. Obiekty matematyki nie są jednak nigdy tożsame z obiektami świata rzeczywistego. W *Rozprawie* Śniadecki pisze:

> Wszystkie prawdy fizyczne zbliżają się zawsze do prawd obrazów matematycznych, ale ich nigdy nie mogą dosiądz, co się językiem geometrów wyraża, że prawdy fizyczne mają za granicę te prawdy, które geometria początkowa roztrząsa, tak jako wszystkie prawdy geometrii elementarnej są granicami prawd geometrii wyższej [...] (1837–1839, t. 3, s. 179).

Abstrakcja służy wydobyciu istotnych cech wspólnych różnym zjawiskom, a nie oderwaniu nauki od rzeczywistości.

Śniadecki przywiązywał dużą wagę do języka symbolicznego matematyki. Posługiwanie się nim to, jego zdaniem, jedna z cech, które odróżniają matematykę mu współczesną od matematyki dawniejszej, w szczególności starożytnej. W pracy *O rozumowaniu rachunkowym* (1818) pisał, że „[C]ała więc różnica między nauką starożytnych a nauką dzisiejszą zależy na języku" (1837–1839, t. 4, s. 244). W stosowaniu języka symbolicznego widzi trzy reguły: (1) „rzeczy nieznane tak uważać jak znane i jedne z drugimi równać, stosować i wiązać"; (2) „rozumowanie i jego wypadki wystawić w znakach ogólnych i zrobić je widzialne w wyrazach zwięzłych i krótkich"; oraz (3) „rzeczy nieznane oddzielić od znanych i pierwsze wyrazić przez ostatnie" (1837–1839, t. 4, s. 244). Język symboliczny powinien być ogólny, zwięzły i wspomagać pamięć. Wzory i symbole winny być jednak tylko narzędziem wspomagającym rozum i – mimo że mają jakąś siłę magiczną – nie mogą żyć własnym życiem. W *Rozprawie o nauk matematycznych początku* pisał obrazowo (por. 1837–1839, t. 3, s. 176):

> Wielu dziś wyrzuca geometrom tę nieprzyzwoitość w rachunku, że przy nim rozum ludzki w swych działaniach gnuśnieje; zaprzątniony bowiem *symbolicznym* wyrazem myśli i *mechaniczną* ich *kombinacją*, przestaje rozumować i zastanawiać się nad prawdziwym ich związkiem. Ten zarzut razi tylko owych prostych rachmistrzów, którzy wziąwszy ostatnie wielkich teorii i refleksji wypadki i reguły używają ich bez żadnego myślenia, bez wiadomości ich początków, a przeto w zupełnej bezczynności ich umysłu; ale geometra i ten, który sobie zasłużyć może na imię prawdziwie uczonego w matematyce, zna zawsze całą metafizykę swego działania: jeżeli przechodzi z jednej prawdy do drugiej, widzi całą teorię i idzie za pasmem głębokich stosunków i związków. Rachunek na papierze wypisany jest to już skutkiem najoczywistszej jego myśli, najpewniejszych rozumowań, które on u siebie uczynił i związał.

Symbolika, „rachunek, czyli sposób wyrażania *symbolicznie* wielu myśli i *kombinacji*" (1781, por. 1837–1839, t. 3, s. 174) ma jedynie ułatwić dostrzeżenie związków pomiędzy stwierdzeniami i „łączyć jedną prawdę z drugą" (por. 1837–1839, t. 3, s. 173), ma być zewnętrznym przejawem prawd głębszych i winna prowadzić do ich odkrywania. W pracy *O rozumowaniu rachunkowym* (1818) pisał, że „szczęśliwie przez talent wprowadzony wyraz [...] w języku matematycznym stać się może albo wielkim ułatwieniem nauki, albo sztuką dochodzenia prawdy i źródłem ważnych wynalazków" (1837–1839, t. 4, s. 243).

Śniadecki uważa, że w matematyce mamy do czynienia z dwoma metodami: nazywa je syntetycznymi oraz analitycznymi i charakteryzuje w rozprawie *O rozumowaniu rachunkowym* następująco:

> Dowodząc więc jakiej prawdy albo rozwiązując jakie pytania przez rysunek figur, postępujemy w matematyce sposobem syntetycznym. Choćbyśmy nawet znaków algebraicznych użyli, ale gdy te znaki nic więcej nie robią tylko skracają mowę pospolitą, sposób nie przestaje być syntetyczny. Jeśli zaś do dowiedzenia jakiej prawdy lub do rozwiązania jakiego pytania używamy liter i znaków ogólnych i z rozumowania nad tymi literami, z ich algorytmu, wyciągamy wnioski, postępujemy w matematyce sposobem analitycznym. [...] Zgoła są to dwie drogi objawiającego się swym działaniem rozumu (1837–1839, t. 4, s. 245–246).

Używanie symboli nie powinno przesłaniać faktu, że w matematyce istotne są nie tyle algorytmy i metody rachunkowe, ale związki logiczne. Zdaniem Śniadeckiego matematyk nie „jest to ów rzemieślnik, który w składaniu jakiej *machiny* ma jedynie baczność na reguły", ale „jest owych dzieł mistrzem, którego w układaniu podobnej *machiny* prowadzą albo utworzone przez niego przepisy, albo te wszystkie *kombinacje* i myśli" (1781, por. 1837–1839, t. 3, s. 176).

Śniadecki doceniał rolę i znaczenie nowej naówczas dyscypliny matematycznej, jaką był rachunek prawdopodobieństwa nazywany przez niego „rachunkiem losów" albo „rachunkiem chybi-trafi". Uważał, że jest to ważna, choć „ledwo nie najtrudniejsza część matematyki stosowanej i przez subtelność myśli, której wyciąga [tzn. wymaga – uwaga moja, R.M.] i przez głębokość wysokich i trudnych rachunków, do których prowadzi". Zdawał sobie sprawę z tego, jak wiele „należy się spodziewać od rachunku losów przystosowanego do innych nauk".

Śniadecki przyczynił się też w dużym stopniu do stworzenia polskiej terminologii matematycznej. Uważał, że język matematyki jest to – jak pisał w pracy *O języku narodowym w matematyce* (1813) – „język dla oka; potrzeba nam jeszcze języka dla ucha, na tłumaczenie tych nauk ustnie i na piśmie, a zatem wyrazów i nazwisk z języka narodowego" (1837–1839, t. 3, s. 195). Twierdził, że „język matematyki, tak jak każdej innej nauki, zbliżać się powinien, ile można, do języka pospolitego" (1837–1839, t. 3, s. 195). Wykładał więc – często wbrew ówczesnym zwyczajom – po polsku. Zaproponował też wiele rodzimych terminów, m.in. „całka" i „różniczka" – a dokładniej, Śniadecki mówił „całkość" i „różnicowanie", czy utworzone przez niego lub przy-stosowane słowa, takie jak: pochodna, funkcja pierwotna, całkowanie przez części, średnica, ognisko i inne. Jednak niektóre zaproponowane przez niego terminy nie przyjęły się. Należą do nich na przykład nazwy funkcji trygonometrycznych: „wstawa" (sinus), „dostyczna" (cotangens), „ledwoniestyczna" (asymptota), „ostrokrąg" (stożek).

Na zakończenie uwag o ideach filozoficznych Śniadeckiego, związanych z matematyką, należy powiedzieć, że postrzegał on ją jako jedną z najważniejszych nauk, jeden z najważniejszych przejawów ducha ludzkiego. W uwagach dotyczących recenzji swojej *Trygonometrii kulistej analitycznie wyłożonej* (1817) pióra Józefa Twardowskiego ogłoszonej w *Pamiętniku Warszawskim* pisał:

> Matematyka jest to królowa wszystkich nauk, jej oblubieńcem jest prawda, a prostość i oczywistość jej strojem. Ale przybytek tej monarchini jest obsadzony cierniem, po którym przechodzić trzeba. Nie ma on powabu – tylko dla umysłów zamiłowanych w prawdzie i lubiących walczyć z trudnościami. Co także pokazuje niepospolitą i wyższego rzędu skłonność człowieka do zawiłych zaiste, ale trwałych i wyniosłych rozkoszy umysłowych, wzmacniających naturę ludzką.
>
> Matematyka, która tyle zrobiła przysług towarzystwu, naukom i sztukom, stanie się jeszcze wodzem ludzkiego umysłu we wszystkich poznawaniach.

W rozprawie zaś *O rozumowaniu rachunkowym* (1818) napisał:

> Wzrost matematyki jest wielki i nigdy się nie kończący. Jest ona tylko sama prawdziwą umiejętnością, bo samowładnie panuje nad całą krainą poznawań ludzkich. Jej bowiem wszystkie prawie nauki potrzebują, a ona żadnej, jak to dobrze powiedział Jan Bernoulli: *Omnes scientiae mathesi indigent, mathesis nulla, sed sola sibi sufficit* (1837–1839, t. 4, s. 249).

2. Józef Maria Hoene-Wroński

Przejdźmy teraz do drugiej rozważanej w tym rozdziale postaci, czyli do Józefa Marii Hoene-Wrońskiego. Filozofię matematyki tego uczonego należy rozpatrywać w powiązaniu z całą jego refleksją filozoficzną. Jego filozofię zalicza się do filozofii mesjanistycznej – Wroński był w pewnym sensie prekursorem polskich mesjanistów. Jego filozofia powstawała pod wpływem głównie myślicieli niemieckich, takich jak Kant, Schelling i Hegel.

Cechą wspólną mesjanistów polskich (do których należy również zaliczyć Bronisława Trentowskiego, Józefa Gołuchowskiego, Augusta hr. Cieszkowskiego, Karola Libelta, Józefa Kremera) było zainteresowanie metafizyką, przy czym miała ona u nich charakter spirytualistyczny – a nie idealistyczny, jak to było w idealizmie niemieckim. Cechowało ją teistyczne przekonanie o istnieniu Boga osobowego, o wieczności duszy, o bezwzględnej przewadze sił duchowych nad cielesnymi. Przed filozofią stawiali oni cele nie tylko poznawcze, ale także reformatorskie, ba, nawet w pewnym sensie soteriologiczne. Powołaniem bowiem filozofii miało być nie tylko poznanie prawdy, ale przeprowadzenie reformy życia, wybawienie ludzkości. Wierzyli w metafizyczne znaczenie narodu, przy tym przypisywali szczególne znaczenie i zadanie narodowi polskiemu – mianowicie bycie Mesjaszem.

Nie będziemy tu zgłębiali szczegółów systemu filozoficznego Wrońskiego[2], podkreślmy tylko, że cała matematyka Wrońskiego wyrastała z jego koncepcji filozoficznych, co więcej, była im podporządkowana. Naczelnym celem uczonego była reforma dotychczasowej matematyki przez wyprowadzenie jej z pewnych podstawowych zasad i praw, w szczególności z tzw. prawa tworzenia.

Zasadnicze swoje koncepcje Wroński wyłożył w książce *Introduction à philosophie des mathématiques et technie d'algorithmie* (1811) – przekład polski *Wstęp do filozofii matematyki oraz technia algorytmii* ukazał się w 1937 roku. W matematyce wyodrębnił dwie dziedziny – algorytmię i geometrię. Algorytmia dzieli się z kolei na naukę o prawach liczb (algebra) i naukę o faktach liczb (arytmetyka). Prawa rozciągłości są przedmiotem geometrii ogólnej, fakty rozciągłości zaś – geometrii szczególnej. Zadaniem teorii algoryt-

---

[2] Piszemy o tym na przykład w pracy „System filozoficzny Hoene-Wrońskiego" (2008). Zob. też Murawski (2006).

mii jest określenie natury wszystkich „algorytmów elementarnych" oraz ich wzajemnego wpływu i powiązania, tzn. algorytmów systematycznych.

Plany reformy całej matematyki w duchu propagowanej przez siebie filozofii Wroński wyłożył w pracy *A Course of Mathematics* (1821) – tłumaczenie polskie *Wstęp do wykładu matematyki* ukazało się w 1880 roku[3]. Dziełko to miało zaznajomić z jego planami szerszą publiczność. Według Wrońskiego cała wiedza pozytywna opiera się na matematyce lub co najmniej z matematyki korzysta. W dotychczasowych dziejach tej nauki Hoene-Wroński wyróżnił cztery okresy. Do pierwszego z nich zalicza czas, gdy matematykę uprawiano *in concreto*, tzn. kiedy nie potrafiono abstrahować od rzeczywistości materialnej, matematyka miała charakter jedynie praktyczny. Tak było w starożytnym Egipcie i starożytnej Babilonii. Okres drugi to okres matematyki greckiej. Wyróżnia go stosowanie abstrakcji. Zdaniem Wrońskiego prawdy matematyczne „stanowiły tylko szczegółowe fakta [wypadki], i nie dosięgły jeszcze znamienia prawd ogólnych". Okres trzeci to czasy od Cardana i Fermata do Keplera i Wallisa. Wówczas pojawiały się już prawdy ogólne, „ale plony otrzymane w tym nowym okresie, lubo nader ogólne, stanowiły jednak same odrębne prawdy, czyli, pod pewnym względem *indywidualne* [samosobne] matematyczne *produkta* [uzbiory]". Znaleziono na przykład wzory na pierwiastki równań trzeciego i czwartego stopnia, „ale żadnego wyobrażenia nie miano o uniwersalnej generacji tych pierwiastków odpowiednich, a nawet ani o tym, co dzisiaj zowią ich rozwinięciem w szereg". Czwarty okres wyróżniony przez Hoene-Wrońskiego rozpoczyna się od Newtona i Leibniza. Powstały wtedy metody, które pozwalają na stosowanie matematyki „do wszyst-

---

[3] Jako ciekawostkę warto tu podać, że w polskim przekładzie znajdujemy przykład modnej naówczas tendencji do zastępowania wszelkich, nawet tych uświęconych tradycją, terminów naukowych pochodzenia obcego terminami polskimi, które sztucznie wymyślano. I tak na przykład zamiast słowa „logika" używa się terminu „słoworząd", zamiast „teologia" – „bożoznawstwo", zamiast „psychologia" – „duszoumnia", zamiast „ontologia" – „jistwoznawstwo", zamiast „geometria" – „ziemiomiernictwo", zamiast „mechanika" – „rozsilnia", zamiast „statyka" – „równoważnia", zamiast „dynamika" – „siłorządnia" itd.

kich objawów przyrodzenia". Cechą charakterystyczną tego okresu jest użycie szeregów, które są – zdaniem uczonego – jedynym jak dotąd narzędziem powszechnym.

We wszystkich opisanych okresach podstawę stanowiły zasady względne. Matematyka jednak winna opierać się na zasadach bezwzględnych. Stąd płynęła zapowiedź nowego okresu rozwoju matematyki. Jego podstawą miała być proponowana przez Wrońskiego reforma. Miała ona polegać na podziale matematyki na teorię i technię. Wszystkie prawdy matematyczne powinny zostać wyprowadzone z jednego jedynego prawa najwyższego, dzięki czemu zyskają one pewność bezwzględną. Znaczenie tego faktu podkreśla Hoene-Wroński, pisząc:

> Nie możemy lepiej ocenić tej przewzniosłej funkcji Matematyki, jeno wyznawając, że absolutna jej cecha, *przewidoczność*, jest rodzajem boskiego objawu. I, w tym pojęciu, dobrodziejstwo takowe podarek twórczy staje tuż obok Boskiego objawienia prawd religijnych.

Pomysły Hoene-Wrońskiego dotyczące matematyki nie spotkały się z szerokim zainteresowaniem. Powodem tego była ich niejasność i nieprecyzyjny, mętny w istocie język, w którym były wyrażane. Dlatego też – mimo że Wroński był człowiekiem wybitnym, erudytą władającym kilkunastoma językami – jego dzieła nie stały się przedmiotem studiów matematyków i filozofów matematyki[4]. Zajęli się nią jedynie okultyści – choć sam Wroński zdecydowanie się od nich odcinał – oraz ludzie nietrudniący się filozofią zawodowo[5]. Nie skupił też wokół siebie grona zwolenników i uczniów, pozostając tym samym przez całe życie osamotnionym.

---

4 Warto tu powiedzieć, że Hoene-Wrońskim zainteresował się Samuel Dickstein – matematyk, historyk matematyki i pedagog, o którym mówimy poniżej. Otóż Dickstein skatalogował i scharakteryzował zbiór pism Hoene-Wrońskiego znajdujący się w Bibliotece Kórnickiej. Dokonał tego w książce *Katalog dzieł i rękopisów Hoene-Wrońskiego* (1896b). Był także autorem pracy *Hoene--Wroński. Jego życie i prace* (1896a).

5 Zob. w tej sprawie na przykład Murawski (1998) oraz (2008a).

3. Samuel Dickstein

Zanim przejdziemy do omówienia poglądów Samuela Dicksteina dotyczących filozofii matematyki, zwróćmy uwagę na jego ogromną aktywność na polu organizacji życia naukowego oraz na jego działalność wydawniczą. W roku 1884 założył wraz z Aleksandrem Czajewiczem „Bibliotekę Matematyczno-Fizyczną", a w roku 1888 wraz z Edwardem i Władysławem Natansonami oraz Władysławem Gosiewskim czasopismo *Prace Matematyczno-Fizyczne*. Był to pierwszy w Polsce periodyk poświęcony wyłącznie matematyce i fizyce. W 1897 roku rozpoczął wydawanie *Wiadomości Matematycznych*[6]. Zarówno *Prace*, jak i *Wiadomości* były od początku aż do 1939 roku finansowane wyłącznie przez prywatny fundusz Dicksteina. Trzeba też wspomnieć o jego zasługach na polu przekładowym. Dzięki tłumaczeniu na język polski różnych prac klasycznych (publikowanych na łamach *Prac Matematyczno-Fizycznych* i *Wiadomości Matematycznych*), nie tylko przybliżał polskiemu czytelnikowi ważne osiągnięcia naukowe, ale także przyczyniał się w ten sposób do kształtowania polskiej terminologii matematycznej[7]. Przez całą swoją

---

[6] Ich kontunuacją są wydawane do dziś *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego*. Seria II: *Wiadomości Matematyczne*.

[7] Warto tu powiedzieć więcej o przekładach z języków obcych, które ukazywały się nie tylko z inicjatywy Dicksteina i środowiska matematycznego, ale także środowiska filozoficznego (na przykład w ramach *Biblioteki Przeglądu Filozoficznego*) i innych (na przykład fizyk Ludwik Silberstein był niezwykle aktywny jako redaktor *Biblioteki Naukowej Wendego* i jako tłumacz). W przekładach na język polski ukazały się m.in. głośna praca B. Riemanna o podstawowych hipotezach geometrii (1877), F. Kleina *Odczyty o matematyce* (1899), H. Helmholtza *O liczeniu w matematyce z punktu widzenia teorii poznania* (1908), trzy książki H. Poincarégo *Nauka i hipoteza* (1908), *Wartość nauki* (1908) i *Nauka i metoda* (1911), praca R. Dedekinda *Ciągłość i liczby niewymierne* (1914), zbiór prac pod redakcją F. Enriquesa *Zagadnienia dotyczące geometrii elementarnej* (1914), M. Pieriego *Geometria elementarna oparta na pojęciu kuli i punktu* (1915), A.N. Whiteheada *Wstęp do matematyki* (bez daty, ale na pewno przed 1918 rokiem) czy wreszcie J. Younga *Dwanaście wykładów o podstawowych pojęciach algebry i geometrii* (też bez daty, ale z pewnością przed rokiem 1918). Wydawanie tych przekładów wskazuje m.in. na wzrost zainteresowania matematyków, logików i filozofów polskich problemami podstaw matematyki. Jest też

działalność wniósł niewątpliwie istotny wkład do stworzenia warunków rozwoju późniejszej polskiej szkoły matematycznej. Naukowo zajmował się głównie algebrą i historią matematyki. W tym ostatnim zakresie na uwagę zasługuje jego monografia *Hoene-Wroński. Jego życie i prace* (1896a; por. też 1896b) oraz opublikowana przez niego w *Pracach Matematyczno-Fizycznych* (t. XII i XIII z lat, odpowiednio, 1901 i 1902) korespondencja między Adamem Kochańskim i Gottfriedem Wilhelmem Leibnizem. Był też autorem wielu podręczników.

Wśród prac Dicksteina znajdujemy dwie, które bezpośrednio dotyczą interesującej nas w tej książce tematyki, a mianowicie filozofii matematyki. Chodzi tu o monografię *Pojęcia i metody matematyki*, tom I, część 1: *Teoria działań* (1891) oraz o pracę „Matematyka i rzeczywistość" (1893).

Pierwsze z tych dzieł zawiera wykład metodologii matematyki, czy – używając terminologii dzisiejszej – matematyczne podstawy matematyki. Autor rozważa w nim pojęcia i metody matematyki. Przy tym – i to zasługuje tu na uwagę – podkreśla rolę formalizmu w matematyce. Dickstein był w jakimś sensie prekursorem matematycznych podstaw matematyki, tzn. badania matematyki metodami matematycznymi. *Pojęcia i metody matematyki* zasługują na uwagę także z tego powodu, że zawierają pierwsze polskie odniesienia do dzieł Bolzana, Cantora, Dedekinda, Fregego i Peana. Dickstein cytuje i krytycznie omawia idee i teorie wielu autorów, zarówno matematyków, jak i filozofów, w szczególności Grassmanna, Hankla, Helmholtza, Riemanna, Weierstrassa i Wundta. Przypomina też Hoene-Wrońskiego, którego filozofię matematyki miał zamiar rozwinąć[8]. Przywołuje także rozprawę Stanisława Piątkiewicza *Algebra w logice* z roku 1888, będącą zapewne pierwszą polską pracą z zakresu logiki matematycznej[9]. Dickstein mówi o niej jako o „krótkim wykładzie Algebry logiki" (1891, s. 39).

---

pięknym świadectwem i znakiem pozytywistycznej pracy u podstaw w zakresie edukacji społecznej.

8 Por. opublikowaną w roku 1896 monografię Dicksteina *Hoene-Wroński. Jego życie i prace.*

9 Praca ta została wprawdzie zauważona, ale nie spotkała się z większym zain-

Warto zapytać, jaki odbiór miała książka Dicksteina. Otóż wydaje się, że była ona czytana, choćby z uwagi na osobę autora, który był szanowany i zasłużony w polskim środowisku matematycznym, ale z drugiej strony powoływano się na nią bardzo sporadycznie. Być może wpływ tu miał fakt, że Dickstein, podobnie jak wzmiankowany tu Piątkiewicz czy omawiany w paragrafie 4 tego rozdziału Stamm, pozostawał w tym czasie[10] poza środowiskiem akademickim, a sytuacja taka uniemożliwiała praktycznie szersze oddziaływanie. Niemniej jednak monografia Dicksteina jest wyraźną oznaką wzrostu zainteresowania w Polsce problematyką podstaw matematyki.

W drugiej z rozważanych prac, tzn. w „Matematyce i rzeczywistości" (1893), Dickstein podejmuje podstawowy problem filozofii matematyki interesujący zarówno z ontologicznego, jak i epistemologicznego punktu widzenia, a mianowicie kwestię stosunku obiektów matematyki do rzeczywistości empirycznej, w szczególności fizycznej. Dickstein stwierdza wyraźnie, że przedmioty matematyki są odbiciami rzeczywistości w umyśle. Nie jest to jednak tylko odbicie bierne – przy powstawaniu pojęć matematycznych czynny jest bowiem umysł, działa twórcza wyobraźnia. Zachodzi tu wzajemne oddziaływanie i współdziałanie umysłu i świata zewnętrznego. Przy tworzeniu nowych obiektów (czy, jak mówi Dickstein, form) matematyk wznosi się często ponad rzeczywistość – przykładem może tu być rozszerzanie pojęcia liczby na liczby ujemne, urojone, niewymierne, nieskończenie małe, nieskończenie duże. Przy tym, jak pisze w „Matematyce i rzeczywistości":

> Postęp matematyki polega właśnie między innymi i na tym, że niemożliwości, jakie napotyka na drodze rozwoju (jeżeli nie są niemożliwościami

---

teresowaniem. Na temat Piątkiewicza i jego rozprawy oraz jej znaczenia zob. Batóg (1971, 1973) oraz Batóg i Murawski (1996). Zob. też Woleński (1995a), gdzie przytacza się fragment przemówienia powitalnego, jakie wygłosił Kazimierz Twardowski, witając we Lwowie w roku 1932 Heinricha Scholza. W przemówieniu tym Twardowski wspomniał o rozprawie Piątkiewicza, nazywając ją „pierwszą polską pracą poświęconą logistyce, czyli – jak wówczas mówiono – logice algebraicznej lub matematycznej" (Woleński 1995a, s. 195).

[10] Zauważmy, że Dickstein został profesorem Uniwersytetu Warszawskiego dopiero w 1915 roku.

> logicznymi lub bezwzględnymi) znosi przez to, że przekracza dziedzinę badania, że rozszerza niejako widnokrąg, stwarzając nowy świat form, obejmujący w sobie świat pierwotny. Badanie takich form ogólniejszych nasuwa umysłowi nowe interesujące zagadnienia, zazwyczaj płodne w następstwa (1893, s. 6).

Wiele światła na stosunek matematyki do rzeczywistości rzuca zwłaszcza geometria. Dickstein wyraźnie odróżnia tu geometrię jako naukę formalną i zastosowania geometrii do opisu doświadczenia. W pierwszym przypadku pytania o prawdziwość założeń (aksjomatów) są pozbawione sensu. Nabierają one znaczenia dopiero wtedy, gdy chcemy stosować twierdzenia geometrii do opisu świata. Wtedy pytamy, „czy i w jakim stopniu w pewnikach odtwarza się idealnie rzeczywistość, czy stosowanie twierdzeń nie doprowadza do niezgody z doświadczeniem" (1893, s. 13). Jest to jednak problem należący do filozofii, dokładniej do teorii poznania, a nie do matematyki jako takiej. Matematyk nie może na przykład nigdy twierdzić, że geometria euklidesowa doskonale odbija rzeczywistość. Może jedynie powiedzieć, że „geometria euklidesowa nadaje się w zupełności do opisania rzeczywistości w granicach doświadczenia" (1893, s. 13). Nie zamyka to jednak drogi dalszych poszukiwań, w szczególności poszukiwań innych systemów pozwalających ujmować dane doświadczalne, a tym bardziej systemów interesujących z formalnego punktu widzenia. Tak też było w historii geometrii, kiedy pojawiły się systemy geometrii nieeuklidesowej.

Dickstein z mocą podkreśla, że postulaty i aksjomaty geometrii nie są prawdami doświadczalnymi, ponieważ „odnoszą się do form idealnych jako elementy przestrzeni uważanych" (1893, s. 17). Matematyka nie jest też w stanie rozstrzygnąć problemu Kanta dotyczącego przestrzeni jako apriorycznej i koniecznej formy wszelkiej naoczności. Rozstrzygnięcie tej kwestii nie jest zresztą matematyce potrzebne.

Co kieruje zatem rozwojem teorii matematycznych, a zwłaszcza co sprawia, że tworzone są nowe systemy i wprowadzane nowe obiekty matematyczne? Otóż Dickstein dopatruje się źródeł tego rozwoju w zasadzie uogólniania i rozszerzania form matematycznych. Nazywa ją (za Peacockiem i Hanklem) zasadą zachowania form równoważnych lub praw formalnych. Polega ona na tym, że gdy rozszerzamy na przykład pojęcie liczby, to robimy to tak, by nowe obiekty i działania na nich obejmowały jako szczególny przypadek obiekty i działania dotychczasowe. Zasadę tę można dostrzec w całym rozwoju matematyki, „[...] pod przewodnictwem zasady zachowania odbywa się rozwój wiedzy matematycznej; ona to bowiem prowadzi do uogólnień, stanowiących wybitną cechę tej wiedzy" (1893, s. 31). Samo jednak sformułowanie tej zasady nie wystarcza do czynienia odkryć! Pozwala ona jedynie opisywać rozwój nauki – nie zastąpi jednak żadną miarą twórczości i nie wystarczy do ścisłego uzasadnienia prawd matematycznych. Oprócz niej potrzebna jest pewna zasada regulująca – czyli żądanie, by uogólnienia pojęć i działań nie prowadziły do sprzeczności logicznej, zarówno między sobą, jak i w stosunku do już przyjętych twierdzeń.

Matematyka odgrywa bardzo ważną rolę w badaniach przyrodniczych, w eksploracji rzeczywistości. Jest to jednak tylko rola narzędzia. Oprócz niej niezbędne są doświadczenie i obserwacja. Matematyce przysługuje cecha pewnej uniwersalności, „może ona związkami swymi objąć rozmaite możliwości, których przypadkiem szczególnym jest rzeczywistość" (1893, s. 34).

To, że matematyka nadaje się do opisu rzeczywistości może prowadzić do – jak to nazywa Dickstein – mistycyzmu matematycznego, kiedy to obiekty matematyki bierze się za samą rzeczywistość. W pułapkę tę wpadli pitagorejczycy, neoplatonicy, astrologowie itd. Jest to

> zboczeniem od zasad stosowania matematyki. Badacz prawdziwy nie bierze wprost form matematycznych za samą rzeczywistość, bo świadomy jest drogi, na jakiej pojęcia tych form powstały, i rozumie, pod jakimi warunkami wolno mu od wyników spekulacji powrócić do świata rzeczywistego. Mistycyzm matematyczny jest wtedy wynikiem niezrozumienia genezy pojęć matematycznych i warunków ich stosowalności do badania przyrody (por. 1893, s. 35).

Matematyka nie rozwiązuje żadnych kwestii metafizycznych, daje jedynie narzędzie badania zjawisk. Należy zatem wyraźnie oddzielić matematykę od filozofii. Nie można wprowadzać metafizyki do matematyki ani też z twierdzeń matematycznych wyciągać wniosków metafizycznych (na przykład na temat nieskończoności świata). Z drugiej jednak strony należy docenić znaczenie dociekań filozoficznych nad matematyką.

4. Edward Stamm

Stamm – mimo odcięcia od głównych ośrodków naukowych i zaangażowania w pracę nauczycielską – naukowo zajmował się logiką, filozofią, matematyką, historią nauki i etyką. Trzeba tu wspomnieć przede wszystkim jego publikacje o algebrze logiki (por. 1911c, 1912, 1927–1928). Był zafascynowany tą nową wówczas dziedziną i propagował ją w polskim środowisku naukowym, zwłaszcza wśród matematyków. Był także pionierem jej stosowania do teorii szyfrów. Wielokrotnie przywoływał ją przy okazji rozważań na temat filozofii matematyki, omawiał jej zalety i znaczenie dla matematyki (por. niżej). Od 1927 roku skoncentrował się na historii nauki i techniki. Jego główną pracą jest tu *Historia matematyki XVII wieku w Polsce*[11] (1935). Stamm współpracował z Samuelem Dicksteinem, który śledził jego rozwój naukowy i wspierał go (zauważmy, że większość prac Stamma została opublikowana w *Wiadomościach Matematycznych*). Był też aktywny w licznych towarzystwach naukowych w kraju i za granicą, m.in. w Polskim Towarzystwie Filozoficznym, Polskim Towarzystwie Matematycznym i w Academia pro Interlingua. Był zresztą entuzjastą języka międzynarodowego *latino sine fexione* stworzonego przez Giuseppe Peana (w tym języku napisał w roku 1926 na zaproszenie Peana rozprawę *Praesente et futuro de Matematica* opublikowaną w Turynie w periodyku *Academia pro Interlingua*).

[11] Warto dodać, że w pracy tej Stamm omawia m.in. dorobek Stanisława Pudłowskiego (1597–1645), profesora Akademii Krakowskiej, zwracając uwagę na jego pomysły i idee związane z kształtowaniem się języków symbolicznych logiki i matematyki – wiąże się to niewątpliwie z przekonaniem Stamma o roli metod formalnych i języków symbolicznych dla matematyki i logiki – por. niżej.

Do interesującego nas w tej książce kręgu zagadnień, tzn. problemów filozofii matematyki i logiki, można zaliczyć następujące prace Stamma:

– „O aprjoryczności matematyki" (1909),
– „Czem jest i czem będzie Matematyka?" (1910),
– „Logiczne podstawy nauk matematycznych" (1911a),
– „O przedmiotach urojonych" (1913a),
– „Characteristica geometrica Leibniza i jej znaczenie w Matematyce" (1913b).

W młodzieńczej (napisanej w wieku 23 lat, jeszcze przed dyplomem) pracy „O aprjoryczności matematyki" stawia sobie za cel pokazanie związków filozofii Kanta i logicyzmu oraz rozważenie problemu konieczności i powszechności matematyki (tę konieczność i powszechność nazywa właśnie tytułową apriorycznością, odwołując się tu do Couturata). Według Russella i logicyzmu matematyka czysta to zbiór sądów w postaci okresów warunkowych, czyli system związków hipotetyczno-dedukcyjnych. Couturat twierdził, że związki te są niezależne od prawdziwości czy spełnienia aksjomatów, są zatem absolutnie prawdziwe. Tu jest źródło ich konieczności i powszechności, a więc aprioryczności. Pojawia się jednak problem niesprzeczności aksjomatów przyjmowanych w matematyce. Jest to problem bardzo poważny, gdyż nie mamy absolutnych dowodów niesprzeczności. Ponieważ w logicyzmie niemożliwe jest odwoływanie się do doświadczenia dla ustalenia niesprzeczności, więc w konsekwencji można mówić jedynie o względnej konieczności i powszechności matematyki.

Problem konieczności i powszechności tez nie jest szczególnym problemem matematyki – przeciwnie, może być sformułowany w odniesieniu do każdej nauki. Stamm rozważa to zagadnienie w ogólności z punktu widzenia psychologii i teorii poznania (biorąc pod uwagę aspekt genetyczny poznania). Dochodzi do wniosku, że:

> [...] między sądami (także pewnikami) matematycznymi rozróżnić można stopnie konieczności, a z drugiej strony znajdziemy łatwo sądy niematematyczne (i nielogiczne), które są również konieczne, jak i tamte.

> Z tego wynika, że nie można mówić o absolutnej konieczności i powszechności sądów matematycznych, i że z tego stanowiska problem aprioryczności matematyki nie ma wcale specjalnego charakteru; jest to więc pytanie odnoszące się do sądów (podstawowych) nauk w ogóle (1909, s. 511).

Z genetycznego punktu widzenia zarówno w matematyce, jak i w innych naukach istotna jest powszechność i pewność pewników. Problem ten Stamm nazywa problemem naturalnego systemu pewników i dodaje, że tylko taki system „może zadowolić stronę formalną, logiczną i materialną, psychologiczną" (1909, s. 514).

Najważniejszą – jeśli chodzi o głoszone tezy – rozprawą Stamma z filozofii matematyki jest chyba artykuł „Czem jest i czem będzie Matematyka?" (1910). Autor rozważa tu problem, czym jest matematyka jako nauka i jaką pełni rolę w stosunku do innych nauk. Konkluzje, do których dochodzi w tej pracy, będą w przyszłości punktem odniesienia innych jego rozważań nad matematyką. Jako metodę badań Stamm przyjmuje porównanie matematyki z innymi naukami pod względem treści i stosowanych metod.

W rozwoju matematyki można dostrzec, według niego, wyraźną prawidłowość, a mianowicie przechodzenie od badania stosunków ilościowych do badań, które „nie mają prawie charakteru ilościowego" i w których „pojęcie wielkości nie odgrywa prawie żadnej roli" (1910, s. 183). Nieaktualna więc staje się definicja matematyki jako nauki o wielkościach. Teraz pojęcie porządku, jak pokazał to Russell, stało się dużo ważniejsze w matematyce czystej.

Jeśli wziąć pod uwagę nową dziedzinę zaliczaną do matematyki, a mianowicie algebrę logiki, to można dostrzec inną jeszcze cechę. Otóż algebra logiki ma aspekt zarówno logiczny, jak i ontologiczny (por. rachunek pojęć czy rachunek klas). W ten sposób część filozofii znalazła się wewnątrz matematyki.

Matematyka wciąga więc coraz więcej przedmiotów w zakres swego badania, co prowadzi w konsekwencji – zdaniem Stamma – do tezy o nieokreśloności zakresu badania matematyki. Dochodzi on do wniosku, że:

> [...] *treść matematyki nie jest odgraniczona od treści innych nauk*. W rozwoju historycznym możemy przeciwnie zauważyć, że matematyka *absorbuje powoli przedmioty innych nauk* (1910, s. 186).

Przechodząc do badania metody naukowej, w szczególności metod matematyki, Stamm wyróżnia w każdej nauce (starannie oddzielając ją od wiedzy, przypisując tej pierwszej cechę wewnętrznego uporządkowania i zdolność przepowiadania, która z kolei możliwa jest dzięki klasyfikacji) trzy etapy: (1) etap indukcyjny polegający na formułowaniu zasad, aksjomatów i pewników; (2) etap dedukcji z pewników, i wreszcie (3) znów etap indukcji związany z zastosowaniami. W matematyce rozwinięty jest zwłaszcza etap drugi. Etap pierwszy uważa się za prywatną sprawę uczonego. Stąd bierze się mylne przekonanie o czysto dedukcyjnej metodzie matematyki. Przy tym w zakresie etapu dedukcji istotną rolę, zwłaszcza w matematyce, odgrywa symbolika. Stamm uznaje ją za „uwieńczenie dedukcji" i za „najdoskonalszy stopień rozwoju" (1910, s. 190). Symbolika:

> pozwala [...] pewniej przepowiadać, uwalnia nas od zbytecznego myślenia, jest w ogóle ekonomią metody; teorie symbolicznie przedstawione stają się o wiele ściślejsze, aniżeli słownie przedstawione. Podczas gdy słowa nie posiadają stałych znaczeń, jest *stałość* symboli prawie idealna (1910, s. 190).

Należy jednak zauważyć, że i inne nauki dążą do dedukcji i stosowania symboliki. W konsekwencji więc także metoda nie odróżnia matematyki od innych nauk. Co więcej, w swym rozwoju historycznym matematyka przechodziła etap, w którym podobna była na przykład do nauk przyrodniczych – tak było w szczególności w starożytnym Egipcie czy Babilonii.

Stąd główna teza pracy, którą Stamm formułuje tak:

> *Matematyka nie jest wcale nauką, lecz metodą, owym idealnym, dedukcyjno-symbolicznym stanem nauki w ogóle. Matematyką nazywamy te nauki, które stan taki osiągnęły*, a więc arytmetykę, analizę, geometrię, algebrę logiki itd. Ale nie należy sądzić, że stan dedukcyjno-symboliczny, a więc matematyczny, jest stanem *arytmetycznym albo geo-*

metrycznym, że matematyzowanie się nauki polega na zastosowaniu liczenia i mierzenia (1910, s. 192).

Teza ta zbliżona jest do tezy Benjamina Peirce'a[12], która głosi, że: „Mathematics is the science, which draws necessary conclusions", z tym, że słowo „science" należy zastąpić wyrazem „method".

W rozważanym artykule znajdujemy też polemikę ze stanowiskiem Russella, zgodnie z którym matematyka czysta to zbiór zdań postaci implikacji, a więc w konsekwencji matematyka ma w pełni charakter dedukcyjno-hipotetyczny i jest zależna tylko i wyłącznie od logiki. Stamm bardzo słusznie zauważa, że u Russella logika znaczy w istocie tyle, co *logica magna*, a więc obejmuje też teorię mnogości, czyli część ontologii. Definicja Russella nie odnosi się także do matematyki stosowanej.

Tezę o tym, że matematyka jest metodą, a nie nauką próbuje poprzeć i dodatkowo uzasadnić w pracy „Characteristica geometrica Leibniza i jej znaczenie w Matematyce" (1913b). Opisuje w niej system symboliczny Leibniza związany z geometrią (i oparty na pojęciu przystawania), pokazuje, że Leibnizjańska *characteristica universalis* jest uogólnieniem *characteristica geometrica* i zauważa, że dużą jej część stanowi logika symboliczna i ta część ontologii, która wiąże się ściśle z logiką, a więc nauka o pojęciach nazywana rachunkiem klas. Systemy Hermanna Grassmanna i Giuseppe Peana są, zdaniem Stamma, kontynuacjami *characteristica geometrica* Leibniza, pokazującymi owocność tego podejścia. Wspólną metodą matematyki stanie się w przyszłości teoria relacji (Stamm nazywa ją teorią względności), którą szkicuje na zakończenie omawianej pracy.

O teorii relacji i jej znaczeniu dla podstaw i filozofii matematyki mówi też w recenzji książki Paula N. Natorpa *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften* (1910) opublikowanej jako praca „Logiczne podstawy nauk matematycznych" (1911a). Omawiając w niej napisane w duchu neokantyzmu dzieło filozofa niemieckiego, formułuje własne poglądy filozoficzne na matematykę. Rozważając pojawiający się u Natorpa problem stosunku logiki do matematy-

12 Benjamin Peirce (1809–1880), amerykański matematyk, astronom i wykładowca.

ki, poddaje krytyce koncepcję logicystyczną Russella, według której czysta matematyka jest „kontynuacją logiki" (1911a, s. 255). Stamm uważa, że sama logika nie wystarczy do zbudowania matematyki, potrzebna jest ontologia, lub przynajmniej jej fragment, w szczególności teoria relacji, którą Russell (niesłusznie zdaniem Stamma) zalicza do logiki.

W omówionych pracach Stamma na temat filozofii matematyki zwraca uwagę jego dobra orientacja w aktualnych prądach i tendencjach, w szczególności jego pozytywny stosunek do logicyzmu[13]. Dostrzega jednak i słabości tego kierunku, które rzeczowo omawia i z którymi dyskutuje. Widać też jego sympatię i zainteresowanie algebrą logiki, która była dominującym wtedy ujęciem systemu logiki.

Pewne elementy filozofii matematyki znajdujemy też w obszernej publikacji Stamma zatytułowanej „O przedmiotach urojonych" (1913a). Jest to praca z zakresu epistemologii i po trochu także ontologii. Stamm rozróżnia tu przedmioty rzeczywiste (które dzieli na syntetyczne oraz analityczne) i urojone, następnie rozważa rolę i znaczenie tych ostatnich w nauce, w szczególności w fizyce i matematyce, ale także w religii i sztuce. Jako przykłady przedmiotów urojonych pojawiające się w matematyce wymienia granicę, różniczki, nieskończoność, punkt, linię, powierzchnie. W filozofii do tej kategorii zalicza Kantowską rzecz samą w sobie (*Ding an sich*), obcą jaźń, w religii zaś Boga jako wszechprzyczynę. Próbuje też wyjaśnić ich status i genezę za pomocą (niestety trochę mętnych) rozważań psychologicznych wspartych wykorzystaniem języka teorii relacji. Twierdzi, że w nauce musimy posługiwać się przedmiotami urojonymi, jeżeli pragniemy jej postępu. Pisze:

> Przedmioty urojone są bowiem także narzędziem przepowiadania i narzędziem wyprzedzającym naturalne przepowiedniki rzeczywiste. [...] Bez przedmiotów urojonych patrzylibyśmy na świat tylko z własnego poziomu; przedmioty urojone pozwalają spoglądać z wyżyn. Dlatego jesteśmy w stanie ogarnąć wzrokiem daleko szersze dziedziny (1913a, s. 464).

---

13 Wypada dodać, że w tym czasie nurt związany z formalizmem i z intuicjonizmem albo jeszcze nie istniał, albo był słabo rozwinięty.

ROZDZIAŁ 2

Polska szkoła matematyczna

W rozdziale tym omówimy poglądy filozoficzne na matematykę i logikę, które pojawiły się w pismach (a także w praktyce badawczej) przedstawicieli dwóch głównych ośrodków matematycznych działających w Polsce międzywojennej, a mianowicie ośrodka warszawskiego i lwowskiego.

1. Warszawska szkoła matematyczna: Sierpiński, Janiszewski, Mazurkiewicz

Chcąc mówić o filozofii matematyki w warszawskiej szkole matematycznej, należy przede wszystkim przywołać trzy postacie, a mianowicie Wacława Sierpińskiego, Zygmunta Janiszewskiego i Stefana Mazurkiewicza. Ich poglądy filozoficzne na matematykę znalazły wyraz głównie w teorii mnogości.

Zacznijmy jednak od habilitacji Sierpińskiego, która odbyła się w roku 1908, a na temat wykładu habilitacyjnego wybrał on pewne zagadnienie z zakresu filozofii matematyki. Tytuł tego wykładu (wygłoszonego 6 lipca 1908 roku przed Radą Wydziału Filozoficznego Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie) brzmiał „Pojęcie odpowiedniości w matematyce". Został opublikowany (pod takim samym tytułem) w *Przeglądzie Filozoficznym* w 1909 roku.

Celem, jaki stawia sobie Sierpiński, jest rozważenie roli i znaczenia pojęcia odpowiedniości w matematyce. Autor bada rozmaite dziedziny, w których to pojęcie się pojawia, szczególną uwagę przywiązując do pojęcia równoliczności zbiorów i liczb kardynalnych, działań, geometrii analitycznej, liczb zespolonych, geometrii (w szczególności kartografii, geometrii rzutowej i geometrii wykreślnej), analizy i wreszcie pojęcia funkcji. Dochodzi do stwierdzenia, że pojęcie odpowiedniości jest jednym z najważniejszych pojęć w matematyce. Pisze on:

> Przenika ono wszystkie dziedziny myśli matematycznej; jest podstawą, na której budujemy inne zasadnicze pojęcia; jest źródłem wszystkich najwspanialszych pomysłów (1919, s. 8).

Uzasadnienie dla tego faktu Sierpiński znajduje u Poincarégo, który w *La Science et l'hypothese* twierdził:

> Matematycy nie badają przedmiotów, lecz zależności między nimi: jest więc dla nich rzeczą obojętną zastąpienie badanych przedmiotów przez inne, byleby owe zależności pozostały bez zmiany[1] (1902, s. 32).

Sierpiński kończy swe rozważania tezą głoszącą, że:

> [...] fakt, że nauka, tak oderwana, jaką jest matematyka, znajduje tyle zastosowań realnych, wytłumaczyć daje się istnieniem doskonałej odpowiedniości między dziedziną abstrakcji a dziedziną realnej rzeczywistości (1909, s. 19).

Jest to mocna teza dotycząca jednego z fundamentalnych zagadnień filozofii matematyki, a mianowicie problemu związków między matematyką czystą i matematyką stosowaną oraz problemu matematyczności świata fizycznego. Sierpiński właściwie ich nie rozwiązuje, nie uzasadnia też swojej tezy, ale nie to jest tu najważniejsze. Istotny jest fakt, iż jako temat swojego wykładu habilitacyjnego wybrał właśnie zagadnienie z filozofii matematyki.

Podobnego wyboru dokonał kilka lat później Zygmunt Janiszewski, który – choć jego rozprawa była poświęcona topologii – jako temat swojego wykładu habilitacyjnego (wygłoszonego 11 lipca 1913 roku na posiedzeniu Rady Wydziału Filozoficznego Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie) wybrał problem sporu realistów i ide-

---

[1] "Les mathématiciens n'étudient pas des objets, mais des relations entre les objets; il leur est donc indifférent de remplacer ces objets par d'autres, pourvu que les relations ne changent pas".

alistów w filozofii matematyki. Tytuł wykładu brzmiał: „O realizmie i idealizmie w matematyce", a został opublikowany pod tym samym tytułem w roku 1916 (podobnie jak wykład Sierpińskiego) w *Przeglądzie Filozoficznym*.

Spór realizmu z idealizmem trwa w filozofii matematyki od samego początku (por. koncepcje ontologiczne dotyczące przedmiotów matematyki głoszone przez Platona, którego możemy uważać za ojca idealizmu, i Arystotelesa, który może być postrzegany jako ojciec realizmu). Jego apogeum przypadło na przełom XIX i XX wieku w związku z teorią mnogości Cantora, a szczególnie po roku 1904, kiedy to Zermelo udowodnił twierdzenie o dobrym uporządkowaniu, które zwróciło uwagę matematyków na (kontrowersyjny) aksjomat wyboru[2]. Istota tego sporu sprowadza się do pytania: „Co to znaczy istnieć (w matematyce)?". Zauważmy, że zarówno aksjomat wyboru, jak i twierdzenie Zermela o dobrym uporządkowaniu głoszą istnienie pewnych obiektów (aksjomat wyboru – zbioru-selektora, twierdzenie Zermela – relacji będącej dobrym porządkiem) w sposób niekonstruktywny, tzn. nie podają żadnych informacji o postulowanych obiektach, o tym, jak je skonstruować.

Janiszewski w swoim artykule analizuje odpowiedzi realistów i idealistów i wskazuje na trudności, na jakie natrafiają. Rozważa też warunki konieczne i dostateczne istnienia w matematyce. Otóż warunkiem koniecznym istnienia jest oczywiście niesprzeczność. Ale czy jest ona także warunkiem dostatecznym? Idealiści odpowiadają, że tak. Według nich więc istnieć, to dokładnie tyle, co być niesprzecznym. Realiści zaś utrzymują, że odpowiedź jest tu negatywna, tzn. głoszą, że w matematyce istnieje tylko to, co ma „(dobrą) definicję" (1916, s. 163). Rzecz jasna powstaje w ten sposób kolejny problem – co to znaczy *dobra* definicja?

W konsekwencji, według realistów, zbiór jest określony, gdy – jeśli nie można określić indywidualnie wszystkich jego elementów, podane jest przynajmniej prawo konstrukcji dowolnego elemen-

[2] Twierdzenie o dobrym uporządkowaniu jest równoważne – na gruncie stosownego systemu aksjomatycznego teorii mnogości – aksjomatowi wyboru. Na temat tych zależności oraz historii i statusu, jak również znaczenia w matematyce aksjomatu wyboru – por. na przykład Murawski (1995), Dodatek I.

tu zbioru (por. 1916, s. 168). Idealiści zaś głoszą, że można określić zbiór, nie określając jego poszczególnych indywidualnych elementów. Zbiór jest określony, gdy dane jest kryterium należenia do niego (zasadę tę przyjmował już Cantor).

Janiszewski dochodzi do wniosku, że spór idealistów i realistów w filozofii matematyki pokazuje, że:

> [...] w przeciwieństwie do rozpowszechnionego mniemania o bezwzględnej oczywistości i pewności rozumowań matematycznych i tu spotykamy kwestie sporne (1916, s. 169).

W matematyce bywało tak wielokrotnie. Zawsze jednak znajdowano drogi wyjścia z trudności. Czy tak samo będzie w filozofii matematyki? Janiszewski odpowiada tu pesymistycznie, pisząc:

> O tym należy wątpić. Różnica bowiem filozoficznych poglądów, która się objawia w tym sporze, która jest jego źródłem – jest tą odwieczną różnicą, która powodowała przez średniowiecze ciągnący się spór między nominalistami a platończykami, który ciągnie się i dziś między pozytywizmem a idealizmem (1916, s. 170).

Zwróćmy uwagę na to, że Janiszewski nie opowiada się po żadnej ze stron sporu. Ogranicza się tylko do zreferowania różnych stanowisk i argumentów. Jest to zresztą – jak zobaczymy – postawa typowa dla środowiska matematyków warszawskich.

Wróćmy do pytania, które postawiliśmy już wyżej w związku z tematem wykładu habilitacyjnego Sierpińskiego, a mianowicie zapytajmy, dlaczego Sierpiński i Janiszewski wybrali jako tematy swych wykładów habilitacyjnych właśnie zagadnienia z filozofii matematyki, choć byli przecież „rasowymi" matematykami? Czy zdecydował o tym tylko fakt, że ich przewody habilitacyjne przeprowadzane były przed Radą Wydziału Filozoficznego, a więc wśród jej członków byli w większości humaniści, a nie matematycy i w takiej sytuacji temat ściśle matematyczny (bardziej techniczny) mógł ich nie zainteresować? Mogli wybrać przecież jakieś popularne zagadnienie z matematyki. To, że wybrali właśnie tematy z filozofii matematyki pokazuje, że we Lwowie na uniwersytecie panowała dobra atmosfera intelektualna, jeśli chodzi o podstawy i filozofię matematyki, oraz że obaj interesowali się nie tylko matematyką jako taką, ale także problemami filozoficznymi tej dziedziny. Obaj byli też przekonani, że potrzebna jest określona koncepcja rozwoju matematyki w Polsce, by móc tę dyscyplinę uprawiać i rozwijać, co więcej, że trzeba określić jej metodologiczny fundament, w charakterze którego – jak zobaczymy – widzieli teorię mnogości.

Zainteresowanie filozofią matematyki i przekonanie o jej wadze i znaczeniu dały o sobie znać u Janiszewskiego już wcześniej, przy okazji opublikowanego w roku 1915 *Poradnika dla samouków*. Był on duszą całego przedsięwzięcia i autorem największej liczby zamieszczonych tam artykułów – napisał, oprócz wstępu ogólnego i zakończenia oraz działu informacyjnego, artykuły o równaniach różniczkowych, funkcyjnych, różnicowych i całkowych, o szeregach, o podstawach geometrii oraz o logice i filozofii matematyki[3].

Właśnie te dwa ostatnie, tzn. „Logistyka" (Janiszewski 1915a) i „Zagadnienia filozoficzne matematyki" (Janiszewski 1915b) są z naszej perspektywy najważniejsze.

Pierwszy z tych artykułów, czyli „Logistyka", jest prezentacją logiki matematycznej (zwanej także logiką symboliczną czy właśnie – szczególnie wtedy stosowaną nazwą – logistyką). Janiszewski zaczyna od wyjaśnienia, dlaczego w ogóle mówi się w tej książce, poświęconej przecież matematyce, właśnie o logice i podaje cztery tego powody:

a) logistyka ujęta jest w postaci rachunku *(algiebra logiki*), matematykę zaś uważamy za naukę o wszelkich rachunkach;

---

[3] Oprócz Janiszewskiego autorami artykułów w *Poradniku* byli: S. Kwietniewski (pisał o geometrii analitycznej, syntetycznej, wykreślnej i różniczkowej oraz o historii matematyki), W. Sierpiński (pisał o arytmetyce, teorii liczb, algebrze wyższej, teorii mnogości, teorii funkcji zmiennej rzeczywistej, rachunku różniczkowym i całkowym), S. Zaremba (pisał o teorii funkcji analitycznych, równaniach różniczkowych cząstkowych, teorii grup i rachunku wariacyjnym) i S. Mazurkiewicz (pisał o rachunku prawdopodobieństwa). Rozdział wstępny „O nauce" napisał J. Łukasiewicz.

b) jest ona jedyną nauką, mogącą mieć w matematyce zastosowanie;

c) w niektórych działach (np. teorii stosunków) traktuje o tych samych przedmiotach co i matematyka, tylko szerzej ujętych;

d) *rachunek* logistyczny ma interpretację nie tylko logiczną, lecz i matematyczną, należy więc bezsprzecznie i do matematyki (mianowicie do teorii mnogości) (1915a, s. 449).

W przypisie dodaje, że możliwa jest także interpretacja w teorii liczb.

Charakteryzuje przy tym logistykę, mówiąc, że jest to „*logika formalna* (tj. nauka o formach czystej myśli) *posługująca się metodą matematyczną*; ściślej mówiąc: metodą, którą dotychczas na większą skalę stosowała tylko matematyka" (1915a, s. 449).

Za jedną z ważnych cech wyróżniającą logistykę i odróżniającą ją od innych (także od wcześniejszych) form i działów logiki uważa stosowanie w niej symboliki[4].

W rozważanym artykule Janiszewski prezentuje główne fakty z historii logistyki i mówi o jej najważniejszych osiągnięciach. Podkreśla, że ataki na logikę matematyczną i podważanie jej znaczenia nie są poparte żadnymi poważnymi argumentami, a „dowcipne i pełne głębszych myśli, a złośliwe rozdziały książki *Science et méthode* Poincarégo traktujące o logistyce, są raczej satyrą niż krytyką" (1915a, s. 456)[5].

---

4 Dodaje nawet, że cecha ta „stała się przyczyną niepopularności logistyki wśród filozofów" (1915a, s. 450).

5 Poincaré pisał w *Science et méthode* (1908, Livre II, Chapitre III: Les Mathématiques et la Logique, VII. La pasigraphie; przekład polski – s. 118): „Istotnym pierwiastkiem tego języka [języka symbolicznego – uwaga moja, R.M.] są pewne znaki algebraiczne, przedstawiające poszczególne łączniki: jeżeli, i, albo, więc. Być może, że znaki te są dogodne: inną jest rzeczą, czy są powołane do odnowienia całej filozofii. Trudno jest przypuścić, że wyraz „jeżeli", skoro go napisać w postaci $\supset$, nabiera nowej jakiejś mocy.

Ten wynalazek Peano nazywał się dawniej pazygrafią, tj. sztuką napisania traktatu matematycznego bez użycia ani jednego wyrazu z języka potocznego. Nazwa ta określa bardzo wyraźnie jej stosowalność. Później podniesiono ją do wybitniejszej godności, nadając jej tytuł logistyki. Wyrazu tego używają w szkołach wojennych dla oznaczenia sztuki wachmistrzowskiej, sztuki prowadzenia i rozkładania obozem wojska: jasne jest przecież, że nowa logistyka nie ma z tą nic wspólnego, że nowa nazwa zdradza zamiar dokonania przewrotu w logice".

Na uwagę zasługują jego komentarze na temat związków logiki i matematyki oraz stanowisko na temat statusu logiki. Otóż Janiszewski zdaje sobie sprawę z tego, że logika matematyczna może być wygodnym i pożytecznym narzędziem analizy języka i analizy rozumowań, że „czasem rachunek logistyczny może mieć znaczenie metody i ułatwić wyciąganie wniosków" (1915a, przyp. 1, s. 456). Deklaruje wyraźnie:

> Pewne zaznajomienie się z logistyką należy polecić każdemu, kto chce mieć pojęcie o dzisiejszym stanie logiki, szczególniej więc fachowym filozofom, a poniekąd i matematykom [...]. Staje się zaś ona dla nich niezbędna, jeśli zechcą się zająć filozofią matematyki (1915a, s. 455).

Knaster pisze (1960, s. 2), że Janiszewski sam starał się „zdobyć gruntowną znajomość logiki matematycznej, zwanej podówczas logistyką, i zaczął ją praktycznie stosować". Przy tym używał logiki matematycznej, „przede wszystkim do metodycznego rozwiązywania zagadnień matematycznych posługując się szeroko swoistą symboliką mnogościową", jak i „do ujawniania braków i niejasności w strukturze pojęć matematycznych, nawet tak podstawowych jak linia i powierzchnia" (1960, s. 2). Janiszewski wyraźnie jednak podkreśla w omawianym artykule, że logika (matematyczna) jest samodzielną i autonomiczną dyscypliną matematyczną, a nie tylko metodą czy narzędziem matematyki (por. 1915a, s. 456), że „nie ma też wcale na celu (bezpośredniej przynajmniej) korzyści praktycznej" (1915a,

---

("L'élément essentiel de ce langage, ce sont certains signes algébriques qui représentent les différentes conjonctions: si, et, ou, donc. Que ces signes soient commodes, c'est possible; mais qu'ils soient destinés à renouveler toute la philosophie, c'est une autre affaire. Il est difficile d'admettre que le mot *si* acquiert, quand on l'ecrit $\supset$, une vertu qu'il n'avait pas quand on l'écrivait si.

Cette invention de M. Peano s'est appelée d'abord la *pasigraphie,* c'est-à-dire l'art d'écrire un traité de mathématiques sans employer un seul mot de la langue usuelle. Ce nom en définissait très exactement la portée. Depuis, on l'a élevée à une dignité plus éminente, en lui conférant le titre de *logistique.* Ce mot est, paraît-il, employé à l'École de Guerre, pour désigner l'art du maréchal des logis, l'art de fair marcher et de cantonner les troupes; mais ici aucune confusion n'est à craindre et on voit tout de suite que ce nom nouveau implique le dessein de révolutionner la logique").

przyp. 1, s. 454). Zasługuje to na szczególne podkreślenie, jeśli wziąć pod uwagę studia Janiszewskiego we Francji będącej pod wpływem Poincarégo (por. wyżej). Takie nastawienie „prologiczne" i podkreślanie wagi logiki matematycznej dla samej matematyki przy zdecydowanym akceptowaniu jej autonomiczności i samodzielności jest bardzo istotne i charakterystyczne dla szkoły warszawskiej (i niewątpliwie przyczyniło się do rozwoju warszawskiej szkoły logicznej).

Drugi ze wspomnianych artykułów Janiszewskiego dotyczy problemów filozoficznych matematyki. Autor omawia poszczególne kwestie natury filozoficznej związane z tą nauką, w szczególności problem dedukcyjnego czy indukcyjnego charakteru matematyki, charakteru indukcji matematycznej, poprawności definicji, natury przedmiotów matematyki i sposobu ich istnienia. Prezentuje spór między idealistami i realistami, omawia rolę i znaczenie antynomii, rozważa zagadnienia filozoficzne dotyczące przestrzeni i związany z tym problem natury i charakteru teorii geometrycznych oraz sensowności pytania o ich prawdziwość. Do każdego z tych zagadnień podana jest literatura, a na końcu zamieszczono spis (z komentarzami) ogólnych pozycji dotyczących filozofii matematyki. Jest to dowód na to, że Janiszewski znakomicie orientował się w aktualnej literaturze filozoficznej dotyczącej matematyki. Uwagę zwracają też subtelne rozróżnienia, które przeprowadza, formułując problemy. Rzeczą charakterystyczną jest to, że – podobnie jak w innych jego publikacjach – nie formułuje nigdzie własnych poglądów, a ogranicza się jedynie do zreferowania (bardzo zresztą kompetentnego) opinii innych i w ten sposób przedstawienia złożoności zagadnienia. Podkreśla też z jednej strony niezależność pracy matematyka od pewnych kwestii filozoficznych, z drugiej zaś zauważa, że istnieją sporne zagadnienia filozoficzne, które na pracę matematyka jednak wpływają. Pisze:

> Zagadnienia, poruszone w poprzednich paragrafach, znajdują się, że tak powiemy, poza obrębem działalności matematyka: jakiekolwiek będzie on miał poglądy na nie, czy też nie będzie ich mieć wcale, to nie wywrze – przynajmniej bezpośrednio – wpływu na jego pracę w obrębie matematyki i w tym obrębie nie utrudni porozumienia z innymi

> matematykami. Bez względu na to, za co uważają liczby naturalne albo indukcję matematyczną, wszyscy matematycy będą się nimi posługiwać w jednakowy sposób. Istnieją jednak i takie kwestie sporne, które mają wpływ bezpośredni na aktualną pracę matematyczną. Dotyczą one *ważności* pewnych rozumowań matematycznych i *przedmiotowości* niektórych pojęć matematycznych (1915b, s. 470).

Wśród tych ostatnich wymienia spór o wielkości urojone, o rachunki nieskończonościowe, o sumowanie szeregów czy o zasadę ciągłości Ponceleta, które mają dziś jedynie charakter historyczny oraz – aktualne, jak pisze, dziś – kwestie poprawności definicji (na przykład, czy dopuszczać definicje niepredykatywne w matematyce) czy pewne kwestie związane z teorią mnogości.

Wspomniana właśnie teoria mnogości odgrywała w szkole warszawskiej istotną rolę. Wszystko zaczęło się od odkrycia Sierpińskiego. Otóż w roku 1907 stwierdził, że płaszczyzna i prosta składają się z takiej samej liczby punktów. Wkrótce dowiedział się[6], że fakt ten odkrył już trzydzieści lat wcześniej Georg Cantor i że jest to podstawowy wynik nowej naówczas dyscypliny, a mianowicie teorii mnogości. Od tego momentu teoria ta znalazła się w centrum zainteresowań Sierpińskiego. Będąc od 1910 roku profesorem Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie[7], prowadził tam na ów temat wykłady[8], napisał też podręcznik pt. *Zarys teorii mnogości* (1912).

Internowany na początku I wojny światowej przez władze rosyjskie[9] (w Wiatce) znalazł się w końcu – dzięki staraniom swoich ro-

---

6 Mostowski pisze (1975, s. 9), że kiedy Sierpiński dokonał wspomnianego odkrycia, napisał do swego kolegi T. Banachiewicza, przyszłego profesora astronomii Uniwersytetu Jagiellońskiego, a studiującego naówczas w Getyndze, z zapytaniem, czy wynik ten jest znany. Banachiewicz odpowiedział mu, wysyłając telegram zawierający tylko jedno słowo: „Cantor". W ten sposób zwrócił uwagę Sierpińskiego na prace Cantora – i ten zaczął je studiować.

7 Kierował jedną z dwóch katedr matematyki, kierownikiem drugiej był Józef Puzyna.

8 Głoszona czasami opinia, że były to pierwsze na świecie wykłady z tej nowej dziedziny, jest błędna. Wcześniej wykłady z teorii mnogości prowadzili Ernst Zermelo (Getynga 1900–1901), Felix Hausdorff (Lipsk 1901) oraz Edmund Landau (Berlin 1902–1903, 1904–1905).

9 Wybuch wojny zastał Sierpińskiego na wakacjach w Rosji.

syjskich kolegów – w Moskwie, gdzie współpracował z Nikołajem N. Łuzinem i zetknął się z tworzoną i rozwijaną tam właśnie teorią zbiorów analitycznych. W przyszłości Sierpiński miał okazać się jedną z najważniejszych postaci w dalszym rozwijaniu tego działu teorii mnogości, a mianowicie deskryptywnej teorii mnogości.

We Lwowie Sierpiński zainteresował teorią mnogości młodych matematyków: Zygmunta Janiszewskiego, Stefana Mazurkiewicza i Stanisława Ruziewicza.

Kiedy w roku 1915 władze rosyjskie ewakuowały swój uniwersytet z Warszawy do Rostowa nad Donem, a kilka miesięcy później Polacy otworzyli w Warszawie uniwersytet polski wśród pierwszych jego profesorów znaleźli się Zygmunt Janiszewski i Stefan Mazurkiewicz. Pod koniec roku 1918 dołączył do nich Wacław Sierpiński, obejmując katedrę matematyki. W ten sposób w jednym miejscu znaleźli się ludzie o tych samych zainteresowaniach naukowych, czyli poświęcający swój czas teorii mnogości[10].

W roku 1917, odpowiadając na apel Kasy im. Mianowskiego, Janiszewski napisał artykuł „O potrzebach matematyki w Polsce" (1917). Ten niewielki, bo liczący sześć stron druku, artykuł stał się programem całego pokolenia matematyków polskich. Janiszewski postulował w nim przede wszystkim skupienie wysiłków naukowych na jednym dziale matematyki[11] oraz stworzenie nowego czasopisma matematycznego. Pisał:

> W myśl powyższego projektu należałoby założyć u nas czasopismo ściśle naukowe, poświęcone wyłącznie jednej z tych gałęzi matematyki, w których mamy pracowników wybitnych, prawdziwie twórczych i licznych. Czasopismo to [...] przyjmowałoby artykuły w każdym z czterech języków uznanych w matematyce za międzynarodowe [...]. Pismo to zawierałoby, obok artykułów oryginalnych, bibliografie

[10] Ruziewicz był profesorem politechniki i uniwersytetu we Lwowie oraz rektorem Akademii Handlu Zagranicznego.

[11] O tym, jak ważny to był postulat, może świadczyć historyjka, o której pisze Marczewski (1948, s. 17–18): „Gdy [...] w r. 1911 Puzyna, Sierpiński, Zaremba i Żorawski spotkali się na sekcji matematycznej Zjazdu Przyrodników i Lekarzy w Krakowie, zabrakło im wspólnego tematu: tak bardzo rozbieżne były ich zainteresowania".

> tej gałęzi, streszczenia, a nawet przedruki ważniejszych artykułów, drukowanych gdzie indziej, szczególnie zaś tłumaczenia artykułów wartościowych, drukowanych w językach nie „międzynarodowych", a więc przede wszystkim prac polskich, które marnują się nieznane; wreszcie korespondencje: odpowiedzi na zapytania [...].
>
> [...] powróćmy do sprawy twórczości matematycznej. Tu atmosferę odpowiednią może wytworzyć dopiero zajmowanie się wspólnymi tematami. Konieczni prawie dla badacza są współpracownicy. Odosobniony najczęściej zamiera. Przyczyny tego są nie tylko psychiczne, brak pobudki: odosobniony *wie* o wiele mniej od tych, co pracują wspólnie. Do niego dochodzą tylko wyniki badań, idee już dojrzałe, wykończone, często w kilka lat po swym powstaniu, gdy ukażą się w druku. Odosobniony nie widział, jak i z czego one powstawały, nie przeżywał tego procesu razem z ich twórcami. „Jesteśmy z daleka od tych kuźni czy kotłów, w których wytwarza się matematyka, przychodzimy spóźnieni i, nie ma rady, musimy pozostać w tyle" mówił mi w Getyndze o swoich rodakach pewien uczony matematyk rosyjski. O ileż bardziej stosuje się to do nas!
>
> Otóż, jeśli nie chcemy zawsze „pozostawać w tyle", musimy chwycić się środków radykalnych, sięgnąć do podstaw złego. Musimy stworzyć taką „kuźnię" u siebie! Osiągnąć zaś to możemy tylko przez skupienie większości naszych matematyków w pracy nad jedną gałęzią matematyki. Dokonywa się to obecnie samo przez się, trzeba tylko temu prądowi dopomóc. Otóż niewątpliwie utworzenie u nas specjalnego pisma dla jednej gałęzi matematyki pociągnie wielu do pracy w tej gałęzi.
>
> Lecz jeszcze w inny sposób pismo dopomogłoby do wytworzenia się u nas tej „kuźni": bylibyśmy wtedy ośrodkiem technicznym publikacji matematycznych w tej gałęzi. Do nas przysyłano by rękopisy nowych prac i utrzymywano by z nami stosunki (1917, s. 15 i 18).

Naturalnie, dziedziną, na której miał skupić się wysiłek badawczy matematyków polskich, była teoria mnogości i dyscypliny pokrewne jak topologia, teoria funkcji rzeczywistych itp.[12] – był to przecież obszar zainteresowań grypy matematyków warszawskich,

---

[12] Zauważmy, że w artykule Janiszewskiego nie mówi się wyraźnie o żadnej konkretnej dyscyplinie. Nie jest wykluczone, że już wtedy rysował się konflikt z Zarembą – por. rozdział 3. Zaremba też zresztą napisał artykuł o potrzebach matematyki opublikowany w tym samym tomie *Nauki Polskiej* co praca Janiszewskiego.

którzy przybyli do Warszawy ze Lwowa, a także części matematyków lwowskich. W celu realizacji drugiego postulatu Janiszewskiego powołano nowe czasopismo pod nazwą *Fundamenta Mathematicae*. Na okładce pierwszego tomu *Fundamenta*[13] napisano, że jest to czasopismo poświęcone „teorii mnogości i zagadnieniom pokrewnym (bezpośrednie zastosowania teorii mnogości), Analysis Situs[14], logika matematyczna, badania aksjomatyczne". Pierwszy tom ukazał się w 1920 roku[15].

Janiszewski i inni widzieli więc i akcentowali powiązania teorii mnogości z innymi (zarówno klasycznymi, jak i dopiero powstającymi) działami matematyki. Nie postrzegali jej jako teorii oderwanej i samotnej. Henri Lebesgue w artykule „À propos d'une nouvelle revue mathématique: *Fundamenta Mathematicae*" (1922) powstałym z okazji ukazania się drugiego tomu *Fundamenta* pisał, że „teoria mnogości była usunięta poza obręb matematyki przez wielkich kapłanów teorii funkcji analitycznych", a jeśli „teraz ten ostracyzm przeciwko teorii mnogości zanika", to dzięki temu, że „teoria mnogości, która wyrosła z teorii funkcji analitycznych, mogła okazać się pożyteczną dla swej starszej siostry i mogła wykazać ludziom dobrej woli swoje walory i swoje bogactwa".

To przekonanie twórców polskiej szkoły matematycznej o miejscu i roli teorii mnogości w matematyce znalazło też swój zdecydowany wyraz w przywoływanym już tu *Poradniku dla samouków*. Otóż w artykule „Teoria mnogości w stosunku do innych działów matematyki" napisanym przez Stefana Mazurkiewicza i opublikowanym w tomie trzecim *Poradnika* (będącym uzupełnieniem tomu pierwszego) stwierdził on:

> Rozważając ułożoną przez Janiszewskiego tablicę „podziału matematyki" (*Poradnik*, t. 1, str. 22/23), dostrzegamy, że stanowisko teorii mnogości zostało w tablicy tej wyznaczone w sposób bardzo szczególny. Tablica jest dwuskrzydłowa, co jest zgodne z tradycyjnym podziałem

---

13 Fraza ta była powtarzana w każdym następnym tomie.

14 Dziś zwanej topologią – przypis mój, R.M.

15 Niestety Janiszewski nie doczekał ukazania się tego tomu – zmarł 3 stycznia 1920 roku w wyniku nawrotu hiszpanki.

> matematyki na dwie gałęzie: po lewej stronie mamy analizę (łącznie z arytmetyką i algebrą), po prawej geometrię. Na linii środkowej znajdujemy dwie tylko teorie: teorię mnogości i teorię grup. – Zauważmy nadto, że przesuwając się w tablicy omawianej od góry ku dołowi, przechodzimy na ogół od działów prostszych, bardziej pierwotnych i samowystarczalnych – do bardziej złożonych i wymagających z zewnątrz czerpanych środków pomocniczych, tym sposobem mamy tu rodzaj piramidy umiejętności matematycznych, opartej oczywiście na wierzchołku. Otóż tym wierzchołkiem jest teoria mnogości, która zajmuje w tablicy miejsce szczytowe, mając pod sobą bezpośrednio podstawy arytmetyki, podstawy geometrii i topologię. – Wreszcie widzimy liczne „linie związku", rozchodzące się (przeważnie odśrodkowo) od teorii mnogości we wszystkich kierunkach. – Reasumując, powiedzieć można, że tablica nadaje teorii mnogości stanowisko niemal dominujące w matematyce (gdyż zarazem podstawowe i centralne), ponadto zaś uwydatnia jej oddziaływanie na inne działy (1923, s. 89–90).

W dalszym ciągu Mazurkiewicz rozważa znaczenie i rolę teorii mnogości w teorii funkcji rzeczywistych, w analizie, w geometrii i w podstawach matematyki. Podkreśla, że teoria funkcji zmiennej rzeczywistej „dała pierwszy impuls do powstania teorii mnogości, a dzisiaj w przeważającej części jest bezpośrednim zastosowaniem ostatniej" (1923, s. 90). Dodaje, że „teoria mnogości prowadzi w teorii funkcji zmiennej rzeczywistej przede wszystkim do usystematyzowania zagadnień i nadania pewnej budowy bezkształtnej masie drobiazgów" (1923, s. 92). Pokazuje też, że badania w zakresie rachunku funkcyjnego są istotnie uzależnione od teorii mnogości, w szczególności zależą od niej uogólnienia samego pojęcia funkcji. W geometrii teoria mnogości nie znalazła dotąd – zdaniem Mazurkiewicza – „szerszego zastosowania i zapewne go nie znajdzie" (1923, s. 97). Zwraca natomiast uwagę na to, że teorii mnogości zawdzięczamy „niezmierne wzbogacenie naszej znajomości form przestrzennych" (1923, s. 97).

Pokazuje to, że w szkole warszawskiej traktowano teorię mnogości jako podstawę matematyki w sensie metodologicznym, a nie filozoficznym (tzn. ontologicznym i epistemologicznym). Program Janiszewskiego „wygenerował" teoriomnogościowe podstawy matematyki jako kierunek nie filozoficzny, ale matematyczny. Teorię mnogości w szkole warszawskiej traktowano jako teorię w pewnym sensie pomocniczą (choć o fundamentalnym znaczeniu) dla matematyki. Zdawano sobie doskonale sprawę z tego, że dopiero się rozwija (podobnie jak topologia) i – jak to ujął Mazurkiewicz w cytowanym artykule z *Poradnika* – znajduje się „w stadium embrionalnym" (1923, s. 98). Fakt ten „przeciwdziała bardzo silnie możności szerszego ich [tzn. teorii mnogości i topologii – uwaga moja, R.M.] zastosowania w matematyce [...]" (1923, s. 98). Jednak „w miarę posuwania się naprzód samej teorii mnogości znaczenie ostatniej [tzn. teorii mnogości właśnie – uwaga moja, R.M.] będzie niewątpliwie wzrastało" (1923, s. 98). Przekonaniu temu dał też wyraz Janiszewski, zwracając w „Zakończeniu" *Poradnika dla samouków* uwagę na rolę teorii mnogości jako nowego i uniwersalnego języka matematyki, rolę metody aksjomatycznej oraz pokrewieństwo teorii mnogości i logiki. A Sierpiński w napisanym dla *Poradnika* artykule o teorii mnogości zawarł następującą uwagę:

> Pomimo stosunkowo krótkiego okresu czasu (zaledwie 40-letniego) teoria mnogości zdążyła już nadzwyczajnie się rozwinąć i zająć pierwszorzędne stanowisko w matematyce. Dzisiaj już nawet wykład podstaw matematyki wyższej nie może się obyć bez pewnych wiadomości z teorii mnogości (1915, s. 222).

Traktowanie teorii mnogości jako podstawy matematyki w sensie metodologicznym znalazło też swój wyraz w nacisku, jaki kładziono na jej zastosowania w innych działach matematyki. Wyrazem tego jest fakt, że na łamach *Fundamenta Mathematicae* stosunkowo niewiele było artykułów poświęconych „wewnętrznym" zagadnieniom teorii mnogości. Większość stanowiły prace pokazujące zastosowania tej teorii do topologii, teorii funkcji czy analizy.

Na specjalną uwagę zasługuje kwestia świadomości w szkole warszawskiej związków teorii mnogości z logiką i podstawami matematyki oraz filozofią matematyki. We wspomnianym artykule „Teoria mnogości w stosunku do innych działów matematyki" (1923) z tomu trzeciego *Poradnika dla samouków* Mazurkiewicz powołuje się na artykuł Janiszewskiego „Zagadnienia filozoficzne matematyki” z tomu pierwszego *Poradnika* (por. Janiszewski 1915b) oraz zwraca uwagę na to, że:

> [...] ujawnienie w łonie teorii mnogości pewnych sprzeczności, tj. antynomij, stało się jednym z motywów rewizji zasad logiki formalnej [...] [oraz że] na gruncie pojęcia zbioru podjęta została (przez szkołę Peany, a następnie przez Russella i Whiteheada) próba wtłoczenia całej matematyki w ramy jednolitego systemu hipotetyczno-dedukcyjnego, próba wprawdzie ułomna, jednak niezwykle interesująca z uwagi na tkwiące w niej tendencje do syntezy (1915b, s. 98).

Janiszewski w przywołanym przez Mazurkiewicza artykule omawia zagadnienia filozoficzne teorii mnogości z punktu widzenia sporu realistów z idealistami oraz formułuje wniosek o niezbędności teorii mnogości w rozważaniach z zakresu filozofii matematyki. Pisze:

> Do studiowania filozofii matematyki należy znać *dobrze* teorię mnogości, arytmetykę, podstawy geometrii i podstawowe pojęcia analizy nieskończonościowej; następnie konieczna jest znajomość logistyki; wreszcie potrzebne jest ogólne wykształcenie filozoficzne[16] (1915b, s. 486).

Na zakończenie tych rozważań zwróćmy uwagę na jedną istotną cechę warszawskiej szkoły matematycznej, o której wspominaliśmy już wyżej i do której przyjdzie nam jeszcze powrócić. Otóż w szkole tej nie hołdowano żadnej konkretnej doktrynie filozoficznej w zakre-

---

[16] Warto tu – już tylko w formie przypisu – przytoczyć dalszy ciąg wypowiedzi Janiszewskiego dotyczący koniecznych kompetencji, by uprawiać filozofię matematyki. Pisze on: „Do czynnej jednak pracy na tym polu [tzn. w zakresie filozofii matematyki – uwaga moja, R.M.] to nie wystarczy; koniecznym jest głębsze zrozumienie matematyki, czego można oczekiwać tylko od tych, którzy sami w tej dziedzinie pracowali w sposób twórczy. Niech przykład tylu filozofów, którzy, mając duże nawet wykształcenie matematyczne, popełnili w swych pracach nad filozofią matematyki błędy matematyczne i wykazali niezrozumienie (choć nie nieznajomość!) matematyki, działa tu odstraszająco. Brak znowu filozoficznego wykształcenia powoduje często u matematyków, zajmujących się temi zagadnieniami, niezrozumienie filozoficznej ich strony, przeoczenie po prostu całej masy zagadnień” (Janiszewski 1915b, s. 486).

sie filozofii matematyki – choć dobrze się orientowano w aktualnych koncepcjach z zakresu filozofii matematyki[17]. Ważna była tylko poprawność i owocność stosowanych metod. Istotne były wyniki, a nie konkretne metody. Znalazło to w szczególności wyraz w przypadku badań nad aksjomatem wyboru budzącym liczne kontrowersje, przez jednych odrzucanym, przez innych akceptowanym i uznawanym za niezbędny w matematyce. Otóż szkoła warszawska reprezentowała stanowisko, że należy badać implikacje matematyczne tego aksjomatu i w ten sposób rozważania filozoficzne zastąpić ścisłymi rozważaniami matematycznymi. Wyraz temu stanowisku dał jasno na przykład Sierpiński, pisząc:

> Niezależnie od tego, czy jesteśmy osobiście skłonni przyjąć pewnik Zermelo, czy też nie, musimy w każdym razie liczyć się z jego rolą w teorii mnogości i analizie. Z drugiej zaś strony, skoro pewnik Zermelo był kwestionowany przez niektórych matematyków [...], jest ważną rzeczą wiedzieć, jakie twierdzenia są dowodzone przy pomocy tego pewnika. (Zresztą nawet, gdyby nikt nie kwestionował pewnika Zermelo, nie byłoby rzeczą pozbawioną interesu badanie, jakie dowody opierają się na tym pewniku – co też robi się, jak wiadomo, i dla innych pewników) (1923, s. 78).

Opinię taką powtórzył też w późniejszej o kilkadziesiąt lat monografii:

> Niezależnie od naszych osobistych poglądów na temat aksjomatu wyboru należy uwzględnić rolę, jaką odgrywa on w teorii mnogości i w analizie. Z drugiej strony, ponieważ aksjomat wyboru jest podważany przez niektórych matematyków, ważne jest, by wiedzieć, których twierdzeń dowodzi się z jego pomocą i w którym dokładnie miejscu dowodu jest on stosowany; często się bowiem zdarza, że rozmaici autorzy stosują ten aksjomat, nie zdając sobie z tego sprawy. Nawet gdyby nikt nie kwestionował aksjomatu wyboru, byłoby interesujące zbadać, które dowody są na nim oparte, a które twierdzenia można

---

[17] Dodajmy, że Janiszewski mówił o sobie, iż jest nie tyle matematykiem, ile filozofem, a „[...] zajmuje się matematyką dlatego, aby przekonać się, jak daleko może umysł ludzki dojść samym logicznym rozumowaniem” (Steinhaus, 1921).

udowodnić bez niego – to samo odnosi się zresztą i do innych aksjomatów[18] (1965, s. 95).

A zatem drogą do rozstrzygnięcia (filozoficznej) kwestii prawomocności aksjomatu wyboru jest zbadanie jego roli w matematyce. Nie powinno się więc z góry go zakładać czy odrzucać ani nakładać żadnych ograniczeń na jego stosowanie, ale – zawiesiwszy własne przekonania filozoficzne – zbadać (niejako bezstronnie), jakie twierdzenia i w jaki sposób zależą od tego kontrowersyjnego aksjomatu. To samo dotyczy – *per analogiam* – i innych aksjomatów czy hipotez o podobnym statusie (na przykład hipotezy kontinuum).

2. Lwowska szkoła matematyczna: Steinhaus, Banach, Żyliński, Chwistek

W paragrafie tym opowiemy o Hugonie Steinhausie, Stefanie Banachu, Eustachym Żylińskim i Leonie Chwistku – przedstawicielach lwowskiej szkoły matematycznej. Szkoła ta – akceptując zasadnicze idee programu sformułowanego przez Janiszewskiego – specjalizowała się w innych dziedzinach matematyki niż szkoła warszawska. O ile w Warszawie zajmowano się głównie teorią mnogości, topologią i logiką matematyczną, o tyle we Lwowie dominowała analiza funkcjonalna zainicjowana przez Stefana Banacha (którego odkrył dla matematyki właśnie Steinhaus), a rozwijana m.in. przez Steinhausa, Stanisława Mazura, Władysława Orlicza, Juliusza Schaudera, Stefana Kaczmarza, Stanisława Ulama czy Władysława

[18] "Still, apart from our personal inclination to accept the axiom of choice, we must take into consideration, in any case, its role in the set theory and in the calculus. On the other hand, since the axiom of choice has been questioned by some mathematicians, it is important to know which theorems are proved with its aid and to realize the exact point at which the proof has been based on the axiom of choice; for it has frequently happened that various authors have made use of the axiom of choice in their proofs without being aware of it. And after all, even if no-one questioned the axiom of choice, it would not be without interest to investigate which proofs are based on it and which theorems are proved without its aid – this, as we know, is also done with regards to other axioms".

Nikliborca. Nie wymagała ona w takim stopniu, jak dziedziny uprawiane w Warszawie, pogłębionych studiów nad logiką i podstawami matematyki. Stąd w pracach matematyków lwowskich stosunkowo trudno znaleźć – interesujące nas w tej książce – uwagi o matematyce jako takiej. Być może wpływ na to miał także fakt, że we Lwowie nie rozwijano logiki, choć klimat dla niej i dla podstaw matematyki był tam dobry. Dopiero w roku 1928 postanowiono utworzyć tu katedrę logiki matematycznej – otrzymał ją Leon Chwistek. Wcześniej jedynym matematykiem lwowskim, który zajmował się logiką matematyczną, był Eustachy Żyliński. Trzeba jednak dodać, że inni matematycy z tego środowiska nie dyskwalifikowali podstaw matematyki i logiki, a nawet „dorywczo" się nimi zajmowali – wspomnieć tu można choćby Banacha i jego wspólną z Tarskim pracę o paradoksalnym rozkładzie kuli (1924) czy wyniki Banacha i Mazura na temat metod konstruktywnych w matematyce i analizy obliczalnej (por. Mazur 1963).

Skoro mowa o Banachu, to warto powiedzieć, że nie stronił on od udziału w życiu środowiska filozoficznego Lwowa. W szczególności Kazimierz Twardowski w swoim *Dzienniku* (1997) pisze, że Banach uczestniczył (7 marca 1921 roku) w inauguracyjnym posiedzeniu Sekcji Epistemologii Polskiego Towarzystwa Filozoficznego (por. 1997, t. 1, s. 201) oraz że brał udział w wykładzie i zabierał głos w dyskusji po wykładzie Zygmunta Zawirskiego na temat relacji między logiką i matematyką, który wygłoszony został 26 marca 1927 roku na posiedzeniu Polskiego Towarzystwa Filozoficznego (por. 1997, t. 1, s. 300). Na I Zjeździe Matematyków Polskich, który odbył się we Lwowie w roku 1927, Banach wygłosił (7 września 1927 roku) w sekcji logiki matematycznej referat „O pojęciu granicy" (por. 1997, t. 1, s. 323). W styczniu 1923 roku Banach wystąpił z odczytem na posiedzeniu Polskiego Towarzystwa Filozoficznego we Lwowie. Poświęcony był on paradoksom w matematyce. Banach mówił o paradoksach związanych z pojęciem równoliczności pewnych zbiorów (na przykład zbioru liczb całkowitych i zbioru liczb parzystych) i o problemach mających związek z paradoksem Banacha–Tarskiego. Wskazywał, że przyczyną tych paradoksów są zbiory nieskończone oraz aksjomat wyboru, które formalnie nie są sprzeczne z teorią mnogości. Według Banacha rozwiązanie tych pozornych paradoksów wymaga skonstruowania systemu logicznego „nie wzbudzającego żadnych obiekcji". Uwaga ta charakteryzuje w jakiś sposób postawę matematyków lwowskich w stosunku do logiki. Banach nie widział w szczególności niczego złego dla praktyki matematycznej w braku dobrego systemu logicznego. W szkole lwowskiej uprawianie matematyki nie musiało być uzupełnione dodatkowymi badaniami nad logiką i podstawami matematyki.

Obraz matematyki, jaki żywiono we Lwowie, daje się zrekonstruować najlepiej na podstawie pewnych uwag zawartych w pracach, których celem było popularyzowanie matematyki, w szczególności w publikacjach popularnych Steinhausa. Zwrócimy też uwagę na kilka (niestety oderwanych tylko) wypowiedzi innego przedstawiciela lwowskiego środowiska matematycznego, a mianowicie Eustachego Żylińskiego, o matematyce jako nauce, które to wypowiedzi (w sytuacji braku systematycznych i pełnych świadectw) mogą dać pewne wyobrażenie o jego poglądach.

Rozważając poglądy filozoficzne Steinhausa na matematykę, musimy powiedzieć przede wszystkim o jego popularnej książce *Czem jest a czem nie jest matematyka* (1923). Mówi w niej o wielu kwestiach, w szczególności o definicji matematyki, o jej rozwoju historycznym, o zastosowaniach praktycznych, o metodzie matematyki, o rachunku różniczkowym i całkowym, o matematyce rachunkowej, o błędach w matematyce i o związkach matematyki z życiem. Z naszego punktu widzenia najbardziej interesujące są rozważania na temat określenia matematyki jako nauki i rozważania nad metodami matematycznymi.

Próbując zdefiniować matematykę jako naukę, Steinhaus podkreśla, że wyrosła ona z pewnych praktycznych potrzeb człowieka, ale jest w istocie nauką teoretyczną. Pisze on:

> Widzimy, że mamy tu do czynienia z nauka starą, rozwijającą się, wyrosłą na podłożu praktyki i związaną ze światem zastosowań realnych, ale nauką *teoretyczną*, nie uchylającą się przed największymi wysiłkami nawet wtedy, gdy chodzi o zagadnienia zupełnie pozbawione utylitarnego charakteru, jak np. kwadratura koła (1923, s. 25).

Dla matematyki charakterystyczne jest operowanie metodą dedukcyjną, przy czym „pewniki jej i definicje mają w dużej mierze cechę dowolności" (1923, s. 25). Inną cechą wyróżniającą ją już na pierwszy rzut oka jest posługiwanie się symbolami. Jest to z jednej strony konieczne, ale z drugiej może prowadzić do tzw. symbolomanii (por. pracę Twardowskiego „Symbolomania i pragamatofobia", 1927) – czyli „manii mechanicznego operowania symbolami", która „przeciwna jest psychologii matematycznej" (1923, s. 27).

Steinhaus logikę traktuje wprawdzie z sympatią, ale postrzega ją nie jako samodzielną dyscyplinę mającą własne problemy badawcze i własne metody, lecz jako narzędzie dedukcji. W takim właśnie charakterze pojawia się ona w omawianej książeczce, i to pojawia stosunkowo późno, bo dopiero w jej połowie, przy rozważaniu metody matematyki. Steinhaus tak ją charakteryzuje:

> Matematyka stawia sobie za cel wykrywanie teorematów absolutnie prawdziwych. Do tego celu używa metody zwanej *dedukcyjną*. Innymi słowy wysuwa ona z teorematów, co do których już upewniła się dostatecznie, nowe, drogą *logiczną*, tj. drogą poprawnego wnioskowania bez odwoływania się do obserwacji, do eksperymentu, do świadectwa zmysłów lub też oglądu przestrzennego, czy też do wizji, objawień albo autorytetu (1923, s. 74).

Metoda dedukcyjna wyznacza w jakimś sensie także przedmiot matematyki. Steinhaus pisze:

> Widzimy więc, że matematyka ma swój przedmiot określony tylko przez metodę i że jest matematyką każda teoria dedukcyjna, że jednak to określenie matematyki jest tylko ramą, która zostaje wypełniona dopiero po wprowadzeniu pewników matematycznych, a one są – do pewnego stopnia – dowolne (1923, s . 78).

I dodaje trochę dalej:

> Charakterystyczną cechą matematyki jest jej metoda. Metoda matematyczna jest dedukcyjna, syntetyczna i formalna (1923, s. 80).

Dedukcyjność metody matematyki polega na tym, że „jedynym środkiem, jakim posługuje się wywód matematyczny, jest dedukcja" (1923, s. 80). Syntetyczność metody matematyki przejawia się, zdaniem Steinhausa, w doborze aksjomatów. Przy tym aksjomaty mogą być zarówno matematyczne, jak i logiczne. Dobór tych ostatnich „nie dokonuje się na drodze logicznej, lecz na mocy wyroku innej instancji, którą jedni nazywają »intuicją«, inni »uczuciem pewności«" (1923, s. 81).

Definicje służą w matematyce skracaniu wypowiedzi. Przy tym jednak „wybór definicji decyduje o tym, w jakim kierunku będziemy rozwijać matematykę, tj. które kombinacje symboli uznamy za ważne i godne osobnego skrótu" (1923, s. 81).

Cecha formalności polega na tym, że w rozumowaniach matematycznych wolno uwzględniać tylko taką treść pojęć, która została zawarta w definicjach. Steinhaus pisze:

> Formalizm metody matematycznej polega na tym, że wyklucza się z rozumowań matematyki wszelką treść pojęć rozważanych, o ile by ktoś chciał im przypisać jakąś treść pozadefinicyjną, a z definicji odrzuca się o ile możności wszystko, co mieści się w samym dźwięku wyrazów a nie jest wyraźnie uwidocznione w umowie definicyjnej (1923, s. 81).

Utylitarny i „narzędziowy" tylko charakter logiki w stosunku do matematyki podkreśla zdanie Steinhausa:

> Nauka logiki formalnej znajduje w matematyce najpiękniejsze pole do ćwiczeń i przykładów (1923, s. 169).

Obok wspomnianych cech ważną rolę w rozwijaniu matematyki odgrywa także pierwiastek estetyczny[19]. Według Steinhausa piękne jest

[19] Na problem ten zwracało uwagę wielu piszących o matematyce. Wspomnijmy tu tylko Arystotelesa, Proklosa czy Poincarégo. W szczególności Arystoteles w *Metafizyce* (ks. 3, 1078a52–1078b4) powiada, że matematyka mówi, choć niekoniecznie *explicite,* o pięknie i ujawnia elementy piękna, co więcej: piękno jest jedną z sił napędowych tej nauki. W podobnym duchu wypowiadał się żyjący w V wieku n.e. filozof neoplatoński Proklos Diadochus w swoim *Komentarzu*

„to, co jest zrozumiałe, co jest dostatecznie ogólne, żeby mogło stosować się do znanych, a nie *ad hoc* stworzonych przykładów, a zarazem nie jest tak ogólne, żeby było trywialne" (1958, s. 43). Nie ma wprawdzie absolutnych kryteriów piękna, ale poczucie piękna i dążenie do niego „wpływają silniej na kierunek badań matematycznych niż zasada doskonałej ścisłości" (1958, s. 44). W artykule „Drogi matematyki stosowanej" pisał:

> W duszy matematyka, jak każdego człowieka, tkwią różne wierzenia i zamiłowania, awersje i kulty, przesądy i upodobania. Najsilniejszym z tych uczuć i najgodniejszym szacunku jest czułość na piękno matematyki. Nie każdy widzi piękno gór, nie każdy doznał wzruszenia na widok morza i nie do każdego przemawiają gwiazdy w nocy; tłumaczyć tego nie można, a jeszcze trudniej jest wyjaśnić, w czym tkwi piękno funkcji zmiennej zespolonej lub geometrii syntetycznej (1949, s. 11).

Steinhaus bardzo cenił matematykę stosowaną i zastosowania matematyki – sam zresztą z powodzeniem pracował w tej dziedzinie. Uważał, że podejście platońskie do matematyki przeszkadza w zainteresowaniu się i zajmowaniu się zastosowaniami. W „Drogach matematyki stosowanej" pisał, że postawa ta „jest wroga nie tylko matematyce stosowanej, ale nawet niszczy wszystkie nauki przyrodnicze" (1949, s. 11). Ponieważ nigdzie wyraźnie nie określił, jak rozumiał związek pojęć i obiektów matematyki z rzeczywistością poznawalną zmysłowo, musimy zadowolić się tu jego krótką, aforystyczną, ale jakże piękną i trafną uwagą:

> Między duchem a materią pośredniczy matematyka[20] (1980, s. 54).

O znaczeniu, jakie przypisywał matematyce, świadczy też następująca uwaga pomieszczona w zakończeniu książeczki *Czem jest a czem nie jest matematyka*:

---

do pierwszej księgi „Elementów" Euklidesa czy działający w XIX wieku Henri Poincaré w *Science et méthode*.

20 Zdanie to zostało wyryte także na nagrobku Steinhausa.

> Żadna nauka nie wzmacnia tak wiary w potęgę umysłu ludzkiego jak matematyka. Możność udowodnienia każdego teorematu wyklucza wszelką frazeologię. W tej niezależności od frazesu, od autorytetu, w tej niezawisłości rezultatu od życzenia badacza i od „punktu widzenia", upatruję nie tylko naukową, ale i pedagogiczną wartość tej nauki. Jeśli wolno użyć pojęcia „zdrowie umysłowe", to matematyce przypada najdodatniejsza rola w „umysłowej higienie" (1923, s. 169).

Mówiąc o filozofii matematyki i logiki w kontekście lwowskiej szkoły matematycznej, warto wspomnieć jeszcze – oprócz omówionego powyżej Steinhausa – o Eustachym Żylińskim. Zajmował się on głównie teorią liczb, ale po roku 1919 w kręgu jego zainteresowań znalazła się także algebra, logika i podstawy matematyki. W szczególności udowodnił (por. 1925, zob. też 1927), że w klasycznej logice dwuwartościowej jedynymi funktorami zdaniowymi dwuargumentowymi, które same wystarczą do zdefiniowania wszystkich pozostałych funktorów jedno- i dwuargumentowych, są binegacja i dysjunkcja (tzw. kreska Sheffera)[21]. Jeśli chodzi o kwestie związane z filozofią logiki i matematyki, to nie znajdujemy osobnych prac Żylińskiego poświęconych tym problemom. Napisał wprawdzie obszerną pracę *Formalizm Hilberta* (1935), ale – wbrew temu, co mógłby sugerować tytuł – nie ma w niej uwag filozoficznych związanych z programem Hilberta, a celem jej było (jak pisze we „Wstępie") „opracowanie i szczegółowe przedstawienie pewnego formalizmu, na którym opierają się prace Hilberta i jego szkoły, dotyczące postaw matematyki" (1935, s. 1). Żyliński koncentruje się więc na sprawach technicznych, zwłaszcza na teorii zbiorów i logice zdań. Zapowiada też „opracowanie rozszerzenia formalizmu H_1 obejmującego w swych zastosowaniach podstawy arytmetyki i matematyczne pojęcie funkcji" (1935, s. 2). Praca ta jednak nigdy nie ukazała się. Warto zwrócić przy okazji uwagę na to, że wspomnianą teorię zbiorów i logikę zdań autor pojmuje „jako samodzielne dyscypliny" (1935, s. 2).

W innych pracach Żylińskiego znajdujemy kilka krótkich wypowiedzi o charakterze filozoficznym. W sytuacji braku takich uwag

---

[21] Dowód tego twierdzenia można znaleźć w książce Murawskiego i Świrydowicza *Podstawy logiki i teorii mnogości* (2006), s. 36.

warto przyjrzeć się im bliżej. W autoreferacie z odczytu „O przedmiocie i metodach matematyki współczesnej" wygłoszonego 21 maja 1921 roku (1921–1922) wyjaśniał, czym są teorie matematyczne. Twierdził, że można je utożsamiać ze zbiorem konsekwencji przyjętych aksjomatów. Czytamy tam:

> Poszczególna „teoria matematyczna" uważana być może za zbiór wniosków, które „mogą" być otrzymane za pomocą podstawowych pomyśleń mnogościowych połączonych z uczuciem pewności, stosowanych do mnogości podstawowej, na której podmnogości nałożone są pewne własności początkowe (aksjomaty) (1921–1922, s. 71a–71b).

Uwagę zwraca dość nieprecyzyjne pojmowanie logiki odwołujące się raczej do subiektywnego poczucia oczywistości i pewności, a nie do formalnie określonych z góry reguł inferencji. Żyliński dopuszcza też nieskończony zbiór konsekwencji przyjętych aksjomatów, mówiąc o wnioskach, które *mogą* być wyciągnięte.

Mówiąc o stosunku wzajemnym logiki i matematyki stwierdza, że:

> Z tego punktu widzenia stosunek matematyki do logiki zakresowej przedstawiałby się w pewnym stopniu jako stosunek specjalnych teorii mnogości do ogólnej (1921–1922, s. 71b).

Przyjmując, że pojęcie przedmiotu jest „najprostszym pojęciem przyrodniczym" (1921–1922, s. 71b), twierdzi, że matematyka jest nauką przyrodniczą o przedmiotach. Wzmacnia tę tezę, podkreślając, że „[w] badaniach poszczególnych teorii matematycznych (np. teoria liczb) posługujemy się obserwacją, a nawet doświadczeniem" (1921–1922, s. 71b).

W pracy „Z zagadnień matematyki. II. O podstawach matematyki" (1928) Żyliński mówił o roli intuicji w matematyce. Podkreślał, że intuicja może pomagać skonstruować dowód, ale sam dowód nie może w żadnej mierze do intuicji się odwoływać:

> Intuicja w matematyce może z pożytkiem kierować dowodem, lecz w żadnym razie nie może być jego częścią składową (1928, s. 51).

Mamy więc tu wyraźne odróżnienie kontekstu odkrycia i kontekstu uzasadnienia – ten pierwszy dopuszcza intuicję, drugi natomiast nie.

W pracach Żylińskiego znajdujemy też kilka wypowiedzi na temat roli i znaczenia matematyki dla innych nauk i, szerzej, w świecie kultury. W autoreferacie „O przedmiocie i metodach matematyki współczesnej" twierdził, że „ściśle syntetyczny wykład każdej nauki sprowadza się do pewnej teorii matematycznej, której twierdzenia mają moc obowiązującą w tej nauce" (1921–1922, s. 71b). W cytowanej wyżej publikacji „Z zagadnień matematyki. II. O podstawach matematyki" pisał:

> Narodziny matematyki są jednoczesne z narodzinami kultury ludzkości. [...] Wraz z rozwojem kultury intelektualnej geometria i arytmetyka, poza swym czysto praktycznym życiowym znaczeniem, zaczynają pociągać umysły dzięki wyjątkowo prostym i wyraźnym prawom występującym na ich terenie (1928, s. 42).

W memoriale Żylińskiego, Steinhausa, Ruziewicza i Banacha z 14 kwietnia 1924 roku czytamy zaś:

> Matematyka dzisiejsza jest niczym innym jak ogólną teorią ścisłego myślenia połączonego z uczuciem pewności. [...] Będąc jednak najogólniejszą nauką o relacjach zachodzących między przedmiotami, matematyka znajduje zastosowania w każdej dziedzinie naukowej i praktycznej, wychodzącej w dostatecznej mierze poza ramy opisowości, prostych indukcji lub metod literacko-artystycznych (Żyliński *et al.* 1924, s. 1).

Jest to więc wyraźne stwierdzenie dotyczące przedmiotu matematyki oraz – będące konsekwencją tego – wyjaśnienie stosowalności matematyki w innych dziedzinach.

W rozdziale tym omówimy też poglądy na filozofię matematyki i logiki Leona Chwistka. Jak wyjaśniliśmy we wstępie, choć karierę naukową zaczynał on w Krakowie, to od roku 1930 był profesorem logiki matematycznej na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie i tu rozwinął swoje koncepcje oraz starał się stworzyć szkołę. Stąd sensowne wydaje się przedstawienie jego poglądów filozoficznych na matematykę i logikę w tym właśnie rozdziale.

Chociaż pierwsze prace Chwistka dotyczyły psychologii eksperymentalnej, to jest on najbardziej znany ze swoich rozpraw logicznych. Chwistek, podobnie jak niektórzy inni logicy polscy (na przykład Leśniewski – por. paragraf 3 w rozdziale 3), w budowaniu i interpretacji teorii logicznych dawał wyraz swoim poglądom filozoficznym. Co więcej, jego badania logiczne były w dużym stopniu motywowane jego poglądami filozoficznymi. Tworząc semantykę, chciał przezwyciężyć idealizm filozoficzny i występował przeciwko koncepcji prawdy absolutnej. Nie zadowalał się też (podobnie jak Leśniewski) rozwiązywaniem konkretnych problemów fragmentarycznych, ale dążył do stworzenia systemu obejmującego całokształt matematyki.

Zainteresowanie Chwistka logiką datuje się od czasu jego studiów w Getyndze, a zwłaszcza od wysłuchania odczytu Poincarégo na wiosnę 1909 roku. Chwistek postanowił połączyć idee Russella i Poincarégo i zreformować teorię typów logicznych przez pominięcie definicji niepredykatywnych. Punktem wyjścia jego badań logicznych była krytyka systemu rozgałęzionej teorii typów Whiteheada–Russella wyłożonego w *Principia Mathematica* (1910–1913) – dotyczyła ona głównie zasady sprowadzalności, głoszącej, że dla każdej funkcji zdaniowej istnieje równoważna jej funkcja zdaniowa tego samego typu i rzędu jeden (tzn. bezkwantyfikatorowa). Pozwalało to na wyeliminowanie definicji niepredykatywnych. Zasada ta ma jednak charakter niekonstruktywny i przez to wprowadza – zdaniem Chwistka – przedmioty idealne. Stanowi ona typowy aksjomat istnienia – a według Chwistka w systemie dedukcyjnym nie powinno przyjmować się żadnych innych założeń jak tylko reguły sensu i reguły dedukcyjne.

Chwistek podjął więc zadanie przebudowy systemu Whiteheada–Russella – dokonał tego w duchu nominalistycznym. Sformułował pewną wersję prostej (uproszczonej) teorii typów[22]. Jej podstawy sfor-

[22] Teoria ta nie dotarła do logików na świecie i została ponownie, niezależnie od Chwistka, sformułowana w roku 1925 przez F.P. Ramseya. O koncepcjach

mułował w pracach „Antynomie logiki formalnej" (1921a), „Zasady czystej teorii typów" (1922a) i „Über die Antinomien der Prinzipien der Mathematik" (1922b). W prostej teorii typów rozróżnia się typy funkcji, ale rezygnuje z rozróżniania ich rzędów. Teoria ta pozwala na eliminację tylko antynomii logicznych (teoriomnogościowych) – podobnie jak czyniła to już rozgałęziona teoria typów Whiteheada–Russella – ale nie usuwa antynomii semantycznych w stylu antynomii Richarda. Chwistek sformułował następnie czystą teorię typów logicznych – teorię typów konstruktywnych (por. 1924 i 1925). Polega ona między innymi na odrzuceniu aksjomatu sprowadzalności. Prowadzi jednak do dużych komplikacji formalnych systemów logicznych (zwłaszcza teorii klas i teorii liczb kardynalnych) wynikających z konieczności brania pod uwagę nie tylko typów, ale i rzędów funkcji zdaniowych (których nie można teraz zredukować do rzędu najniższego). Usuwa więc obiekty niekonstruowalne kosztem zwiększenia stopnia formalnej komplikacji systemu.

Opisane badania prowadziły Chwistka dalej ku budowie pełnej teorii wyrażeń i opierającej się na niej metamatematyki racjonalnej. Miał to być system jeszcze bardziej podstawowy niż logika, który umożliwiłby rekonstrukcję klasycznego rachunku logicznego i całej Cantorowskiej teorii mnogości oraz spełniałby założenia nominalistyczne, a zatem w szczególności był wolny od aksjomatów egzystencjalnych, głównie aksjomatu sprowadzalności i wyboru. System

---

Chwistka wspomniał z uznaniem Russell we wstępie do drugiego wydania *Principia Mathematica*. Zwrócił jednocześnie uwagę na koszty, jakie ona pociąga – sprowadzają się one do konieczności rezygnacji z wielu ważnych części matematyki. Pisał (por. Whitehead, Russell 1925–1927, vol. 1, s. XIV): „Dr Leon Chwistek [w swej *Theory of Constructive Types* – przypis Russella i Whiteheada] podjął heroiczny trud rezygnacji z tego aksjomatu [tzn. aksjomatu sprowadzalności – uwaga moja, R.M.] bez przyjmowania czegoś zastępczego; z jego pracy wynika jasno, że ten wybór zmusza nas do poświęcenia sporej części zwykłej matematyki". ("Dr Leon Chwistek [in his *Theory of Constructive Types* – Russell and Whitehead's footnote] took the heroic course of dispensing with the axiom without adopting any substitute; from his work, it is clear that this course compels us to sacrifice a great deal of ordinary mathematics"). Por. też korespondencję między Chwistkiem a Russellem – zob. Jadacki (1986). Niżej piszemy o przyczynach słabej recepcji prac i wyników Chwistka.

konstruowany przez Chwistka bazował na założeniu, że jego twierdzenia, a zatem i twierdzenia rekonstruowanej w nim logiki klasycznej i teorii mnogości, odnoszą się jedynie do napisów dających się otrzymać w skończonej liczbie kroków za pomocą ustalonej z góry reguły konstrukcji, a nie do tego, co te napisy oznaczają. Przy tym napisy te rozumiane są jako przedmioty fizyczne. W trakcie realizacji swojego programu Chwistek zbliżył się do tej wersji nominalizmu, którą spotykamy we wcześniejszych pracach Willarda Van Ormana Quine'a i Nelsona Goodmana.

Do nominalizmu Chwistka wrócimy jeszcze poniżej. Teraz powiedzmy tylko, że jego koncepcje nie znalazły szerszego uznania i nie odegrały większej roli w rozwoju logiki. Przyczyn tego faktu można dopatrywać się w używaniu przez niego skomplikowanej, nieprzejrzystej i trudnej do odcyfrowania symboliki, jak i w niezbyt czytelnym i raczej niedbałym sposobie prezentacji wyników, w szczególności w braku odpowiednich przykładów, zwłaszcza w miejscach mogących budzić najpoważniejsze wątpliwości, które Chwistek zastępował zwrotami typu „łatwo widać, że..." – wszystko to utrudniało zrozumienie jego propozycji i ocenę ich wartości. Często w swoich rozprawach powoływał się na inne prace rozsiane po różnych czasopismach i przez to trudno dostępne. Jeszcze inną przeszkodą mógł być fakt, że swoje wyniki na terenie podstaw matematyki Chwistek traktował jako argument na rzecz swoich poglądów w rozmaitych kwestiach filozoficznych.

Pewne zainteresowanie pracami logicznymi filozofa daje się zauważyć po roku 1945, gdy zwiększyło się zainteresowanie nominalizmem w filozofii matematyki[23]. Sam system metamatematyki racjonalnej nie został przez Chwistka dostatecznie szczegółowo rozpracowany. Nie mogli tego uczynić też jego współpracownicy (Jan Herzberg, Władysław Hetper czy Jan Skarżyński) ani ucznio-

[23] W latach 1950–1951 J.R. Myhill opublikował serię artykułów poświęconych zbadaniu możliwości wykorzystania systemów metamatematyki racjonalnej Chwistka do dowodu niesprzeczności teorii mnogości w wersji przedstawionej przez Bourbakistów. Por. Myhill (1950, 1951a, 1951b). Dodajmy też, że „Theory of Constructive Types" Chwistka została przedrukowana przez University of Michigan w serii *The Michigan Historical Reprints Series* – por. Chwistek (1988).

wie (Wolf Ascherdorf, Celina Gildner, Kamila Kopelman, Abraham Melamid, Józef Pepis czy Kamila Waltuch), gdyż wszyscy zginęli w czasie II wojny światowej. Chwistek chodził własnymi drogami, a jego badania logiczne nie mieściły się w głównym nurcie historycznego rozwoju logiki. Podobnie jak Leśniewski, pracował w wąskim gronie nad swoimi koncepcjami bez współpracy na przykład z matematykami. Nie miał też ściślejszych kontaktów naukowych z filozofami lwowskimi.

Przejdźmy teraz do dokładniejszej prezentacji poglądów filozoficznych Chwistka związanych z logiką i matematyką. Zwrócimy tu uwagę przede wszystkim na jego sądy w zakresie metodologii nauk dedukcyjnych. Wyłożył je w dziele *Granice nauki* (1935) zaopatrzonym w podtytuł *Zarys logiki i metodologii nauk ścisłych*.

Według Chwistka wiedza ludzka nie jest ani pełna, ani absolutna. Nie może być pełna, ponieważ twierdzenia dotyczące ogółu obiektów prowadzą do sprzeczności. Nie może też być absolutna, gdyż nie ma jednej, absolutnej rzeczywistości. W *Granicach nauki* pisał:

> Z rozważań tych wynika, że zasada sprzeczności wyklucza wiedzę pełną, dającą odpowiedź na wszystkie pytania. Dążenie do takiej wiedzy musi – czy prędzej, czy później – doprowadzić do kolizji ze zdrowym rozsądkiem (1935, s. 20; zob. też 1963, s. 17).

A zdrowy rozsądek jest według niego – obok uznania doświadczenia za podstawowe źródło wiedzy i konieczności schematyzacji poznawanych przedmiotów czy zjawisk – czynnikiem wspólnym wszelkiemu prawidłowemu procesowi poznawczemu. Polega on na odrzuceniu wszelkich założeń, które nie są sprawdzalne doświadczalnie lub są niezgodne z doświadczeniem czy też nie są oparte na niezawodnych stwierdzeniach dotyczących prostych faktów lub nie dają się do takich stwierdzeń logicznie sprowadzić. Zarówno wiedza empiryczna, jak i dedukcyjna są relatywne. Ta pierwsza dlatego, że istnieją różne rodzaje doświadczenia, odpowiadające różnym rzeczywistościom, ta druga zaś z tego powodu, że zależy od przyjętego systemu pojęć. Chwistek mówi tu o relatywizmie racjonalnym.

Chwistek przyjmuje zasadę racjonalizmu poznania i zdecydowanie przeciwstawia się irracjonalizmowi. Racjonalizm polega na tym, że przyjmuje się tylko dwa źródła poznania, a mianowicie doświadczenie i ścisłe rozumowanie. Dotyczy to nie tylko matematyki i nauk ścisłych, ale także nauk empirycznych i filozofii. W *Granicach nauki* pisał:

> [...] punktem wyjścia budowy naszego poglądu na świat nie powinny być męty metafizyczne, ale prawdy proste i jasne, oparte na doświadczeniu i ścisłym rozumowaniu (1935, s. V).

Przeciwstawia się więc irracjonalizmowi, metafizyce i idealizmowi w filozofii i matematyce[24]. Ostro krytykuje Platona, Hegla, Husserla, Bergsona. Widząc błędy pozytywizmu, dodatnio ocenia jednak jego koncepcje epistemologiczne. Dodajmy, że Chwistek bardzo wysoko cenił też materializm dialektyczny, nie dostrzegając zasadniczych przeciwieństw między nim a pozytywizmem. Swoje poglądy w zakresie poznania określał mianem racjonalizmu krytycznego i przeciwstawiał go racjonalizmowi dogmatycznemu[25].

Wyjściem z trudności, których źródłem jest irracjonalizm, i orężem w walce z nim ma być logika formalna, a zwłaszcza stworzona przez niego metamatematyka racjonalna. Chwistek zaczyna wstęp do *Granic nauki* zwrotem „Przeżywszy okres bezprzykładnego rozrostu irracjonalizmu" (1935, s. III), a kończy słowami „Historia uczy, że ostateczne zwycięstwo było zawsze udziałem narodów opartych na zasadach ścisłego rozumowania". Pisze też:

> Z chwilą, kiedy system ten [tzn. system metamatematyki racjonalnej – uwaga moja, R.M.] zostanie wykończony, będzie nam wolno twierdzić,

---

24 Chwistek odrzuca irracjonalizm i idealizm nie tylko jako błędne teorie filozoficzne, ale także dlatego, że są one, jego zdaniem, źródłem ludzkiego cierpienia, niesprawiedliwości społecznej, okrucieństwa i wojen.

25 Zwróćmy przy okazji uwagę na to, że pewną trudnością w interpretowaniu poglądów Chwistka jest fakt, iż używa on często klasycznych terminów filozoficznych, ale nadaje im swoiste znaczenie, którego zresztą w ogóle nie wyjaśnia lub też wyjaśnia w sposób niewystarczający.

> że rozporządzamy niezawodnym aparatem, oddzielającym myślenie ścisłe od innych form myślenia (1935, s. XXIV).

Poglądy epistemologiczne Chwistka były bliskie neopozytywizmowi. Filozof twierdził, że przedmiotem poznania naukowego może być jedynie to, co dane jest lub dane być może w doświadczeniu, a więc jedynie to, co widzimy czy spostrzegamy za pomocą zmysłów wspomaganych ewentualnie przez przyrządy:

> [...] jeśli mówimy o rzeczywistości, to nie mamy na myśli jakiegoś idealnego obiektu, tylko te schematy, z jakimi w danym wypadku mamy do czynienia (1935, s. 229; zob. też 1963, s. 205).

Zarówno w nauce, jak i w filozofii Chwistek zalecał stosowanie metody konstrukcyjnej. Wyłożył ją w pracy „Zastosowanie metody konstrukcyjnej do teorii poznania" (1923). Choć sposób ów może być odnoszony głównie do nauk dedukcyjnych, to znajduje również zastosowanie w naukach empirycznych i w filozofii. U podstaw metody konstrukcyjnej leży analiza pojęć intuicyjnych używanych w danej dyscyplinie. Pozwala ona na wyodrębnienie pojęć pierwotnych, których znaczenie scharakteryzowane jest w aksjomatach. Na bazie aksjomatów otrzymuje się teraz twierdzenia za pomocą praw logiki (formalnej). W późniejszym okresie Chwistek doszedł do wniosku, że konstruowanie systemów dedukcyjnych na gruncie filozofii jest bezcelowe – nie da się takiego systemu zbudować z powodu stopnia komplikacji badań filozoficznych.

Powiedzieliśmy wyżej, że według Chwistka przedmiotem poznania może być jedynie to, co dane jest w doświadczeniu. Mamy jednak do czynienia z różnymi rodzajami doświadczenia. W ten sposób dochodzimy do najbardziej znanej i oryginalnej koncepcji filozoficznej Chwistka, a mianowicie do jego teorii wielości rzeczywistości[26]. Wyłożył ją po raz pierwszy w artykule „Trzy odczyty odnoszące się do pojęcia istnienia" (1917), stwierdzając, że „intuicyjna wiara w jedną rzeczywistość wydaje mi się przesądem" (1917, s. 145)

---

[26] Teorię tę czasami porównuje się i zestawia z Poppera koncepcją trzech światów.

i dopatrując się pojęcia wielu rzeczywistości już u Pascala i Macha (por. 1917, s. 149–150). Rozwijał ją dalej w książce *Wielość rzeczywistości* (1921b), a ostateczna jej wersja została ogłoszona w *Granicach nauki* (1935). Jej podstawy wyłożył jeszcze raz w angielskim wydaniu *Granic nauki*, które ukazało się w roku 1948, a więc już po jego śmierci, ale wersja ta nie wnosi niczego nowego.

W pierwszym okresie (tzn. przed rokiem 1925) Chwistek rozróżniał znaczenie pojęć „rzeczywistość" i „istnienie". Według niego to ostatnie ma charakter ogólniejszy, ponieważ może dotyczyć nie tylko przedmiotów rzeczywistości, ale także przedmiotów abstrakcyjnych, takich jak przedmioty matematyki:

> Gdybyśmy założyli, że wszystko, co istnieje, jest rzeczywiste, to musielibyśmy uznać za rzeczywiste stosunki matematyczne wraz z elementami doświadczenia (1917, s. 145).

W „Trzech odczytach, odnoszących się do pojęcia istnienia" (1917) Chwistek wyróżnił trzy stanowiska w kwestii istnienia: nominalizm, realizm i hiperrealizm. Według niego nominaliści „żądają określeń słownych, wykluczających sprzeczność", realiści „obchodzą się bez określeń słownych, ale wykluczają przedmioty sprzeczne", hiperrealiści zaś „obchodzą się bez określeń słownych i nie wykluczają przedmiotów sprzecznych" (1917, s. 126).

Początkowo Chwistek przyjmował tylko dwie rzeczywistości i próbował formalizować swoją teorię. W *Granicach nauki* rezygnuje z prób formalizacji i przyjmuje już cztery rodzaje rzeczywistości odpowiednio do możliwych rodzajów doświadczenia. Mamy więc rzeczywistość wrażeń, rzeczywistość wyobrażeń, rzeczywistość rzeczy (rzeczywistość życia potocznego) i wreszcie rzeczywistość fizykalną (konstruowaną w naukach ścisłych). Poszczególnym rzeczywistościom przypisuje przy tym istnienie niezależne od siebie oraz pełne równouprawnienie teoretyczne.

Omówiwszy pokrótce ogólne koncepcje metodologiczne i ontologiczne Chwistka, przejdźmy teraz do jego poglądów bezpośrednio związanych z filozofią matematyki (choć już wcześniej zwracaliśmy uwagę na pewne jego sądy związane z matematyką, a leżące u źródeł jego koncepcji logicznych). Z całą mocą dochodzi tu do głosu jego zdecydowane stanowisko nominalistyczne.

Otóż, według Chwistka, przedmiotem nauk dedukcyjnych, a więc i matematyki są wyrażenia konstruowane w tych naukach zgodnie z przyjętymi tam regułami konstrukcji. W konsekwencji przedmiotem matematyki nie są przedmioty idealne, takie jak na przykład punkty, proste, liczby czy zbiory. Przy tym wyrażenia będące przedmiotem matematyki są przedmiotami fizycznymi danymi nam w doświadczeniu. Mogą one być przekształcane zgodnie z przyjętymi regułami. W każdym danym systemie przyjmuje się takie reguły, jak również pewne wyrażenia, które odgrywają rolę aksjomatów, z jakich wyprowadzamy twierdzenia. Reguły przekształcania i aksjomaty dobiera się tak, by wyrażenia mogły być interpretowane jako opisy rozważanych stanów rzeczy. Aby móc stosować teorie dedukcyjne do nauk szczegółowych i ogólniej do poznawania konkretnych dziedzin rzeczywistości, należy elementy tej ostatniej poddać schematyzacji.

Według Chwistka geometria jest nauką doświadczalną. W rozdziale VIII *Granic nauki* pisał:

> Geometria jest nauką doświadczalną. Polega ona na mierzeniu odcinków, kątów i powierzchni. Tak pojmowali ją Egipcjanie i taką pozostała w istocie swojej do dzisiaj. To, co uważa się powszechnie za geometrię za naszych czasów, tj. to, o czym pisze się w podręcznikach, jest osobliwą mieszaniną geometrii doświadczalnej i metafizyki geometrycznej, którą pozostawili nam w spadku Grecy pod postacią elementów Euklidesa (1935, s. 190; zob. też 1963, s. 170).

Powstanie w XIX wieku systemów geometrii nieeuklidesowej Bolyai'a, Gaussa i Łobaczewskiego, które Chwistek uważa za najważniejsze dokonanie w dziedzinie nauk ścisłych, obaliło, jego zdaniem, Kantowski idealizm[27]. Geometrie te pokazały, że na przykład

[27] Teza, że geometrie nieeuklidesowe obaliły Kantowską filozofię geometrii, wydaje się nie do końca prawdziwa. Otóż, jeśli uwzględnić to, że Kant rozróżniał postulowanie istnienia obiektu i jego konstrukcję, to teza ta upada. Postulowanie istnienia wymaga bowiem tylko wewnętrznej niesprzeczności danego pojęcia,

pojęcie prostej nie ma charakteru obiektywnego, ale zależy od przyjętych aksjomatów. Może to sugerować, że właściwą filozofią jest dla geometrii konwencjonalizm. Istotnie, w pierwszych swych pracach, na przykład w cytowanym już artykule „Trzy odczyty odnoszące się do pojęcia istnienia" (1917), konstatuje, że istnienie systemów geometrii nieeuklidesowej, które są wewnętrznie niesprzeczne, obala tezę o apriorycznym charakterze geometrii. Wydaje się, że byłby też skłonny zaakceptować konwencjonalizm, choć wyraźnie tego nie stwierdza:

> Obydwa systemy [tzn. system geometrii euklidesowej i systemy geometrii nieeuklidesowej – uwaga moja, R.M.] są wolne od sprzeczności, można je bowiem sprowadzić do geometrii analitycznej, nie wykazują więc zasadniczych różnic z punktu widzenia teoretycznego. Intuicja godzi się z łatwością z twierdzeniami Łobaczewskiego, które tylko na pierwszy rzut oka wydają się paradoksalne [...]. Dochodzimy więc do wniosku, że obydwie geometrie są w równym stopniu prawdziwe, każda z nich bowiem odnosi się do innych linii prostych; tylko różnice pomiędzy obydwoma gatunkami tych linii prostych nie dadzą się uchwycić przy pomocy środków doświadczalnych ani intuicyjnych, tak że kawałek linii prostej, który narysujemy lub pomyślimy sobie, może służyć za ilustrację jednego lub drugiego gatunku zależnie od naszej woli (1917, s. 144–145).

W *Granicach nauki* jednak Chwistek kategorycznie odrzucił konwencjonalizm, twierdząc, że geometrię – podobnie jak i wszystkie inne podstawowe nauki doświadczalne – należy oprzeć na teorii wyrażeń. Konwencjonalizm bowiem wprowadza twory hipotetyczne – jak to było już u Johna Stuarta Milla, czy potem u propagatora tego kierunku, tzn. u Poincarégo[28]. Pisał:

---

a konstrukcja zakłada pewną strukturę przestrzeni percepcyjnej. Tak więc można postulować istnienie sfery 5-wymiarowej, bo pojęcie to jest wewnętrznie niesprzeczne, ale nie można jej skonstruować, gdyż przestrzeń percepcyjna jest 3-wymiarowa. Kant nie twierdził niczego, co przeczyłoby możliwości zbudowania wewnętrznie niesprzecznych systemów geometrii innych niż geometria euklidesowa.

[28] Dodajmy tu, że według Chwistka konwencjonalizm stał się też źródłem reakcyjnych poglądów społecznych, sprowadzając prawdę i prawdziwość do skuteczności i prowadząc w rezultacie do wzmocnienia pozycji klas panujących: „Jest

> Okazuje się, że dotarcie do ogólnego pojęcia geometrii bez formuł jest niemożliwe. Jasne jest, że idąc tą drogą, musimy dojść do unicestwienia geometrii jako nauki o idealnych utworach przestrzennych. [...] Żeby mówić o różnych czterowymiarowych czasoprzestrzeniach, musimy się odwołać do czasoprzestrzeni pięciowymiarowej. Jest jasne, że wszystko to ma tyle sensu, ile zawierają go formuły matematyczne (1935, s. 186–187).

Podobnie jak geometrię, zdaniem Chwistka, należy traktować arytmetykę, analizę matematyczną i inne teorie matematyczne, uzyskując w ten sposób konsekwentnie nominalistyczne ich interpretacje.

Los koncepcji filozoficznych Chwistka był podobny do losu jego koncepcji logicznych (o czym mówiliśmy wyżej). Chwistek kroczył samotnie własnymi drogami. Jego pomysły spotykały się często z ostrą krytyką – jak sam pisał w *Zagadnieniach kultury duchowej w Polsce*:

> [...] sfery zawodowych filozofów zareagowały na ideę wielości rzeczywistości już to jej lekceważeniem, już to bezprzykładnym oburzeniem, graniczącym z dziką wściekłością (1933; por. 1961, s. 203).

Jakie były przyczyny takich reakcji? Otóż badania filozoficzne Chwistka nie miały charakteru systematycznego i wydaje się, że nie były przez niego traktowane z pełnym poczuciem odpowiedzialności (jak pisze Pasenkiewicz w *Przedmowie* do wyboru dzieł Chwistka – por. 1961, s. VII). Nie wyjaśnił wielu używanych przez siebie terminów, jego koncepcje „wcześniej były ogłaszane niż sprawdzone" (1961, s. VII).

Dodajmy jeszcze na koniec, że mimo opisanych okoliczności, pojawiają się jednak w literaturze odwołania i nawiązania do Chwistka – na przykład filozof australijski Richard Sylvan w swej książce *Transcendental Metaphysics* (1997) odwołuje się do jego pluralizmu.

---

dobrze zauważyć, że idealizm ubrany w piórka konwencjonalizmu stał się jeszcze bardziej niebezpiecznym narzędziem w rękach elementów reakcyjnych od starego dogmatycznego idealizmu" (1935, s. 186).

ROZDZIAŁ 3

Lwowsko-warszawska szkoła filozoficzna

Rozdział ten poświęcony jest prezentacji i analizie poglądów filozoficznych na matematykę i logikę, jakie głosili przedstawiciele lwowsko-warszawskiej szkoły filozoficznej, a zwłaszcza uczeni zaliczani do tzw. warszawskiej szkoły logicznej. Powiemy więc o Janie Łukasiewiczu, Stanisławie Leśniewskim, Kazimierzu Ajdukiewiczu i Tadeuszu Kotarbińskim oraz Alfredzie Tarskim. Do rozdziału tego dołączyliśmy Zygmunta Zawirskiego, który działał we Lwowie, Poznaniu i Krakowie, był jednak cały czas związany ze szkołą lwowsko-warszawską (por. Wstęp). Rozważymy też poglądy dwóch uczonych zaliczanych zazwyczaj do tzw. drugiego pokolenia szkoły lwowsko-warszawskiej, tzn. Andrzeja Mostowskiego i Henryka Mehlberga.

1. Jan Łukasiewicz

Łukasiewicz zajmował się filozofią (zwłaszcza w początkowym okresie twórczości) i – nade wszystko – logiką matematyczną. Z wykształcenia był filozofem, miał jednak znakomite wyczucie matematyczne. Kierował katedrą filozofii na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Uniwersytetu Warszawskiego, gdzie prowadził wykłady z logiki dla studentów matematyki. Cieszyły się one wielką popularnością. Jeden z ich słuchaczy, wybitny polski matematyk Kazimierz Kuratowski, tak je wspominał po latach:

> Innym profesorem[1], który wywarł duży wpływ na zainteresowania młodej kadry matematycznej, był Jan Łukasiewicz. Prócz wykładów z logiki i historii filozofii, prowadził profesor Łukasiewicz bardziej

[1] Wcześniej autor mówił o Stefanie Mazurkiewiczu i Zygmuncie Janiszewskim – uwaga moja, R.M.

> specjalistyczne wykłady, które rzucały nowe światło na metodologię nauk dedukcyjnych i podstawy logiki matematycznej. Aczkolwiek Łukasiewicz nie był matematykiem, miał jednak wyjątkowo dobre wyczucie matematyczne, dzięki czemu wykłady jego znajdowały szczególnie silny oddźwięk u matematyków (1973, s. 32).

Przesunięcie akcentów w zakresie zainteresowań naukowych Łukasiewicza z filozofii ku logice matematycznej zbiega się z ogłoszeniem przez Janiszewskiego programu rozwoju matematyki w Polsce (por. paragraf 1 w rozdziale 2). Przypisywał on bardzo poważną rolę badaniom w zakresie logiki matematycznej i podstaw matematyki, w szczególności teorii mnogości. Łukasiewicz wszedł (wraz z Leśniewskim – por. paragraf 3 w rozdziale 3) do komitetu redakcyjnego stworzonego przez Janiszewskiego czasopisma *Fundamenta Mathematicae*. Obecność w tym komitecie dwóch logików (z wykształceniem filozoficznym) obok trzech matematyków (Zygmunta Janiszewskiego, Stefana Mazurkiewicza i Wacława Sierpińskiego) stanowi znakomity przykład współpracy logików i matematyków, typowy dla szkoły warszawskiej, współpracy, która przyniosła wspaniałe owoce[2].

Zanim przejdziemy do omówienia poglądów filozoficznych Łukasiewicza na matematykę i logikę, powiedzmy kilka słów o jego

---

[2] Warto pewnie w tym miejscu dodać, że stosunki między logikami i matematykami nie były w Warszawie zawsze idealne. W końcu lat 20. na przykład nastąpił pewien konflikt, którego skutkiem było m.in. opuszczenie redakcji *Fundamenta Mathematicae* przez Łukasiewicza i Leśniewskiego około 1930 roku. Powody tego nie zostały nigdzie dokładnie opisane. Woleński (1997) pisze, że źródłem konfliktu były różnice poglądów Leśniewskiego i Sierpińskiego na temat teorii mnogości, którym dali wyraz w swoich publikacjach. Leśniewski miał negatywny stosunek do standardowej teorii mnogości, którą chciał zastąpić swoją mereologią. Uważał, że teoria mnogości zawiera błędy. Sierpiński odwdzięczył się Leśniewskiemu złośliwymi uwagami o jego artykule złożonym do druku w *Fundamenta Mathematicae* – chodzi tu zapewne o drugą część artykułu „Grundzüge eines neuen System der Grundlagen der Mathematik", którego część pierwsza ukazała się w *Fundamenta* w roku 1929 (por. Leśniewski 1929). W odpowiedzi Leśniewski wycofał swój tekst i zrezygnował z członkostwa w komitecie redakcyjnym. Łuksiewicz – okazując solidarność z Leśniewskim – również odszedł. Dodajmy, że konflikt ten nie zaważył jednak na dalszym rozwoju logiki i w szczególności warszawskiej szkoły logicznej.

pracach logicznych. Jest to tym bardziej wskazane, że Łukasiewicz – jako typowy przedstawiciel szkoły lwowsko-warszawskiej – był zwolennikiem filozofii naukowej, opartej na ścisłych podstawach metodologicznych. Jego poglądy na rozmaite kwestie związane z filozofią matematyki i logiki pozostawały więc w ścisłym związku z jego badaniami logicznymi. Łukasiewicz postulował nawet budowanie filozofii w postaci systemu aksjomatycznego konfrontowanego z doświadczeniem. Był przekonany, że logika dostarcza narzędzi pozwalających w sposób ścisły rozwiązywać problemy naukowe, w tym także te natury filozoficznej. O swoim zafascynowaniu logiką matematyczną i jej metodami i o motywach zmiany zainteresowań z filozofii na logikę pisał:

> Krytyczna ocena moja dotychczasowej filozofii jest reakcją człowieka, który przestudiowawszy filozofię i naczytawszy się do syta różnych książek filozoficznych, zetknął się nareszcie z metodą naukową nie tylko w teorii, ale w żywej i twórczej praktyce osobistej. Jest to reakcja człowieka, który doznał osobiście tej szczególnej radości, jaką daje poprawne rozwiązanie jednoznacznie sformułowanego zagadnienia naukowego, które w każdej chwili można skontrolować przy pomocy ściśle określonej metody i o którym wie się po prostu, że musi być takie, a nie inne, i że pozostanie w nauce po wieczne czasy jako trwały wynik metodycznego badania (1936, s. 123).

Osiągnięcia naukowe Łukasiewicza na polu logiki matematycznej pozwalają traktować go jako jednego z najwybitniejszych przedstawicieli tej dziedziny w XX wieku – w szczególności był chyba jednym z najwybitniejszych twórców rachunków zdaniowych. Do jego osiągnięć należą między innymi: (1) opracowanie specjalnej notacji logicznej (zwanej symboliką beznawiasową, symboliką Łukasiewicza lub – zwłaszcza w kręgach anglosaskich – symboliką polską), która znakomicie nadawała się do prowadzonych w warszawskiej szkole logicznej badań nad rachunkami logicznymi[3]; (2) stworzenie logik

[3] Łukasiewicz opracował zasady swej symboliki w 1924 roku. Sam pomysł, na którym ona się opiera, tzn. pisanie funktora przed argumentami, pochodzi od L. Chwistka – mówił on o tym pomyśle w odczycie wygłoszonym w Warszawie na początku lat 20. Trzeba jednak zauważyć, że nazwa „symbolika Łukasiewicza"

wielowartościowych; (3) badanie – opierając się na tych logikach – spójników modalnych i zbudowanie tzw. Ł-modalnych systemów logicznych; (4) podanie szeregu układów aksjomatów dla klasycznego rachunku logicznego (w szczególności zbudowanie aksjomatycznego systemu implikacyjno-negacyjnego dla rachunku zdań); (5) badania nad własnościami metalogicznymi różnych systemów rachunku zdań. Zajmował się także historią logiki, w której stworzył właściwie nowy paradygmat badań. Jego metoda polegała na analizie oryginalnych tekstów historycznych przy użyciu aparatu pojęciowego współczesnej logiki matematycznej. Przyniosło to znakomite rezultaty. Łukasiewicz pokazał, że logika stoików była inna niż logika Arystotelesa – ta pierwsza była w istocie logiką zdań, ta druga zaś logiką nazw. Prowadził też za pomocą tych samych metod badania nad sylogistyką Arystotelesa (por. 1951). Był też, co jest nie bez znaczenia, świetnym organizatorem życia naukowego. Wraz z Leśniewskim stworzył tzw. warszawską szkołę logiczną. To na prowadzonym przez niego seminarium dojrzewali tacy logicy, jak: Alfred Tarski, Stanisław Jaśkowski, Adolf Lindenbaum, Jerzy Słupecki, Bolesław Sobociński czy Mordechaj Wajsberg.

Przejdźmy teraz do filozoficznych poglądów Łukasiewicza na matematykę i logikę. Zacznijmy od kwestii rozumienia logiki jako nauki. W recenzji z pracy Władysława Biegańskiego *Czym jest logika?* znajdujemy następujące sformułowanie:

> Logika tyczy się nie tylko *dowodzenia*[4], ale w ogóle *rozumowania*, przy czym zgodnie z prof. Twardowskim używam terminu „rozumowanie" jako ogólniejszego od „dowodzenia" (por. rozprawę moją *O twórczości w nauce*[5], s. 8). Po wtóre, dowodzenie czy rozumowanie jest także *myśleniem*, a więc psychologizm powraca. Zgodziłbym się natomiast na odróżnienie logiki jako „nauki" i „sztuki", tylko użyłbym innych terminów. Sądzę mianowicie, że logika jako nauka *teoretyczna* bada stosunki, w jakich zdania formalne (np. S jest P) pozostają do siebie ze

jest usprawiedliwiona, ponieważ symbolika beznawiasowa to coś więcej niż samo tylko pisanie funktora przed argumentami.

4 Biegański wiązał logikę z dowodzeniem – uwaga moja, R.M.

5 Por. Łukasiewicz (1912a) – uwaga moja, R.M.

> względu na swoją prawdziwość lub fałszywość, i ustanawia prawa tych stosunków (np. „jeśli prawdą jest, że S jest M i M jest P, to prawdą jest, że S jest P"); jako nauka praktyczna stosuje te prawa do rozwiązywania *zadań* z zakresu *rozumowania* w ogóle, np. do wyprowadzenia jakiejś konkluzji, jak we wnioskowaniu indukcyjnym, do sprawdzenia lub udowodnienia jakiejś tezy itp. Pogląd ten, tu tylko naszkicowany, przedstawię może w jakiejś pracy obszerniej (Łukasiewicz 1912b).

Łukasiewicz obietnicy swej jednak nie spełnił, musimy więc zadowolić się przytoczonymi słowami. Mamy więc tu rozróżnienie logiki teoretycznej i praktycznej, które odpowiada dystynkcji *logica docens* i *logica utens*. Obie Łukasiewicz ujmuje antypsychologistycznie. Mówiąc krótko, logikę rozumie on jako teorię rozumowań. Przy tym dzielił on rozumowania na dedukcyjne i redukcyjne, a dalej dedukcyjne jeszcze na wnioskowanie i sprawdzanie, a redukcyjne na dowodzenie i tłumaczenie (por. 1912a). Trzeba podkreślić, że Łukasiewicz ma tu na myśli wszelkiego rodzaju rozumowania, w których pojawia się relacja racji do następstwa. Woleński (1999) dopatruje się źródeł tego stanowiska Łukasiewicza w fakcie, że – choć nie cenił on zbyt wysoko indukcji – był jednak zainteresowany na tyle szerokim pojęciem rozumowania, by w jego zakresie mieściło się także rozumowanie indukcyjne, które traktował jako rodzaj redukcji, oraz w tym, że w szkole lwowsko-warszawskiej logikę traktowano jako *organon* (w duchu Arystotelesa), który może być stosowany przy rozwiązywaniu wszelkich zadań intelektualnych. Stąd szerokie rozumienie zakresu logiki praktycznej wymuszało takież pojmowanie logiki teoretycznej[6].

W tym kontekście należy też spojrzeć na problem stosunku logiki do filozofii i do matematyki. Przede wszystkim Łukasiewicz nie aprobował terminu „logika filozoficzna". W skrypcie *Elementy logiki matematycznej* pisał:

> Jeżeli używamy tu terminu „logika filozoficzna", to chodzi nam o ten kompleks zagadnień, które znajdują się w książkach pisanych przez

---

[6] Por. poglądy w tym względzie Ajdukiewicza (zob. paragraf 5 w rozdziale 3), Zawirskiego (zob. paragraf 2 w rozdziale 3) czy wreszcie Tarskiego (zob. paragraf 6 w rozdziale 3).

> filozofów, o tę logikę, której uczyliśmy się w szkole średniej. Logika filozoficzna nie jest jednolitą nauką, zawiera w sobie zagadnienia rozmaitej treści; w szczególności wkracza w dziedzinę psychologii, gdy mówi nie tylko o zdaniu w sensie logicznym, ale także o tym zjawisku psychicznym, które odpowiada zdaniu, a które nazywa się „sądem” albo „przekonaniem” (1929a, s. 12).

Uważał, że łączenie logiki z psychologią jest skutkiem błędnego pojmowania przedmiotu badań logicznych:

> Mówi się często, że logika jest to nauka o prawach myślenia, a ponieważ myślenie jest to czynność psychiczna, więc logika powinna być częścią psychologii (1929a, s. 12).

Logika nie jest jednak częścią psychologii, ponieważ zagadnienia natury psychologicznej związane z myśleniem należy badać za pomocą zupełnie innych metod niż te, które stosuje się w logice. Do logiki nie należą też związane z myśleniem kwestie natury epistemologicznej, rozważane w logice filozoficznej, takie jak na przykład problem definicji prawdy czy kryterium prawdy.

Łukasiewicz nie cenił logiki filozoficznej – uprawianej przez siebie logiki formalnej nie był skłonny zaliczać do filozofii ani też traktować jej jako służebnicę tejże. Uważał ją za naukę samodzielną i autonomiczną. W artykule „O znaczeniu i potrzebach logiki matematycznej” pisał:

> W Polsce, a zwłaszcza w Warszawie, traktuje się dziś logikę matematyczną jako naukę samodzielną, mającą swe własne cele i zadania. Systemy dedukcyjne, należące do logiki, są zdaniem naszym równie ważne, a może nawet ważniejsze, bo bardziej podstawowe niż różne systemy dedukcyjne zaliczane do matematyki. Rozumiemy swoistość zagadnień logicznych i nie traktujemy ich jedynie pod tym kątem widzenia, czy rozwiązanie ich przyda się na coś matematykom, czy też nie (1929b, s. 606–607).

Logika nie jest więc, jego zdaniem, nauką pomocniczą matematyki. Nie grozi jej też – w Polsce przynajmniej – to, że zejdzie „na manowce spekulacji filozoficznej" (1929b, s. 605). Gwarancją tego jest fakt, że „matematycy polscy, którzy z nami współdziałają, myślą zbyt trzeźwo, by ulegać nienaukowym fantazjom" oraz to, że „niemal wszyscy filozofowie, uprawiający w Polsce logikę matematyczną, to uczniowie prof. Twardowskiego, należą więc do tak zwanej lwowskiej szkoły filozoficznej, w której nauczyli się myśleć jasno, sumiennie i metodycznie" (1929b, s. 605). Dodajmy, że przekonanie o autonomiczności logiki było podzielane także przez niektórych matematyków, m.in. przez Janiszewskiego (por. paragraf 1 w rozdziale 2) oraz że w sformułowanym przez niego programie rozwoju matematyki przyznawano logice centralne miejsce. Współdziałanie matematyków i filozofów przy tworzeniu logiki matematycznej w Polsce Łukasiewicz uważał za okoliczność nader korzystną. W cytowanym wyżej artykule pisał:

> Matematycy bowiem nie dopuszczą, by logika matematyczna zmieniła się w jakąś spekulację filozoficzną, filozofowie zaś obronią tę naukę przed niewolniczym stosowaniem w niej metod matematycznych i zacieśnieniem jej do roli pomocniczej nauki matematycznej (1929b, s. 606).

Z naciskiem podkreślał:

> Wiemy dziś w Warszawie, że nie ma dwóch logiki matematycznej i filozoficznej; istnieje jedna tylko logika, zapoczątkowana przez Arystotelesa, uzupełniona przez stoików, uprawiana z niemałą nieraz subtelnością przez logików średniowiecznych, nierozumiana i zaniedbana przez filozofię nowożytną, a rozkwitająca dziś na nowo w doskonalszej postaci dzięki wysiłkom logików matematycznych (1929b, s. 607).

Istotną cechą logiki matematycznej jest jej ścisłość naukowa. Przy tym logika matematyczna przewyższa ścisłością samą matematykę. Matematycy powinni – jak pisze Łukasiewicz (1929b, s. 607) – wzorować się na logice w budowaniu swoich systemów i w dowodzeniu swoich twierdzeń. I dodaje:

> I na tym właśnie polega główne znaczenie logiki matematycznej, zarówno dla matematyki, jak i dla wszystkich nauk (1929b, s. 611).

W artykule „O twórczości w nauce" (zamieszczonym w *Poradniku dla samouków*) pisał:

> Logikę wraz z matematyką można by przyrównać do misternej sieci, którą zarzucamy w niezmierną toń zjawisk, by wyławiać z niej perły syntez naukowych. Są to potężne *narzędzia* badania, lecz tylko narzędzia (1912a, s. 13).

O poglądach Łukasiewicza na temat roli i miejsca logiki w stosunku do matematyki można dowiedzieć się też sporo z polemiki, jaka wywiązała się po opublikowaniu jego artykułu „O pojęciu wielkości. (Z powodu dzieła Stanisława Zaremby)" (1916), w którym poddał analizie metodologicznej *Arytmetykę teoretyczną* Stanisława Zaremby (1912). Z dyskusji tej wyraźnie wynika, że Łukasiewicz uważał – inaczej niż Zaremba (por. paragraf 2 w rozdziale 4) – iż logika matematyczna należy do centrum matematyki i winna być traktowana jako dyscyplina autonomiczna.

Ze względu na znaczenie tych kwestii warto tu powiedzieć więcej o samej polemice i poglądach biorących w niej udział osób[7].

Jeden ze swych kursów dla studentów matematyki Uniwersytetu Warszawskiego w roku 1916 Łukasiewicz (kierujący jedną z katedr filozofii) poświęcił metodologii nauk dedukcyjnych. Analizował tam – jak wspomina Kazimierz Kuratowski, jeden ze słuchaczy – „zasady, którym powinien czynić zadość każdy system aksjomatów (takie jak niesprzeczność i niezależność aksjomatów)" (1981, s. 64). Na wykładach tych[8] Łukasiewicz poddał szczegółowej analizie metodologicznej dzieło Zaremby *Arytmetyka teoretyczna* i zakwestionował użytą tam skomplikowaną zasadę, która miała zastąpić zasadę niezależności aksjomatów.

---

7 Odwołujemy się przy tym do rozdziału VIII książki Woleńskiego (1997).

8 Podstawą tych wykładów był zapewne artykuł Łukasiewicza „O pojęciu wielkości. (Z powodu dzieła Stanisława Zaremby)" (1916) ukończony w maju 1915 roku.

Analiza Łukasiewicza dotyczyła przede wszystkim definicji wielkości podanej przez Zarembę. Otóż Zaremba pisał:

> Wielkością nazywamy każdą rzecz, która uważana być może za jeden z przedmiotów stanowiących razem oznaczoną, nieskończenie liczną klasę rzeczy takich, z których każde dwie *A* i *B* są na podstawie pewnych do rozważanej klasy specjalnie przystosowanych, a z zasadami przytoczonymi w ustępie poprzedzającym zgodnych [chodzi tu o zasady równości i nierówności – uwaga moja, R.M.] definicji, pomiędzy sobą porównywalne, zakładając przy tym, że jakąkolwiek liczbę całkowitą oznaczylibyśmy przez *n*, będziemy zawsze mogli znaleźć w rozważanej klasie *n* takich rzeczy, żeby żadne dwie z nich nie były sobie równe (1912, s. 14).

Łukasiewicz zarzucił temu sformułowaniu – i innym podobnym – że ujmuje w jednym zdaniu kilka zasad, utrudniając przez to zrozumienie logicznej struktury samej definicji i dowodów, w których ta definicja występuje. W konsekwencji dowody podane przez Zarembę są – zdaniem Łukasiewicza – niezupełne. U źródeł problemu leży u Zaremby koncepcja zdań pozbawionych treści. Dla przykładu: według niego zdanie postaci „2 – 5 jest mniejsze od zera" jest pozbawione treści, jeśli rozpatrywać je w arytmetyce liczb naturalnych. Aby uniknąć trudności, Zaremba przyjmuje, że niezależność danego układu aksjomatów może być rozważana jedynie przy założeniu, że w rozważanym układzie nie ma zdań bez treści. Zdaniem Łukasiewicza pojęcie zdania pozbawionego treści jest mętne i psychologiczne, zmusza do rezygnacji z zasady wyłączonego środka i niepotrzebnie komplikuje zasadę niezależności aksjomatów. Samo pojęcie wielkości jest u Zaremby zbyt rozwlekłe i może być – na wiele sposobów – uproszczone.

Artykuł Łukasiewicza (1916) stał się początkiem trwającej trzy lata polemiki, w której głos zabrali również Kazimierz Kuratowski, Tadeusz Czeżowski oraz Leon Chwistek. Zaremba odpowiedział na tekst Łukasiewicza (1916) artykułem „O niektórych poglądach p. Łukasiewicza na metodykę nauk dedukcyjnych" (1917), w którym starał się sprecyzować pojęcie zdania bez treści. Odwołał się przy tym do teorii typów Russella, w której można mówić o zakresie, w jakim dane zdanie może być sensownie zaprzeczone lub stwierdzone. Następnie do dyskusji włączył się Kuratowski (por. 1917), który powiązał problem zdań pozbawionych treści z teorią definicji – zauważył mianowicie, że istnienie takich zdań jest niezgodne z postulatem kompletności definicji i musi prowadzić do zmiany pojęcia wynikania. Kuratowski i Zaremba wymieniali jeszcze później uwagi (por. Zaremba 1918a, Kuratowski 1918 i Zaremba 1918b), ale dotyczyły one już nie kwestii zasadniczych, a szczegółów. Czeżowski (1918) zakwestionował prawomocność odwołania się Zaremby do Russella i teorii typów, argumentując, że tam sensowność jest związana z zasadą niemieszania typów. Opinię taką wyraził też Chwistek w artykule (1919), pisząc, że zdania traktowane przez Zarembę jako zdania pozbawione treści, są w świetle teorii typów po prostu fałszywe.

Z punktu widzenia współczesnej logiki matematycznej cały problem, który był przedmiotem polemiki, daje się rozwiązać przez relatywizację formalizmu do pewnej zadanej interpretacji czy modelu. Mówimy tu jednak o tym sporze, gdyż odsłonił on różne podejścia do kwestii miejsca i roli logiki w matematyce. Zaremba uważał, że logika winna pełnić w matematyce rolę pomocniczą – powinna służyć budowaniu poprawnych rozumowań matematycznych, a więc należy ona zasadniczo do propedeutyki matematyki, a nie jest przedmiotem studiów samych dla siebie. W szczególności więc nie może być mowy o żadnym priorytecie logiki w stosunku do matematyki. Postulaty zupełności dowodów i zbędności (wynikającej z eliminowalności) definicji, czego żądała i co podkreślała „nowa" logika matematyczna, są zdaniem Zaremby jedynie balastem i raczej przeszkadzają, utrudniając zrozumiałość i komunikatywność. Świadczą o tym poniższe cytaty z artykułu Zaremby „O niektórych poglądach p. Łukasiewicza na metodykę nauk dedukcyjnych":

> Na podstawie próby, uczynionej przeze mnie, twierdzę, że w takim razie [tzn. gdyby Łukasiewicz miał rację – uwaga moja, R.M.] wypadałoby używać zdań bardziej skomplikowanych od tych, które mi wystarczyły, a przez to ucierpiałaby zrozumiałość wykazu własności charakterystycznych liczb rzeczywistych bez żadnej korzyści dla niej samej.

> W rzeczywistości chodziło mi o wprowadzenie uproszczeń tej samej kategorii jak te, które urzeczywistniamy przez ustawienie odpowiednich definicji; ze stanowiska oderwanej logiki definicje nie są konieczne, gdyż wszystkie wyrażenia definiowane można by zastąpić przez równoważne im wyrażenia, nie zawierające terminów definiowanych, a w takim razie teoria nie doznałaby zmiany, pomimo że same wszystkie definicje stałyby się zbędnymi. Jednakowoż, przy takim postępowaniu, wykład stałby się tak niezmiernie skomplikowanym, że cała teoria stałaby się prawie niezrozumiałą. [...]
>
> Matematycy z zupełną świadomością tego w czynie nie rozwijają prawie nigdy „zupełnych dowodów" [...] przez siebie wygłaszanych, a poprzestają na podawaniu, pod mianem dowodów, mniej lub bardziej szczegółowych szkiców dowodów zupełnych. Takie postępowanie jest nam narzucone przez to, że, przy dzisiejszym stanie symboliki naukowej, pomimo pomysłów Peana, Russella i innych, dowody zupełne nawet bardzo elementarnych twierdzeń, są tak obszerne, że podawanie ich przy znaczniejszej ilości twierdzeń byłoby niepodobieństwem. Otóż szkic dowodu zupełnego różni się tym od samego takiego dowodu, że w szkicu powołujemy się nie na wszystkie przesłanki, a tylko na niektóre, przyjmując, że czytelnik sam już dostrzeże rolę przesłanek w szkicu nie wspomnianych (1917, s. 75–76).

Stanowisko Łukasiewicza było inne. Otóż ubolewał on przede wszystkim nad słabą znajomością, czy wręcz nieznajomością nowoczesnej logiki matematycznej:

> [...] powstała logika nowa, która stanie się bez wątpienia potężnym a subtelnym narzędziem poznania we wszystkich dziedzinach wiedzy. [...] Ta nowa logika, znajdująca się obecnie w postaci rozkwitu, jest dotąd bardzo mało znana. Zaledwie niektóre jej pojęcia, częstokroć wypaczone, przenikają do kół tych uczonych, którzy nie uprawiają logiki z zawodu. Potrzeba będzie długiego czasu, zanim te nowe pojęcia i metody logiczne przełamią wszystkie uprzedzenia, jakie kładą im się dziś w poprzek, i staną się własnością ogółu uczonych. Dlatego nie zdziwiłem się wcale, gdy w dziele uczonego profesora Wszechnicy Jagiellońskiej nie wyczytałem żadnego z nazwisk, cytowanych powyżej [tzn. Boole, De Morgan, Schröder, Russell, Frege, Peano – uwaga moja, R.M.],

> a natomiast spotkałem się z poglądami i metodami, które ze stanowiska logiki współczesnej są nieścisłe, a nawet błędne (1916, s. 2).

Potrzebę budowania dowodów zupełnych, w których podaje się wszystkie używane przesłanki, a brak których zarzucał Łukasiewicz Zarembie, uzasadnia on trojako:

1) dowód niezupełny jest dydaktycznie wadliwy, gdyż nie zawsze czytelnik jest w stanie uzupełnić go,

2) traktowanie pewnych przesłanek jako domyślnych może łatwo stać się źródłem błędów,

3) dowody niezupełne nie pozwalają stwierdzić i sprawdzić – ani autorowi, ani tym bardziej czytelnikowi – na jakich właściwie przesłankach dany dowód jest oparty.

Za najważniejszą kwestię uważa tu Łukasiewicz kwestię trzecią, co uzasadnia następująco:

> Nauka nie na tym tylko polega, by gromadzić bezładnie jak najwięcej zdań prawdziwych; nauka to budowa, w której każdy szczegół powinien być związany z całością. Kitem, spajającym zdania prawdziwe, są związki logiczne. Należy zatem te związki badać jak najstaranniej i według nich kształtować teorię. Dlatego każdy i najdrobniejszy szczegół dowodu jest ważny, bo świadczy o istnieniu jakiegoś związku logicznego. [...] Instrumentem, który ułatwia, a nawet umożliwia niekiedy wykrywanie związków logicznych jest algebra logiczna. [...] Matematycy nie bardzo zajmowali się dotąd algebrą logiczną, bo nie dbali o związki logiczne, jakie mogą zachodzić wśród prawd przez nich wykrytych. Nie wiedzieli nawet, które z tych prawd należy uważać za zasady, a które za twierdzenia. Wystarczyło im, że jakieś twierdzenie udowodnili. Dopiero od niedawna odczuwają potrzebę uporządkowania logicznego materiałów, jakie nagromadziły się w matematyce w ciągu wieków. Pracę tę podjęli przede wszystkim ci z matematyków, którzy są zarazem logikami [...] (1916, s. 14–15).

Potrzebę ścisłości w matematyce, dokładniej w analizie rozumowań matematycznych wyjaśnia tymi słowy:

> Wydaje się niejednemu, że logika jest przepełniona subtelnościami, które przed zdrowym rozsądkiem nie znajdują żadnego usprawiedliwienia;

> subtelności te bez żadnej potrzeby utrudniają poznanie tego, co ma istotne znaczenie naukowe[9]. [...] Zarówno o matematyce, jak o logice są takie sądy niesłuszne. To, co laikowi może się wydawać subtelnością logiczną, jest tylko postulatem ścisłości naukowej. Ścisłość ta nie tylko nie utrudnia poznania prawd naukowo wartościowych, lecz przeciwnie – je ułatwia (1916, s. 53).

I konkluduje, twierdząc, że:

> Matematyka, która uchodziła dotąd za naukę najściślejszą, okazuje się pełna braków i błędów, gdy przyłożymy do niej tę nową miarę ścisłości (1916, s. 68).

Tyle o polemice Łukasiewicza z Zarembą i o ujawnionych w jej trakcie poglądach. O znaczeniu logiki formalnej pisał też Łukasiewicz w *Dodatku* do książki *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa. Studium krytyczne* (1910)[10]. Przeciwstawia się tu poglądowi, że „logika formalna w ogóle, a symboliczna w szczególności, jest tylko zabawką myślową, pozbawioną poważniejszego znaczenia" (1910, s. 181). Wartość logiki symbolicznej opisuje w następujących punktach:

> (α) Logika ta stanowi *system prawd*, należycie uzasadnionych i ujętych w ścisłą symbolikę, podobnie jak system jakichkolwiek prawd matematycznych. [...] logika symboliczna ma przynajmniej taką samą wartość, jaką posiadają owe nauki matematyczne. [...]
>
> (β) już sam fakt, iż można w *symbole o ścisłości matematycznej ująć zagadnienia niematematyczne*, nadaje jej doniosłą wartość teoretyczną. Błędnym mianowicie okazuje się przekonanie, że tylko matematyka i fizyka matematyczna są naukami „ścisłymi". Logika jest nauką równie ścisłą jak matematyka. – Objawia się przy tym w symbolicznym traktowaniu logiki jakieś głębsze *pokrewieństwo* między nią a matematyką,

---

9 Fragment od słów „logika jest przepełniona" jest powtórzeniem słów Zaremby o matematyce – przypis mój, R.M.

10 Dodatek ten był – jak podkreśla Woleński w *Przedmowie* do drugiego wydania tej książki – pierwszym w Polsce podręcznikiem logiki matematycznej. Dla wielu polskich filozofów „było to pierwsze kompetentne źródło informacji o nowej logice" (s. XXVII).

> które prowadzi do poglądu, że wszystkie nauki aprioryczne z jednego pnia wyrastają. [...]
>
> (γ) Logika symboliczna ma wszakże ponadto wartość jako *nierównie ściślejsza i pełniejsza teoria faktów logicznych* niż tradycyjna logika formalna. Po raz pierwszy pojawia się tu próba ścisłego określenia i uchwycenia podstawowych zasad logicznych […]. Pojawia się ogromna ilość nowych zagadnień logicznych. [...]
>
> (δ) Ale i dla *praktyki* myślenia naukowego posiada logika symboliczna równie wielką wartość. [...] Tak samo logika symboliczna okaże się niezbędna wszędzie tam, gdzie pojawią się zawilsze zadania logiczne, których nie będzie już można rozwiązać za pomocą zwykłych, codziennych środków myślenia[11] (1910, s. 181–183).

Mówiąc o poglądach Łukasiewicza na logikę, należy powiedzieć o jego wyraźnie antypsychologicznym nastawieniu. Psychologizm będący popularnym w końcu XIX wieku stanowiskiem w zakresie filozofii logiki i matematyki głosił, że przedmioty badane przez te nauki istnieją jako byty psychiczne i są poznawane tak jak inne fakty psychiczne. Koncepcję tę krytykowali Frege, Husserl i Meinong. Do krytyki tych dwóch ostatnich nawiązał też Łukasiewicz w artykule „Logika a psychologia" (1907), opowiadając się zdecydowanie za antypsychologizmem. Argumentował tam, że prawa psychologiczne nie mogą być racjami dla praw logiki, gdyż te pierwsze – jako empiryczne – są prawdopodobne, a prawa logiki są pewne. Prawa logiki i prawa psychologii mają inną treść: prawa logiki dotyczą bowiem związków między prawdziwością i fałszywością sądów, prawa psychologii zaś stwierdzają związki między zjawiskami psychicznymi, a przecież pojęcia prawdy i fałszu nie należą do psychologii. Źródłem

[11] Dodajmy tu jeszcze jako ciekawostkę końcowe uwagi Łukasiewicza, w których odcina się on od mętnych spekulacji filozoficznych i przeciwstawia je solidnej nauce logiki, pisząc: „Mimo wszystko logika symboliczna nie będzie nigdy wśród pewnego rodzaju filozofów popularna. Tworzyć bowiem w pięknie brzmiących słowach syntezy pełne polotu to rzecz miła i wdzięczna. Ale logiki symbolicznej trzeba się *nauczyć,* trzeba się jej uczyć tak jak matematyki, z ołówkiem w ręku, nie opuszczając żadnej literki, nie przeskakując żadnego dowodu. Trzeba chcieć i umieć pracować *naukowo.* A to jest praca zbyt sucha i nudna dla umysłów tęskniących za absolutem" (1910, s. 184).

psychologizmu może być, według Łukasiewicza, używanie pewnych dwuznacznych pojęć. Czym innym jest jednak myślenie i sąd w rozumieniu psychologii, a czym innym jako przedmiot logiki. Z tego, że logika bada warunki trafnego myślenia, a myślenie jest czynnością psychiczną, nie wynika przecież, że logika jest częścią psychologii. Łukasiewicz kończy swój wywód słowami:

> Wyświetlenie stosunku logiki do psychologii przynieść może korzyści obu tym naukom. Logika oczyści się z chwastów psychologistycznych i empirystycznych, które tłumią jej prawidłowy rozwój, a psychologia poznania pozbędzie się naleciałości apriorycznych, spod których szczery blask jej prawd nie mógł jakoś dotąd zajaśnieć. Należy bowiem pamiętać, że logika jest nauką aprioryczną, tak jak matematyka, a psychologia, tak jak każda nauka przyrodnicza, opiera się i opierać się musi na doświadczeniu (1907, s. 491).

Argumentacja Łuksiewicza przeciw psychologizmowi znalazła uznanie i szeroką akceptację wśród logików polskich. Antypsychologizm oznaczał w konsekwencji m.in. niedopuszczalność psychologicznych wyjaśnień pewności twierdzeń logiki. Łukasiewicz podkreślał aprioryzm logiki. W artykule „O twórczości w nauce" pisał:

> Logika jest nauką aprioryczną. Twierdzenia jej są prawdziwe na mocy określeń i pewników płynących z rozumu, nie z doświadczenia. Nauka ta jest dziedziną czystej twórczości myślowej. [...] Sądy logiczne i matematyczne są prawdami jedynie w świecie bytów idealnych. Czy bytom tym odpowiadają jakieś przedmioty rzeczywiste, o tym zapewne nigdy się nie dowiemy.
>
> *Aporioryczne konstrukcje umysłu, wchodząc w skład każdej syntezy, przepajają całą naukę pierwiastkiem idealnym i twórczym* (1912a, s. 13–14).

W ten sposób dochodzimy do następnej kwestii, istotnej z punktu widzenia filozofii logiki i matematyki, a mianowicie do problemu: logika i matematyka a rzeczywistość. Poglądy Łukasiewicza w tym zakresie ulegały kilkakrotnie zmianom. Od przywołanego powyżej poglądu, iż logika jako nauka aprioryczna i „dziedzina czystej twórczości myślowej" nie ma związku z doświadczeniem, przeszedł – pod wpływem pytań, jakie nasuwało stworzenie przez niego systemów logiki wielowartościowej, a więc alternatywnych w stosunku do dwuwartościowej logiki klasycznej – do poglądu, iż systemy logiczne mogą mieć interpretację ontologiczną oraz że systemy aprioryczne trzeba sprawdzać na faktach, analogicznie jak hipotezy fizykalne, trzeba je „ustawicznie kontrolować z danymi intuicji i doświadczenia oraz z rezultatami innych nauk, zwłaszcza przyrodniczych" (1936, s. 123). Pisał:

> Wiemy dziś, że nie tylko istnieją różne systemy geometrii, ale i różne systemy logiki, które w dodatku mają tę właściwość, że nie można jednego z nich przełożyć na drugi. Wierzę, że jeden i tylko jeden z tych systemów logicznych zrealizowany jest w świecie rzeczywistym, czyli jest realny, tak jak jeden i tylko jeden system geometryczny jest realny. Nie wiemy dziś wprawdzie, który to jest system, ale nie wątpię, że badania empiryczne wykażą kiedyś, czy przestrzeń światowa jest euklidesowa, czy jakaś nieeuklidesowa, i czy związek jednych faktów z drugimi odpowiada logice dwuwartościowej, czy jakiejś wielowartościowej. Wszystkie systemy aprioryczne, z chwilą gdy stosujemy do rzeczywistości, stają się hipotezami przyrodniczymi, które sprawdzać należy na faktach w podobny sposób jak hipotezy fizykalne (1936, s. 128).

Stanowisko to przeciwstawiał Łukasiewicz stanowisku Koła Wiedeńskiego, w szczególności stanowisku Carnapa i Wittgensteina, czyli koncepcji, która interpretuje logikę jako zbiór tautologii pozbawionych empirycznej treści.

W opublikowanej rok później pracy „W obronie logistyki" (1937a) zmienił trochę swe stanowisko. Odpierając zarzut pragmatyzmu, głosił:

> Nie uznaję pragmatyzmu jako teorii prawdy i sądzę, że nikt rozsądny nie uzna tej doktryny. Nie myślałem też o tym, by sprawdzać pragmatystycznie prawdziwość systemów logicznych. Sprawdzania takiego systemy te nie potrzebują. Wiem dobrze, że wszystkie systemy logiczne, które tworzymy, są przy tych założeniach, przy jakich je tworzymy, z konieczności prawdziwe. Chodzić może tylko o sprawdzenie założeń

> ontologicznych tkwiących gdzieś na dnie logiki, i myślę, że postępuję zgodnie z metodami przyjętymi powszechnie w naukach przyrodniczych, jeśli chcę konsekwencje tych założeń sprawdzać jakoś na faktach (1937a, s. 162).

Tak więc sprawdzeniu empirycznemu mogłyby podlegać nie twierdzenia systemu logicznego, a głębokie założenia ontologiczne leżące u jego podstaw, na przykład zasada dwuwartościowości.

W publikacji „On the Intuitionistic Theory of Deduction" (1952) Łukasiewicz powrócił do swych poglądów sprzed czterdziestu lat:

> Nie mamy sposobu rozstrzygnięcia, który z *n*-wartościowych systemów logiki $n \geq 2$ jest prawdziwy. Logika nie jest nauką o prawach myślenia lub o jakimś realnym przedmiocie; jest ona, według mego zdania, tylko narzędziem, które pozwala nam wyciągnąć uznane wnioski z uznanych przesłanek. [...] Im bardziej przydatny i bogaty jest system logiczny, tym jest wartościowszy[12] (1961, s. 267).

Zdania te zdają się sugerować, że Łukasiewicz stanął znów na stanowisku pragmatyzmu i relatywizmu, a więc poglądów, które dawniej odrzucał.

Wspomnieliśmy wyżej o logikach wielowartościowych. Warto w kontekście tematu tej książki zapytać o inne jeszcze niż już poruszone poglądy filozoficzne Łukasiewicza związane z tymi logikami alternatywnymi. Zacznijmy od stwierdzenia, że filozoficzny kontekst powstania logik wielowartościowych wiązał się w Polsce z dyskusjami nad determinizmem, indeterminizmem, nad modalnościami, takimi jak możliwość czy konieczność, wreszcie nad wolnością. W mowie rektorskiej wygłoszonej na Uniwersytecie Warszawskim na inauguracji roku akademickiego 1922/1923 (por. 1922) Łukasiewicz opowiedział się za wiecznością prawdy, odrzucając jej odwieczność. Z tezy tej wynika, że:

---

[12] "We have no means to decide which of the *n*-valued systems of logic, $n \geq 2$, is true. Logic is not a science of the laws of thought or of any other real object; it is, in my opinion, only an instrument which enables us to draw asserted conclusions from asserted premisses. [...] The more useful and richer a logical system is, the more valuable it is" (1952, s. 206).

> [...] istnieją zdania, które nie są ani prawdziwe, ani fałszywe, tylko jakieś *obojętne*. Takimi są wszystkie zdania o faktach przyszłych, które nie są jeszcze obecnie przesądzone. Zdania te nie są w chwili obecnej prawdziwe, bo nie mają żadnego realnego odpowiednika, ani też nie są fałszywe, bo ich zaprzeczenia także nie mają realnego odpowiednika. Posługując się niezbyt jasną terminologią filozoficzną, można by powiedzieć, że zdaniom tym nie odpowiada ontologicznie ani byt, ani niebyt, lecz *możliwość*. Zdania obojętne, którym ontologicznie odpowiada możliwość, mają trzecią wartość logiczną.
>
> [...] determinizm nie jest poglądem lepiej uzasadnionym od indeterminizmu.
>
> Wolno nam tedy, nie narażając się na zarzut lekkomyślności, opowiedzieć się przy indeterminizmie. Wolno nam przyjąć, że nie cała przyszłość jest z góry ustalona (1922, s. 125).

Łukasiewicz przy tym wykazuje, że przyjęcie istnienia zdań, którym należy przypisać trzecią wartość logiczną (inną niż prawda czy fałsz), nie ma nic wspólnego z odrzuceniem zasady sprzeczności czy zasady wyłączonego środka. Sama zasada dwuwartościowości jest zaś zasadą metalogiczną, a nie prawem logiki.

O ile motywacja podjęcia prac nad logikami wielowartościowymi była u Łukasiewicza (przynajmniej w części) filozoficzna, to same systemy takiej logiki są, według niego, od filozofii niezależne. W pracy „W obronie logistyki" (1937a) Łukasiewicz wyraźnie stwierdza, że systemy logiki wielowartościowej „nie zależą od żadnej doktryny filozoficznej, z której upadkiem musiałyby upaść, lecz są równie obiektywnym rezultatem badań, jak każda ustalona teoria matematyczna" (s. 162). Z drugiej strony systemy takie mogą mieć znaczenie filozoficzne. Łukasiewicz wiązał je m.in. z pytaniem, czy istnieją stopnie możliwości i ile ich jest. Zakładając odpowiedź negatywną, mamy do czynienia z systemem logiki trójwartościowej, przyjmując zaś istnienie takich stopni, „wtedy najnaturalniej jest przyjąć, tak jak w rachunku prawdopodobieństwa, że istnieje nieskończenie wiele stopni możliwości, co prowadzi do nieskończenie-wielowartościowego systemu rachunku zdań" (1930; cyt. za Łukasiewicz 1961, s. 159).

Łukasiewicz przypisywał systemom logiki wielowartościowej ważną rolę:

> Niełatwo przewidzieć, jaki wpływ wywrze powstanie niechryzypowych[13] systemów logiki na spekulację filozoficzną. Wydaje mi się jednak, że znaczenie filozoficzne przedstawionych tutaj systemów logiki może być co najmniej równie wielkie jak znaczenie nieeuklidesowych systemów geometrii (1961, s. 161).

W referacie wygłoszonym na posiedzeniu Koła Naukoznawczego w roku 1938 mówił, że „[k]ażda taka logika może być podstawą innej nieco matematyki, a każda taka matematyka podstawą innej nieco fizyki"[14] (1939, s. 215). W artykule „Die Logik und das Grundlagenproblem" (1941) proponował, by wielowartościowe systemy logiki stały się podstawą badań w arytmetyce i teorii mnogości.

Łukasiewicz przypisywał więc logikom wielowartościowym podwójne znaczenie: filozoficzne i matematyczne. Jednak nie odegrały one takiej roli, jaką wyznaczył im ich twórca, ale na pewno bardzo poszerzyły repertuar badań nad systemami logicznymi.

Jednym z ważniejszych problemów filozofii matematyki i logiki jest kwestia sposobu istnienia obiektów badanych przez logikę i matematykę. Wielu z polskich logików skłaniało się ku nominalizmowi – tak było na przykład w przypadku Chwistka, Leśniewskiego, Kotarbińskiego czy Tarskiego (por. paragrafy 2 w rozdziale 2 oraz 3, 4 i 6 w rozdziale 3). Stanowisko Łukasiewicza było inne. Przyznawał on (np. 1936, s. 119), że logika matematyczna ma szatę nominalistyczną. Mówi bowiem nie o pojęciach i sądach, ale o nazwach i zdaniach, a te ostatnie traktuje jako napisy o określonym kształcie. Wynika to z tego, że logika matematyczna dąży do formalizacji, chce wszystkie wywody logiczne przedstawić w taki sposób, by „zgodność ich z regułami wnioskowania, czyli przekształcania napisów, można skontrolować bez odwoływania się do znaczenia napisów" (1936, s. 119).

---

[13] Tak Łukasiewicz określa logiki wielowartościowe, przeciwstawiając się nazywaniu ich logikami niearystotelesowskimi – uwaga moja, R.M.

[14] Zawirski, łącząc idee Łukasiewicza i E.L. Posta, próbował skonstruować system logiki, który byłby odpowiedni dla rachunku prawdopodobieństwa i dla pewnych problemów fizyki – por. paragraf 2 w rozdziale 3.

Takie podejście nominalistyczne nasuwa jednak pewne wątpliwości, które podnosi Łukasiewicz. Otóż człowiek potrafi wytworzyć jedynie skończenie wiele napisów. Stąd zbiór napisów jest skończony, natomiast systemy logiczne i matematyczne składają się z nieskończonej ilości tez. Jak te dwa fakty pogodzić? Można przyjąć, że istnieją tylko tezy, które zostały przez kogoś napisane. Wtedy zbiór tez będzie istotnie skończony, ale „na takiej podstawie byłoby równie trudno uprawiać logistykę, a zwłaszcza metalogistykę, jak trudno byłoby zbudować arytmetykę na gruncie założenia, że zbiór liczb naturalnych jest skończony" (1936, s. 120). Prowadziłoby to również do uzależnienia logiki od pewnych faktów empirycznych, czyli od istnienia napisów, a na to trudno się zgodzić. Rozwiązaniem nie jest też uznanie za napisy nie tylko wytworów czynności ludzkich, ale wszelkich ciał fizycznych o określonym kształcie i wielkości, i przyjęcie, że ciał takich jest nieskończenie wiele – jak proponował Tarski. Wtedy bowiem „uzależnialibyśmy logikę od mało prawdopodobnej hipotezy fizykalnej, co w żadnym razie nie jest pożądane" (1936, s. 120).

Łuksiewicz uważał, że nominalizm logiki jest pozorny. Co więcej, logikę rozwijano bez rozstrzygania problemu jej nominalizmu. W artykule „Logistyka a filozofia" pisał:

> Mało dotychczas przejmowaliśmy się tymi trudnościami i to jest w tym wszystkim najdziwniejsze. Działo się to chyba dlatego, że używając terminologii nominalistycznej, nie jesteśmy naprawdę nominalistami, lecz hołdujemy jakiemuś nie zanalizowanemu konceptualizmowi czy nawet idealizmowi (1936, s. 120).

Sam uważał, że obiekty badane przez logikę istnieją poza sferą napisów tylko. Nie rozwijał szerzej alternatywy wobec nominalizmu – formułował jedynie swój osobisty pogląd. A ten wyrastał z jego osobistych przekonań religijnych – Łukasiewicz skłaniał się pod wpływem tych przekonań ku neoplatońskiej interpretacji logiki. W publikacji „W obronie logistyki" pisał:

> Chciałbym na zakończenie tych uwag nakreślić obraz związany z najgłębszymi intuicjami, jakie odczuwam zawsze wobec logistyki. Obraz

> ten rzuci może więcej światła na istotne podłoże, z jakiego przynajmniej u mnie wyrasta ta nauka niż wszelkie wywody dyskursywne. Otóż ilekroć zajmuję się najdrobniejszym nawet zagadnieniem logistycznym, szukając np. najkrótszego aksjomatu rachunku implikacyjnego, tylekroć mam wrażenie, że znajduję się wobec jakiejś potężnej, niesłychanie zwartej i niezmiernie odpornej konstrukcji. Konstrukcja ta działa na mnie jak jakiś konkretny dotykalny przedmiot, zrobiony z najtwardszego materiału, stokroć mocniejszego od betonu i stali. Nic w niej zmienić nie mogę, nic sam dowolnie nie tworzę, lecz w wytężonej pracy odkrywam w niej tylko coraz to nowe szczegóły, zdobywając prawdy niewzruszone i wieczne. Gdzie jest i czym jest ta idealna konstrukcja? Filozof wierzący powiedziałby, że jest w Bogu i jest myślą Jego (1937a, s. 165).

Łukasiewicz wyraźnie podkreśla, że jest to jego osobisty pogląd. Uważał też, że logika nie jest ani powołana, ani uprawniona do rozstrzygania odwiecznego filozoficznego sporu o powszechniki. W konsekwencji logicy i matematycy, którzy twierdzą, że nauki te są nominalistyczne, wygłaszają te tezy bezpodstawnie.

Łukasiewicz odpierał też zarzut, że u podstaw logiki matematycznej leży konwencjonalizm. Argument o tym, że systemy logiki „nie krępują się w układzie aksjomatów jakimiś bezwzględnymi zasadami czy pojęciami, lecz budowane są dowolnie" (1937a, s. 22), uważał za chybiony. Wykazał to na przykładzie rachunku zdań i sylogistyki:

> W wyborze takiego czy innego z możliwych układów aksjomatycznych nie mamy żadnej potrzeby krępować się jakimiś zasadami bezwzględnymi, bo wiemy już z góry, że takie, np. zasada niesprzeczności, spełnione są przez wszystkie układy, a kierujemy się tylko względami natury praktycznej czy pedagogicznej. Nie widzę w tym wszystkim ani odrobiny konwencjonalizmu, którego zwolennikiem nigdy nie byłem i nie jestem. Mówiąc po prostu, jest to pewna własność dwuwartościowego rachunku zdań, że można go zbudować aksjomatycznie w wieloraki sposób, a własność ta jest faktem logicznym, który od woli naszej nie zależy i na który chcąc nie chcąc zgodzić się musimy (1937a, s. 22).

Powyższe analizy pokazują, że choć niektóre badania logiczne Łukasiewicza były motywowane problemami filozoficznymi (jak na przykład w przypadku logik wielowartościowych), to generalnie logika była u niego oddzielona od filozofii. Uważał on, że w zasadzie każdy problem formalny może być przedmiotem badania. Wyraźnie odróżniał konstrukcje formalne i ścisłe badania logiczne i metalogiczne nad systemami logicznymi z jednej strony i ich możliwe interpretacje filozoficzne z drugiej. Takie też było stanowisko większości polskich logików okresu międzywojennego.

Postawę Łukasiewicza trafnie charakteryzuje Sobociński:

> Nie próbował konstruować konkretnych systemów podstaw nauk dedukcyjnych. Jego celem było z jednej strony zbudowanie dokładnych i eleganckich struktur dla różnych dziedzin naszego myślenia, w których były one potrzebne lub [gdzie dotąd istniejące były] niewystarczające, a z drugiej strony odbudowanie istotnego wymiaru historycznego logiki[15] (1956, s. 42).

2. Zygmunt Zawirski

Zygmunt Zawirski zajmował się głównie filozofią nauki – interesowała go problematyka metodologiczna, teoriopoznawcza i ontologiczna powstała w wyniku rozwoju fizyki, głównie w związku z powstaniem teorii względności i mechaniki kwantowej. Ponieważ zagadnienia te nie mieszczą się w zasadniczym temacie tej książki, nie będziemy poświęcali im tu specjalnej uwagi – czytelnika zainteresowanego pracami Zawirskiego z pogranicza fizyki i filozofii odsyłamy do książki pod redakcją Ireny Szumilewicz-Lachman (1994) i do monografii Jana Woleńskiego (1985 i 1989). Powiedzmy tu tylko, że w pracach swoich podejmował polemikę z dominu-

[15] “He did not try to construct a definite system of the foundations of the deductive sciences. His aims were, on the one hand, to provide exact and elegant structures for many domains of our thinking where such had either been wanting or insufficient; and on the the other, to restore the vital historical dimension to logic”.

jącymi w końcu XIX wieku kierunkami filozoficznymi – neokantyzmem i empiriokrytycyzmem, oraz – jak większość uczonych szkoły lwowsko-warszawskiej – nawiązywał do idei Koła Wiedeńskiego. Odrzucał jednak pewne skrajności, zwłaszcza nie zgadzał się z głoszoną w Kole Wiedeńskim tezą o konieczności odrzucenia tradycyjnej problematyki filozoficznej i sprowadzaniu przedmiotu filozofii do analizy języka. Ważne miejsce w badaniach Zawirskiego zajmowała problematyka czasu. Był autorem pracy *L'Evolution de la notion du temps* (1936a) uważanej za jego *opus magnum* i nagrodzonej pierwszą nagrodą w konkursie im. E. Rignano rozpisanym we włoskim czasopiśmie *Scientia*. W zakresie filozofii nauki opowiadał się za umiarkowanym realizmem, doceniał rolę i znaczenie w naukach przyrodniczych zarówno indukcji, jak i dedukcji. Zajmowały go kwestie związane z wykorzystaniem wyników nauk formalnych w badaniach nad naukami ścisłymi, w szczególności kwestia aksjomatyzacji fragmentów fizyki (por. 1927b, 1938a, 1948).

Problematyka filozofii matematyki i logiki zajmowała bardziej poboczne miejsce w pracach naukowych Zawirskiego. Niemniej jednak zajmował się także pewnymi kwestiami i z tego zakresu. Możemy tu wyróżnić dwa kręgi zagadnień: związki między logiką i matematyką oraz znaczenie logik nieklasycznych, a zwłaszcza logik wielowartościowych i logiki intuicjonistycznej. Głównym celem jego prac z tego zakresu było poinformowanie środowiska filozoficznego o aktualnych osiągnięciach w tych dziedzinach i skorelowanie ich z pracami prowadzonymi w Polsce. W związku z tym rzadko też wyraźnie formułował swoje własne poglądy, ograniczając się do referowania sądów innych i rozważenia ich znaczenia. Nie znaczy to oczywiście, że swoich opinii w ogóle nie formułował – czynił to zwłaszcza w zakresie problematyki związanej z logikami wielowartościowymi i ich możliwymi zastosowaniami.

Zacznijmy od pierwszego wyróżnionego problemu, któremu poświęcał uwagę Zawirski, a mianowicie od kwestii stosunku wzajemnego logiki i matematyki. Kwestie te rozważał w pracy „Stosunek logiki do matematyki w świetle badań współczesnych", stwierdzając, że:

> Matematyka, jako nauka ścisła, powstała znacznie wcześniej aniżeli logika; Grecy umieli budować poprawne dowody matematyczne, zanim jeszcze zaczęły się systematyczne badania nad istotą wszelkiego logicznego wnioskowania i dowodzenia (1927a, s. 171).

W dalszej kolejności analizuje rozwój logiki, podkreślając – na co zwrócił też uwagę Łukasiewicz – znaczenie logiki stoików. Twierdzi, że miała ona większe znaczenie dla matematyki niż logika Arystotelesa. Docenia prace Leibniza i Peana oraz Fregego, natomiast negatywnie wypowiada się o koncepcjach Kanta, uważając, że Kantowska koncepcja twierdzeń matematyki czystej jako zdań syntetycznych *a priori* „stosunek logiki do matematyki postawiła w dziwnym i zagadkowym świetle":

> Kant uznając sądy matematyki za syntetyczne a priori, przyjmował tym samym udział czynników pozalogicznych w myśleniu matematycznym, mianowicie przyjmował konieczność odwoływania się w nim do intuicji, do apriorycznych form czasu i przestrzeni (1927a, s. 173).

Zasadnicza część pracy Zawirskiego jest poświęcona prezentacji i analizie dzieła Whiteheada i Russella *Principia Mathematica* (1910–1913) oraz Russella *The Principles of Mathematics* (1903) i *Introduction to Mathematical Philosophy* (1919). Szczegółowo omawia treść *Principiów* i zawartą w nim tezę logicystyczną, iż matematyka jest sprowadzalna do logiki. Podkreśla też rolę i znaczenie w systemie *Principiów* aksjomatu sprowadzalności oraz aksjomatu wyboru i aksjomatu nieskończoności, zauważając, że Russell i Whitehead używają tych dwóch ostatnich jedynie warunkowo (tzn. jako poprzedników implikacji). Są to bowiem w istocie aksjomaty istnienia (postulują istnienie pewnych obiektów), a „żadna zasada logiczna nie może wprowadzać istnienia inaczej jak tylko w formie hipotetycznej" (1927a, s. 202). Dlatego też w *Principiach* nie ma dowodu istnienia choćby jednego obiektu. Zawirski pisze, że:

> Dowód taki, gdyby w *Principiach* istniał, nie byłby lepszy od dowodu ontologicznego istnienia Boga (1927a, s. 204).

Zgadza się z opinią Russella, że:

> Jedno jest tylko pojęcie istnienia dla wszystkich nauk i matematyk nie operuje tym pojęciem w innym znaczeniu niż fizyk (1927a, s. 203).

W związku z tym, że – z punktu widzenia logicyzmu – matematyka i logika nie różnią się zasadniczo, więc nie ma większego znaczenia, czy sądy obu uznamy za analityczne, czy za syntetyczne, nie jest więc istotne, czy twierdzenia matematyki uznamy za tautologie, czy też nie. Ważna jest natomiast kwestia niesprzeczności i niezależności aksjomatów. Kwestia ta jednak nie zajmowała Russella[16], który „nigdzie nie podaje dowodu, że podany przez niego zbiór aksjomatów logiki i matematyki tworzy układ niezależny i niesprzeczny" (1927a, s. 205). Sprawą tą zajmuje się – jak informuje Zawirski – Hilbert i jego uczniowie.

Zawirski rozważał też konsekwencje tezy logicystycznej dla matematyki stosowanej – w szczególności interesowała go sprawa konsekwencji dla fizyki teoretycznej. Pisał:

> Russell widzi różnicę między matematyką a fizyką teoretyczną w tym, iż stałe fizykalne nie dadzą się sprowadzić do stałych logicznych, podobnie jak stałe matematyczne. Jeśli by jednak geometryzacja fizyki i marzenia Hilberta i Weyla o sprowadzeniu stałych fizykalnych do stałych matematycznych dały się urzeczywistnić, wówczas różnica, jaką widzi Russell, byłaby tylko przejściowa, a istotnej należałoby się dopatrywać jedynie w tym, iż w fizyce aksjomaty istnienia nie mogą występować w formie hipotetycznej (1927a, s. 206).

Zagadnienie to rozważał Zawirski także w pracy „Nauka i metafizyka" opublikowanej ze znalezionego rękopisu dopiero w roku 1995–1996. Mówiąc o poznawaniu świata, pisał, że nauki dedukcyjne zajmują się przedmiotami formalnymi, podczas gdy w poznaniu świata:

---

[16] U Russella nie było rozróżnienia między językiem i metajęzykiem, między teorią i metateorią. W związku z tym nie formułował on też pytań metateoretycznych i metalogicznych.

> [...] nie chodzi o przedmioty „formalne", jakimi zajmuje się matematyka; tu nie chodzi tylko o samo *ens*, ale o *ens existens*, a o egzystencjach można się dowiedzieć tylko na drodze empirycznej (1995, s. 133).

Nie jest jednak tak, że matematyka i logika nie mają żadnego znaczenia dla poznawania świata. Teorie matematyczne mogą bowiem zostać zinterpretowane – uzyskuje się to dzięki przyporządkowaniu symbolom matematycznym obiektów czy relacji między obiektami świata fizycznego. W ten sposób konstrukcje matematyczne stają się składnikami teorii fizycznych, a tak zinterpretowane twierdzenia matematyczne mogą być sprawdzane empirycznie. Stąd rola i znaczenie matematyki i jej metody dla nauk przyrodniczych. Zagadnieniu aksjomatyzowalności takich teorii Zawirski poświęcał wiele uwagi – por. na przykład jego prace „Metoda aksjomatyczna a przyrodoznawstwo" (1923–1924), „Próby aksjomatyzacji fizyki i ich znaczenie filozoficzne" (1927b), „Doniosłość badań logicznych i semantycznych dla fizyki współczesnej" (1938a) czy „Uwagi o metodzie nauk przyrodniczych" (1948).

Zajmował go też problem stosunku fizyki i geometrii. Obie przecież badają przestrzeń – tak przynajmniej głosi się w ujęciu klasycznym, tzn. przed powstaniem geometrii nieeuklidesowych. Przez zastosowanie metody aksjomatycznej w fizyce pozornie znika różnica między fizyką a geometrią: fizyka staje się zinterpretowaną geometrią (Schlick), a geometria nauką przyrodniczą (Einstein, Born). Zdaniem Zawirskiego fizyka i geometria są odmiennymi naukami, a ich odrębność daje się pogodzić mimo istniejącej różnicy między ich przedmiotami i stosowaną metodą. Geometria bowiem konstruuje swój przedmiot niezależnie od doświadczenia i od konkretnie istniejącej rzeczywistości fizycznej, a swoje twierdzenia uzasadnia wyłącznie na drodze dedukcyjnej. Fizyka natomiast zajmuje się obiektami danymi w doświadczeniu i formułuje swoje prawa, na ogół posługując się metodą indukcyjną. Gdy zostanie już zbudowana stosowna teoria fizyczna, to uzasadnia się w niej poszczególne tezy (będące prawami uzyskanymi na drodze doświadczalnej), wyprowadzając je dedukcyjnie z wcześniej przyjętych tez lub z przyjętych aksjomatów – dzieje się tak oczywiście dopiero w kontekście uzasadnienia[17]. Przy tym zasady przyjęte jako aksjomaty muszą mieć pewne uzasadnienie empiryczne. W geometrii, podobnie jak w całej matematyce, pomysły pewnych założeń i praw mogą mieć źródło empiryczne, ale wolno je zaakceptować jako twierdzenia tylko i dopiero wtedy, gdy zostaną wydedukowane z aksjomatów, doświadczenie nie ma żadnej mocy uzasadniającej w matematyce – podkreśla Zawirski. Istnieje przy tym pewna łączność formalna pomiędzy prawami fizyki a prawami geometrii ciał w takim zakresie, w jakim ta ostatnia bada własności przestrzenne obiektów fizycznych.

Mówiąc o stosunku wzajemnym logiki i matematyki, warto też powiedzieć, jak Zawirski pojmował samą logikę. Odpowiedź na tę kwestię znajdujemy w jego skrypcie *Logika teoretyczna*:

> Obok terminów właściwych tylko pojedynczym naukom, istnieją terminy wspólne im wszystkim. Do nich należą [...] terminy logiczne i one sprawiają, iż logika jest nauką ogólną i zdaje sprawę ze wspólnej wszystkim naukom struktury, ze sposobu, w jaki pojedyncze nauki swoje twierdzenia uzasadniają (1938b, s. 2).

Stronę wcześniej zaś stwierdza:

> Nazwa nauki zwanej obecnie logiką pochodzi od wyrazu greckiego *logos*, który znaczy tyle co słowo, mowa, rozum, a także i rozumne myślenie; z tym ostatnim znaczeniem wiąże się właśnie nazwa nauki. Nie jest ona bowiem nauką o rozumie, ale raczej o formach rozumowania, którymi się posługujemy we wszelkim wnioskowaniu jako też dowodzeniu.

Przytoczone fragmenty wskazują na to, że Zawirski szeroko pojmował zakres logiki: nie tylko więc jako system formalny (czy zespół takich systemów), ale włączał w jej zakres także naukę o rozumowaniach. Było to niewątpliwie odbiciem panujących naówczas w Polsce (i nie tylko) zwyczajów i praktyki dydaktycznej. Jak pisze Woleński – przywołując dla przykładu podręczniki logiki matematycznej Łukasiewicza (1929a) i Jaśkowskiego (1947) – „przez długi czas nawet

[17] Warto przy tym dodać, że kontekst odkrycia mniej interesował Zawirskiego niż kontekst uzasadnienia.

kursy logiki matematycznej dla matematyków kończyły się wykładem o rozumowaniach w naukach przyrodniczych" (1999, s. 64).

Przejdźmy teraz do drugiego z wyróżnionych zagadnień, a mianowicie do kwestii logik nieklasycznych. Tu uwagę Zawirskiego zajmowała logika intuicjonistyczna i logiki wielowartościowe. Tej pierwszej poświęcił pracę „Geneza i rozwój logiki intuicjonistycznej" (1946). Ma ona charakter raczej informacyjny i celem jej było zapoznanie polskiego czytelnika z nowymi wynikami. Zawirski prezentuje więc podstawowe idee leżące u podstaw intuicjonizmu, omawia szeroko poglądy i prace twórcy intuicjonizmu Luitzena Egbertusa Jana Brouwera, następnie referuje podjętą przez Arenda Heytinga próbę zbudowania systemu logiki intuicjonistycznej bazującego na ideach Brouwera, wynik Kurta Gödla o nieadekwatności skończenie wartościowych matryc oraz wyniki Stanisława Jaśkowskiego, który zbudował adekwatne matryce nieskończenie wartościowe. Zawirski ogranicza się zdecydowanie do omówienia – zresztą bardzo kompetentnego – efektów badań innych, nic nie mówiąc o własnych sympatiach czy antypatiach w stosunku do logiki intuicjonistycznej.

Inaczej przedstawia się sprawa logik wielowartościowych. Otóż Zawirski był nimi głęboko zainteresowany, sam prowadził w tym zakresie badania, żywiąc nadzieję, że pozwolą one na rozwiązanie pewnych trudności w fizyce.

Powszechnie przyjmuje się, że pomysł stworzenia logik wielowartościowych, a więc logik, w których mamy do czynienia z więcej niż dwoma wartościami logicznymi (prawda i fałsz), zrodził się u Łukasiewicza w trakcie pisania książki o zasadzie sprzeczności u Arystotelesa (por. na przykład Woleński 1985, s. 116; zob. też paragraf 1 w rozdziale 3 niniejszej książki poświęcony Łukasiewiczowi). Problem żywo zainteresował Zawirskiego, z uwagą śledził prowadzone naówczas dyskusje nad logikami wielowartościowymi. Początkowo optując za klasyczną logiką dwuwartościową, z czasem zmienił zdanie i sam podjął badania nad nowymi logikami. Interesował go zwłaszcza problem możliwości zastosowania logik wielowartościowych do rozwiązania trudności, które pojawiły się w fizyce w związku z powstaniem nowych teorii, takich jak mechanika kwantowa, czy z wprowadzeniem do fizyki praw statystycznych. Doceniał więc pomysł Łukasiewicza – uważał, że nowa logika jest jedyną drogą, na której można zrozumieć zjawiska mikroświata. Kombinując idee Łukasiewicza i Emila Leona Posta, starał się skonstruować system logiki odpowiedni do interpretacji zarówno pewnych problemów współczesnej fizyki, jak i rachunku prawdopodobieństwa. Zajmował się tymi problemami w pracach *Próby stosowania logiki wielowartościowej do współczesnego przyrodoznawstwa* (1931), *Logika trójwartościowa Jana Łukasiewicza. O logice L.E.J. Brouwera. Próby stosowania logiki wielowartościowej do współczesnego przyrodoznawstwa* (1932a), „Les logiques nouvelles et le champ de leur application" (1932b), *Znaczenie logiki wielowartościowej dla poznania i związek jej z rachunkiem prawdopodobieństwa* (1934a), *Stosunek logiki wielowartościowej do rachunku prawdopodobieństwa* (1934b) czy „Über das Verhältniss der mehrwertigen Logik zur Wahrscheinlichkeitsrechnung" (1935). Szukany system winien spełniać następujące warunki:

1) powinna istnieć odpowiedniość między nowym systemem logiki a logiką klasyczną, tzn. tautologie logiki klasycznej winny być tautologiami nowej logiki (warunku tego nie spełnia logika trójwartościowa Łukasiewicza, w której na przykład prawa sprzeczności czy wyłączonego środka nie są tautologiami),

2) wartość prawdziwościowa przyporządkowana zdaniu winna być związana z jego prawdopodobieństwem,

3) wartość zdania złożonego winna być jednoznacznie wyznaczona przez wartości jego składowych.

Swoje wyniki Zawirski prezentował na różnych konferencjach, m.in. na Międzynarodowym Kongresie Filozoficznym w Pradze w 1934 roku (por. 1936b) i na Międzynarodowym Kongresie Filozofii Naukowej w Paryżu w 1935 roku (por. 1936c). Na tym ostatnim spotkał Hansa Reichenbacha, który niezależnie pracował nad podobnymi zagadnieniami. Okazało się, że ich podejścia do rachunku prawdopodobieństwa i logik nieklasycznych różnią się (por. Szumilewicz-Lachman 1994). Reichenbach interpretował bowiem niektóre wyrażenia rachunku prawdopodobieństwa jako pewnego rodzaju logikę uogólnioną. Zawirski natomiast zarysował paralelizm między wyrażeniami rachunku prawdopodobieństwa i formułami logiki wielowartościowej Łukasiewicza i Posta, ustalając w ten sposób formalną zgodność obu. Rachunek prawdopodobieństwa i logikę wielowartościową powinno się, według niego, traktować jako dwa różne systemy, z których każdy stanowi bazę empiryczną dla tego drugiego. Zawirski był przekonany, że takie uzgodnienie logiki wielowartościowej, w szczególności logiki trójwartościowej, z rachunkiem prawdopodobieństwa umożliwi jej zastosowanie w mechanice kwantowej. Dodajmy, że w tym kierunku szły dalsze badania Patricka Suppesa i Paulette Destouches-Fevrier. Zawirskiego można więc uznać w pewnym sensie za prekursora logiki kwantowej.

3. Stanisław Leśniewski

W twórczości Leśniewskiego można wyodrębnić dwa wyraźne okresy: wczesny obejmujący lata 1911–1915 i późniejszy, czyli lata 1916–1939. Pierwszy można określić jako filozoficzno-gramatyczny, późniejszy – jako logiczno-matematyczny. Punktem przełomowym była praca *Podstawy ogólnej teorii mnogości* (1916). Sam Leśniewski nie cenił swoich prac z okresu wczesnego, co więcej, zanegował wyznawane wówczas swoje poglądy. W artykule „O podstawach matematyki" pisał:

> Żyjąc umysłowo poza sferą cennych zdobyczy osiągniętych w nauce przez przedstawicieli logiki matematycznej, a ulegając licznym zgubnym nałogom, płynącym z kultury jednostronnie filozoficzno-gramatycznej, zmagałem się w pracach wymienionych [tzn. w pracach z lat 1911–1915 – uwaga moja, R.M.] bezradnie z szeregiem zagadnień, przerastających moje ówczesne siły, odkrywając przy sposobności odkryte już Ameryki. Wspominam o tych pracach, pragnąc zaznaczyć, iż bardzo się martwię, iż zostały w ogóle wydane, uroczyście się wyrzec niniejszym tych prac, i stwierdzić bankructwo filozoficzno-gramatycznych poczynań pierwszego okresu swej działalności (1927, s. 170).

Zerwanie z „gramatycznym" stylem w logice w połączeniu z wątpliwościami dotyczącymi precyzji standardowego ujęcia logiki skłoniły Leśniewskiego do poszukiwania nowego systemu. System taki winien spełniać dwa postulaty: (1) być fundamentem dla matematyki oraz (2) zostać skonstruowany w sposób pozbawiony jakichkolwiek wieloznaczności. W tym celu zbudował Leśniewski trzy systemy: system rachunku zdań zwany prototetyką, system rachunku nazw zwany ontologią i system teorii zbiorów w sensie kolektywnym zwany mereologią. Prototetyka to uogólniony rachunek zdań, w którym są kwantyfikatory mogące wiązać zmienne zdaniowe i w którym zmienne odnoszą się do dowolnych kategorii syntaktycznych zdefiniowanych na bazie wyjściowej kategorii zdań. Ontologia to bogaty system, u którego podstaw leży rachunek nazw. Obejmuje ona rachunek klas, rachunek relacji oraz całą niemal problematykę systemu *Principia Mathematica* Whiteheada i Russella. Mereologię z kolei można określić jako teorię stosunku całości do części.

Trzeba tu podkreślić, że Leśniewski zajmował postawę filozoficzną wobec logiki, podobnie jak Chwistek (por. paragraf 2 w rozdziale 2) interesował się tylko tymi kwestiami logicznymi, które wyrastały na gruncie jego własnych koncepcji filozoficznych w zakresie podstaw matematyki. Odróżniał się tym w zdecydowany sposób od innych przedstawicieli warszawskiej szkoły logicznej. Nie brał on zresztą bezpośredniego udziału w badaniach tej szkoły (jedyny wyjątek stanowi równoważnościowy rachunek zdań) – jego twórczość stanowiła odrębny nurt badań.

Zacznijmy rozważanie poglądów filozoficznych Leśniewskiego związanych z logiką i matematyką od stwierdzenia, że był on (podobnie jak Chwistek) zdecydowanym nominalistą. Pogląd ten wpłynął w sposób decydujący na jego konstrukcje logiczne – i to zarówno, jeśli chodzi o ich treść, jak i formę. Język był dla Leśniewskiego kolekcją konkretnych napisów. Wyrażenia języka rozumiał jako skończone ciągi znaków. Dwa równokształtne napisy traktował jako dwa odrębne, różne napisy. Istnieje, według niego, tylko tyle wyrażeń, ile ich zostało napisanych. Nie można mówić o jakimś potencjalnym istnieniu wyrażeń. W konsekwencji dany system logiczny zawiera tylko tyle twierdzeń, ile ich zostało do danej chwili napisanych, tzn. że każdy system logiczny składa się jedynie ze skończonej liczby twierdzeń. Leśniewski nie dopuszczał bowiem istnienia jakichkolwiek przedmiotów ogólnych, w szczególności wspólnych własności przedmiotów indywidualnych. Inną konsekwencją nominalizmu Leśniewskiego było to, że systemy równoważne, na przykład system rachunku zdań oparty na negacji i implikacji oraz system tegoż rachunku oparty na negacji i alternatywie jako wyjściowych funktorach, które traktuje się jako warianty tej samej logiki, teraz trzeba traktować jako dwa różne systemy. Systemy Leśniewskiego nie są nigdy czymś zakończonym w danym momencie. Nie można więc badać ich, stosując standardowe metody – te określają bowiem system logiczny jako (nieskończony w istocie) zbiór konsekwencji danego zbioru wyrażeń wyjściowych (aksjomatów). Trzeba jednak przyznać, że systemy Leśniewskiego są doskonałe pod względem formalizacji. Swoje stanowisko w omawianym zakresie Leśniewski określał jako konstruktywny nominalizm.

Pogląd ten łączył się u niego z tzw. intuicyjnym formalizmem. Zgodnie z nim język logiki – jednoznacznie i w sposób pełny skodyfikowany – mówi zawsze „coś" i „o czymś". Przekonanie takie mieli również inni przedstawiciele warszawskiej szkoły logicznej[18]. Leśniewski pisał na ten temat w „Grundzüge eines neuen System der Grundlagen der Mathematik":

> Ponieważ nie mam żadnego upodobania do różnych gier matematycznych, które polegają na tym, że się przy pomocy tych czy innych umownych reguł wypisuje różne mniej lub bardziej malownicze formuły, niekoniecznie sensowne, a nawet, jak niektórzy z graczy w matematykę ochoczo mniemają, pozbawione z konieczności znaczenia – nie starałbym się podać systematyzacji i skrupulatnej kontroli dyrektyw mojego systemu, jeśli w jego tezy nie włożyłbym pewnego w pełni określonego, takiego właśnie, a nie innego sensu, przy którym aksjomaty systemu i metody wnioskowania i definiowania, skodyfikowane w jego dyrektywach, nie miałyby dla mnie nieodpartej intuicyjnej ważności[19] (1929a, s. 78).

---

[18] Woleński twierdzi (1992, s. 23), że logicy warszawscy byli tu pod wpływem Leśniewskiego.

[19] „Da ich keine Vorliebe für verschiedene «Mathematikspiele» habe, welche darin bestehen, dass man nach diesen oder jenen konventionellen Regeln verschiedene mehr oder minder malerische Formeln aufschreibt, die nicht notwendig sinnvoll zu sein brauchen oder auch sogar, wie es einige der «Mathematikspiele» lieber

W pracy „O podstawach matematyki" znajdujemy zaś takie słowa:

> Jest różnica między naukami matematycznymi pojmowanymi jako teorie dedukcyjne, służące do ujęcia w prawa możliwie ścisłe różnorodnej rzeczywistości świata, a takimi niesprzecznymi systemami dedukcyjnymi, które zabezpieczają wprawdzie możność otrzymania na ich gruncie obfitości wciąż nowych twierdzeń, odznaczających się jednak jednocześnie brakiem jakichkolwiek łączących je z rzeczywistością walorów intuicyjno-naukowych (1927, s. 166).

Leśniewski traktował bowiem systemy formalne jako środek przekazywania pewnych informacji o świecie i jako sposób wyrażenia tego, co jest intuicyjnie prawdziwe. Choć może to wydawać się nie w pełni zgodne z jego nominalizmem i radykalnym formalizmem, to jednak Leśniewski nie uważał tych poglądów za sprzeczne. Istotnie, w „Grundzüge eines neuen System der Grundlagen der Mathematik" pisał:

> Nie widzę żadnej sprzeczności w tym, że uważając siebie za zatwardziałego „intuicjonistę", równocześnie wykorzystuję przy budowie swych systemów radykalny formalizm. Trudzę się przedstawieniem różnych teorii dedukcyjnych, aby w szeregu sensownych zdań wyrazić szereg myśli, które posiadam na ten czy inny temat i aby jedne zdania wyprowadzić z innych w taki sposób, aby to było w zgodzie z zasadami wnioskowania, które uważam za „intuicyjnie" obowiązujące [...][20] (1929a, s. 78).

---

haben möchten, notwendig sinnlos sein sollen, – hätte ich mir nicht die Mühe der Systematisierung und der vielmaligen skrupulösen Kontrollierung der Direktiven meines Systems gegeben, wenn ich nicht in die Thesen dieses Systems einen gewissen ganz bestimmten, eben diesen und nicht einen anderen, Sinn legen würde, bei dem für mich die Axiome des Systems und die in den Direktiven zu diesem System kodifizierten Schluss- und Definitionsmethoden eine unwiderstehliche intuitive Geltung haben".

[20] „Ich sähe keinen Widerspruch darin, wenn ich behaupten wollte, dass ich eben deshalb beim Aufbau meines Systems einen ziemlich radikalen «Formalismus» treibe, weil ich ein versteckter «Intuitionist» bin: indem ich mich beim Darstellen von verschiedenen deduktiven Theorien bemühe, in einer Reihe sinnvolle Sätze eine Reihe von Gedanken auszudrücken, welche ich über dieses oder

Według Leśniewskiego aksjomaty i reguły logiki są ważne w sposób oczywisty. Nie starał się przy tym wyjaśnić źródła tej oczywistości. Woleński twierdzi, iż można „domniemywać, że nawiązywał w tym punkcie do brentanizmu" (1996, s. 31).

Dla Leśniewskiego logika była opisem najogólniejszych rysów bytu (podobnie – pod jego wpływem – twierdził Kotarbiński, por. paragraf 4 w rozdziale 3). Pełni więc ona, jego zdaniem, rolę ogólnej teorii przedmiotów. Było to zgodne z tym, iż w szkole warszawskiej odrzucano tzw. analityczne ujęcie logiki, czyli tezę, że logika i matematyka to zbiór tautologii, które nic nie mówią o świecie. Uważano tu, że logika i matematyka odnoszą się do formalnych aspektów rzeczywistości. Sobociński tak pisze o stanowisku Leśniewskiego:

> [...] inaczej niż Łukasiewicz, uważał on [tzn. Leśniewski – uwaga moja, R.M.], że można znaleźć „prawdziwy" system w logice i w matematyce. Jego systematyzacja podstaw matematyki była rozumiana jedynie postulatywnie; chciał podać, w formie dedukcyjnej, najogólniejsze prawa, wedle których zbudowana jest rzeczywistość. Z tego powodu nie potrzebował teorii matematycznych czy logicznych, których – choć były niesprzeczne – nie uważał za zgodne z fundamentalnym strukturalnym obrazem rzeczywistości. Z tego powodu nie zajmował się teoriami matematycznymi czy logicznymi, których – choć były niesprzeczne – nie uważał za zgodne z podstawowym poglądem na strukturę rzeczywistości[21] (1956, s. 42).

---

jedes Thema hege, und die einen Sätze aus den anderen Sätzen auf eine Weise abzuleiten, die mit den Schlussweisen harmonisieren würden, welche ich »intuitiv« als für mich bindend betrachte [...]".

21 "[...] unlike Łukasiewicz, he held that one could find a »true« system in logic and in mathematics. His systematization of the foundations of mathematics was meant to be merely postulational; he wished to give, in deductive form, the most general laws according to which reality is built. For this reason, he had little use for any mathematical or logical theory which even though consistent, he did not consider to be in accord with the fundamental structural view of reality. For this reason, he had little use for any mathematical or logical theory which, even though consistent, he did not consider to be in accord with the fundamental structural view of reality".

Leśniewski odrzucał też konwencjonalizmu w stylu Henriego Poincarégo. W pracy „Próba dowodu ontologicznej zasady sprzeczności" pisał:

> Nie potrzebuję chyba zaznaczać, że konwencje językowe, które wyżej sformułowałem i na których się opieram w swych dowodzeniach, nie mają nic wspólnego z tak zwanym „konwencjonalizmem", reprezentowanym w nauce przez Henryka Poincarégo. „Konwencjonalizm" tego typu polega zawsze na przyjmowaniu tych lub innych konwencji względem przedmiotów, o których przedstawiciele „konwencjonalizmu" pragną wypowiadać pewne twierdzenia, których nie umieją uzasadnić inaczej, jak uciekając się do pomocy tych lub innych „umów". „Konwencje" „konwencjonalistów" nie dotyczą przedmiotów, których takie albo inne cechy zależne są od woli tych, którzy konwencje dane przyjmują, lecz mają za treść przedmioty, których w żadnym kierunku nie potrafią zmienić żadne przyjmowane w stosunku do nich „umowy" (1913a, s. 130).

Jako przykład Leśniewski w dalszym ciągu podaje przestrzeń – żadne konwencje dotyczące jej własności nie mogą zmienić tych własności, gdyż są one niezależne od przyjmujących je uczonych. Zdania, które ujmują takie konwencje albo w ogóle nie dają się udowodnić czy sprawdzić, a zatem konwencje takie nie mają wartości zdań naukowych, albo też dają się udowodnić, ale wtedy nie widać powodu, dlaczego przyjmować je w postaci konwencji.

Inny charakter przypisuje Leśniewski konwencjom językowym. Twierdzi, że są one „niezbędnym warunkiem możliwości rozumienia symboliki językowej, albowiem ustalają zasady, na podstawie których jest skonstruowany system symboli językowych, którym się posługuję, są więc nieodzownym kluczem, dającym możność odcyfrowania [...] tych wyrażeń, których używam" (1913a, s. 130). Dotyczą one więc przedmiotów, których cechy zależne są od ich twórcy i użytkownika. Na przykład „funkcje [...] symboliczne [...], które przyjmuję, zmieniają się pod wpływem tego, jakie funkcje nadam tym wyrażeniom w konwencjach, które przyjmuję" (1913a, s. 131). Zdania wyrażające takie konwencje są prawdziwe albo fałszywe, „albowiem symbolizują one stan rzeczy, który, przyjmując odnośne konwencje, sam stwarzam" (1913a, s. 131).

Leśniewski zajmował zdecydowane stanowisko w sporze o uniwersalia, odrzucając istnienie jakichkolwiek przedmiotów idealnych i ogólnych. W publikacji „Krytyka logicznej zasady wyłączonego środka" (1913c) zamieścił dowód nieistnienia takich przedmiotów, który stał się popularny w Polsce. Wykorzystuje on pojęcie cechy oraz zasadę wyłączonego środka i zasadę sprzeczności. Z pewnymi modyfikacjami przytoczył go Kotarbiński w artykule „Sprawa istnienia przedmiotów idealnych" (1920) i powtórzył w książce *Elementy teorji poznania, logiki formalnej i metodologji nauk* (1929). Stał się on jednym z uzasadnień głoszonego przez niego reizmu (por. paragraf 3 w rozdziale 3). Leśniewski wrócił do swego dowodu w pracy „O podstawach matematyki" (1927, s. 183–184), gdzie podał wersję, w której nie pojawia się termin „cecha"[22]. Dowód został tu poprzedzony następującymi wyjaśnieniami:

> W czasie, gdy ustęp ten [chodzi tu o stosowny fragment pracy (1913b) – uwaga moja, R.M.] pisałem, wierzyłem, iż istnieją na świecie tzw. cechy i tzw. stosunki jako dwa specjalne rodzaje przedmiotów, i nie odczuwałem żadnych skrupułów przy posługiwaniu się wyrazami „cecha" i „stosunek". Obecnie nie wierzę już od dawna w istnienie przedmiotów będących cechami, ani też w istnienie przedmiotów będących stosunkami, nic mnie też nie skłania do wierzenia w istnienie takich przedmiotów [...], wyrazami zaś „cecha" i „stosunek" staram się w sytuacjach o cokolwiek „delikatniejszym" charakterze nie posługiwać bez daleko idących ostrożności i omówień. Nie mam dziś także skłonności – wobec możliwości rozmaitych nieporozumień interpretacyjnych – do przypisywania tych lub innych poglądów w sprawie „przedmiotów ogólnych" tym lub innym z autorów, wymienionym w ustępie wyżej przytoczonym (1927, s. 183).

Podobnie jak Łukasiewicz (por. paragraf 1 w rozdziale 3), również Leśniewski stał na stanowisku ekstensjonalizmu, odrzucając wszel-

[22] Polemikę, jaka wywiązała się wokół dowodów Leśniewskiego, relacjonuje Woleński (1997, s. 58–65). Brał w niej udział m.in. Roman Ingarden.

kie konteksty intensjonalne (jak na przykład „*X* wie, że *p*") i uznając je za wadliwe. Uważał, że można je wyeliminować przez traktowanie argumentu funktora intensjonalnego jako nazwy zdania, a nie jako zdania[23]. Leśniewski był także zwolennikiem dwuwartościowości (biwalentyzmu). Ekstensjonalizm i biwalentyzm sprawiły, że nie interesował się logikami wielowartościowymi czy modalnymi. Uważał, że logika wielowartościowa to tylko czysty formalizm niemający żadnej treści intuicyjnej. Warto go może badać jako system formalny, ale nic poza tym. Jeden z listów Leśniewskiego do Twardowskiego świadczy o tym, że w latach trzydziestych zajmował się co prawda logikami wielowartościowymi, ale badania te porzucił. Pisał on:

> Praca moja o „logikach wielowartościowych", o której pisałem Panu Profesorowi w zeszłym roku, poszła chwilowo w kąt [...]. Z materiałów, które mi się nazbierały na temat „logik wielowartościowych", zrobiłem już całoroczny dwugodzinny wykład „O tak zwanych wielowartościowych systemach rachunku zdań"; dalszy zaś ciąg tego wykładu zamierzam ogłosić na rok bieżący jako oddzielną całość, pod jakimś nowym tytułem (cyt. za Jadczak 1993).

Należy zwrócić uwagę na tytuł wykładu Leśniewskiego, a mianowicie na zwrot „o tak zwanych" – ilustruje on znakomicie stosunek autora do tych logik.

Nowe światło na stosunek Leśniewskiego do idei wielowartościowości i problemu intensjonalności w logice rzuca (odkryta niedawno przez Jacka Juliusza Jadackiego) dyskusja wokół jego odczytu zatytułowanego „Geneza logiki trójwartościowej" z roku 1938 (streszczenie odczytu – por. Łukasiewicz 1939, dyskusja – por. Leśniewski *et al.* 1939). Po zreferowaniu przez Łukasiewicza jego poglądów na temat genezy logik wielowartościowych i przypomnieniu, że trzecia wartość logiczna może przysługiwać zdaniom o przypadkowych (niezdeterminowanych) zdarzeniach przyszłych, zaczęła się dyskusja, którą rozpoczął Leśniewski. W sprawozdaniu stwierdza się, że zajmuje on „w stosunku do »logiki trójwartościo-

[23] Nieznane są niestety szczegóły tego rozwiązania.

wej« prof. Łukasiewicza, jak i w stosunku do wszelkich innych »logik wielowartościowych«, stanowisko negatywne" (Leśniewski *et al.* 1939, s. 235). Wymienia się następnie tego powody, mianowicie: (1) nie nadano dotąd trzeciej wartości logicznej zrozumiałego sensu, który prowadziłby do jej interpretacji pokazującej jakiś związek z rzeczywistością; (2) skoro wszelkie zagadnienia naukowe można rozwiązywać za pomocą logiki dwuwartościowej, więc nie widać powodów, dla których należałoby wprowadzać dodatkowe wartości logiczne i związane z nimi logiki; (3) rozumowanie Arystotelesa dotyczące zdań o zdarzeniach przyszłych, na które to rozumowanie powoływał się też i Łukasiewicz (por. paragraf 1 w rozdziale 3) można przenieść także na przypadek zdarzeń przeszłych i teraźniejszych; (4) rozważanie zdań, których wartość logiczna zależy od parametru czasowego, wymaga uprzedniego ustalenia zasad rządzących takim parametrem; (5) logika trójwartościowa nie prowadzi do rozwiązania problemów dotyczących zdań wyrażających możliwość czy konieczność, a więc zdań zawierających (pewne) funktory intensjonalne. W sprawozdaniu pisze się dalej:

> Mówca nie zna – wobec nieistnienia na świecie jakiegoś zadowalającego pod względem intuicyjnym i formalnym systemu „logiki intensjonalnej" – żadnej skutecznej metody rozsądnego interpretowania i logicznego „opanowywania" wzmiankowanych „funkcji intensjonalnych" poza metodą ich „dezintensjonalizacji", polegającej na przyporządkowaniu im posiadających ten sam sens wyrażeń, które już są na zasadach konsekwentnie „ekstensjonalistycznych" i dają się bez żadnych komplikacji rozważać na gruncie normalnej „ekstensjonalistycznej" i „dwuwartościowej" logiki. Mówca nadmienia, że jego koncepcja „dezintensjonalizacji" tzw. funkcji intensjonalnych była przez niego od wielu już lat szczegółowo rozwijana w różnych jego wykładach, i zwraca jednocześnie uwagę na zbliżoną do tej koncepcji pod względem zasadniczej idei koncepcję R[udolfa] Carnapa, ogłoszoną przez niego ostatnio w *Logische Syntax der Sprache*, koncepcję, która jest, zdaniem mówcy, w pewnych swych szczegółach nietrafna i prowadzi do nie dających się utrzymać teoretycznych konsekwencji (Leśniewski *et al.* 1939, s. 236).

Leśniewski zakończył swoje wystąpienie, szkicując analizę zwrotów typu „możliwe, że *p*" z punktu widzenia „dezintensjonalizacji". Doszedł do wniosku, że „brak jakichkolwiek niepokojących aporii, które mogłyby przemawiać za potrzebą poszukiwania jakiejś nowej logiki dla ich usunięcia" (Leśniewski *et al.* 1939, s. 237).

Dodajmy jeszcze – dla pełności obrazu – że Łukasiewicz, odpowiadając na uwagi Leśniewskiego, zwrócił uwagę, że traktuje systemy logiki wielowartościowej przede wszystkim jako systemy formalne, a to, iż można nadać dodatkowym wartościom logicznym jakąś interpretację intuicyjną, jest jedynie czynnikiem, który pomógł mu systemy te zbudować. Warto też dodać, że Leśniewski przywiązywał wielką wagę do wspominanej w przytoczonym powyżej sprawozdaniu „dezintensjonalizacji" logiki.

Z omówionymi powyżej kwestiami, a dokładniej z problemem trzeciej wartości logicznej i problemem zależności wartości logicznej zdania od parametru czasowego, wiąże się też sprawa wieczności i odwieczności prawdy, na który to temat Leśniewski polemizował z Kotarbińskim. Otóż w artykule „Zagadnienie istnienia przyszłości" (1913) przy okazji rozważań na temat możliwości wolnego praktycznego działania i twórczości Kotarbiński poruszył pewne kwestie natury logicznej. Twierdził mianowicie, że wprawdzie każda prawda jest wieczna, ale nie każda jest odwieczna. Wyprowadzał stąd wniosek o istnieniu zdań, które nie są ani prawdziwe, ani fałszywe. Głosił więc indeterminizm oraz potrzebę wprowadzenia trzeciej wartości logicznej. Pogląd ten stał się zresztą filozoficzną podbudową dla logiki wielowartościowej Łukasiewicza[24]. Kotarbiński korzystał w swoich rozważaniach z definicji prawdy zarysowanej przez Twardowskiego i pojmowanej absolutystycznie. Leśniewski w artykule „Czy prawda jest tylko wieczna czy też wieczna i odwieczna?" (1913b) twierdził – polemizując z Kotarbińskim – że każda prawda jest wieczna i odwieczna. W pracy „Próba dowodu ontologicznej zasady sprzeczności" (1913a) głosił zaś, że nie ma zdań, które nie byłyby ani prawdziwe, ani fałszywe. Leśniewski pokazał, że sta-

[24] Łukasiewicz przyznał, że lektura artykułu Kotarbińskiego wpłynęła na kształtowanie się u niego pomysłu logiki wielowartościowej.

nowisko Kotarbińskiego jest niezgodne z absolutystycznym pojmowaniem prawdy[25]. Odrzucił całkowicie temporalne indeksowanie prawdziwości. Kwestionuje on mianowicie prawomocność kontekstów typu „zdanie A jest prawdziwe w czasie *t*". Według niego zdania są po prostu albo prawdziwe, albo fałszywe. I tu dochodzimy znów do kwestii biwalencji, o której pisaliśmy już wyżej. Dodajmy jeszcze, że najważniejszym właściwie rezultatem rozważań Leśniewskiego na temat temporalności prawdy jest dowód, iż jej wieczność i odwieczność są równoważne, jeśli akceptuje się zasadę niesprzeczności.

4. Tadeusz Kotarbiński

Zanim omówimy szczegółowe poglądy Tadeusza Kotarbińskiego związane z logiką i matematyką, przyjrzyjmy się jego pojmowaniu filozofii jako takiej. Problem przedmiotu badań i metod badawczych filozofii interesował go od początku jego działalności. Wielokrotnie wyrażał niezadowolenie z funkcjonujących koncepcji filozofii, ale jednocześnie z aprobatą odnosił się do większości problemów poruszanych przez filozofów. Zauważał przede wszystkim ogromną wieloznaczność pojęcia „filozofia". Z naszego punktu widzenia istotne jest wyróżnienie przez niego tzw. małej i wielkiej filozofii. Znajdujemy je po raz pierwszy w jego odczycie inaugurującym jego działalność jako profesora filozofii, pt. „O wielkiej i małej filozofii". Choć tekst ten nie został nigdy opublikowany, to jego treść daje się zrekonstruować, gdyż Kotarbiński wielokrotnie wracał do wyrażonych tam myśli[26]. Preferował on „małą" filozofię polegającą m.in. na systematycznym rozbiorze pojęć używanych w filozofii i na zastosowaniu do tej analizy narzędzi logicznych. Taka analiza winna stać się punktem wyjścia do budowania systemów filozoficznych. W artykule „Filozof" pisał:

---

[25] Argumentacja Leśniewskiego przekonała Kotarbińskiego, który później nie bronił już indeterminizmu logicznego.

[26] Streszczenie wspomnianego wykładu zachowało się w przedmowie do Hosiasson *et al.* (1934).

> Filozof jako taki ani nie rachuje, ani nie eksperymentuje. Uprawia on myślicielstwo, doskonaląc zagadnienia i pojęcia, twierdzenia i systemy twierdzeń i czyniąc to głównie przez wysiłek wewnętrzny, zmierzający ku zrozumieniu właściwej intencji myśli, szukającej po omacku, ku racjonalniejszemu ukształtowaniu problematów, ku doprowadzeniu do jasności zupełnej pojęć – na ogół niewyraźnych, ku uzyskaniu oczywistości twierdzeń i solidności systemów. [...] Toczy on walkę z mętnością, chwiejnością, nieokreślonością myślenia, uzbraja się przeciwko wszelkiej w myśleniu nietrzeźwości, jakże częstej skutkiem ulegania zatwardziałemu przesądowi lub ponętnej dla serca ułudzie, lub stronniczości wreszcie, która wyrasta z sytuacji osobistej lub społecznej samego myśliciela (1957a, s. 16).

Kotarbiński nie dbał przy tym o to, czy takie „myślicielstwo" można nazwać nauką. Kontrastuje to z postawą Łukasiewicza, który twierdził, że filozofia albo jest nauką w sensie nauki empirycznej, albo jest tylko spekulacją. Jeżeli filozofia chce być nauką, to filozof musi albo rachować, albo eksperymentować. Według Kotarbińskiego filozof nie czyni ani tego pierwszego, ani tego drugiego, ale analizuje. Ważne jest tu jednak to, by analizował zgodnie z prawidłami logiki.

Logika i jej reguły stanowią gwarancję poprawności analiz filozoficznych. Przy tym Kotarbiński rozumiał logikę bardzo szeroko. Uważał, że obejmuje ona w szczególności sformalizowane systemy logiczne, jak i zasady definiowania, klasyfikowania, rozumowania, unikania błędów logicznych i semantycznych itp. Kotarbiński rozpowszechnił w Polsce podział logiki (w szerszym znaczeniu) na semiotykę, logikę formalną i metodologię nauk. W *Kursie logiki dla prawników* (1953) pisał:

> Logika w szerszym tego słowa znaczeniu obejmuje logikę formalną, czyli logikę w węższym sensie, oraz semantykę, teorię poznania i metodologię nauk.

Takiemu rozumieniu logiki odpowiadała też praktyka dydaktyczna. Było tak zresztą nie tylko w przypadku Kotarbińskiego. Zauważmy, że przez długi okres nawet wykłady logiki dla matematyków kończyły się wykładami na temat rozumowań w naukach przyrodniczych. Por. na przykład paragraf 11 skryptu Łukasiewicza *Elementy logiki matematycznej* (1929a) czy paragraf 14 skryptu Jaśkowskiego *Elementy logiki matematycznej i metodologii nauk ścisłych: skrypt z wykładów* (1947).

Chcąc zrozumieć poglądy Kotarbińskiego na matematykę i logikę, musimy wyjść od jego koncepcji ontologicznych i semantycznych, tzn. od reizmu. Reizm jest u niego koncepcją zarówno semantyczną, jak i ontologiczną, przy czym obie warstwy występują niejako równolegle. Tworząc reizm, Kotarbiński opierał się – jak przyznaje – na ideach logicznych Leśniewskiego wyłożonych przez niego w ramach systemu rachunku nazw (ontologia Leśniewskiego). W przedmowie do *Elementów logiki, teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk* pisał:

> Najwięcej wszelako nauczyłem się od prof. dra Stanisława Leśniewskiego. W wielu miejscach książki wyraźnie z tego zdaję sprawę. Ale to są punkty najważniejsze i najwyraźniejsze. Poza tym, przyznaję, cała myśl moja przesycona jest do głębi wpływami tego niezwykłego umysłu, z którego bezcennych darów los przychylny pozwolił mi przez szereg lat korzystać w obcowaniu niemal codziennym. Jestem niewątpliwie uczniem kolegi Leśniewskiego, któremu na tym miejscu serdecznie i z głębokim szacunkiem dziękuję za wszystko, czego mnie kiedykolwiek nauczył[27] (1961, s. 9–10).

Źródłem reizmu Kotarbińskiego były jego wątpliwości co do istnienia cech i innych przedmiotów idealnych. Wyraził je po raz

---

[27] Zauważmy, że i Leśniewski cenił sobie współpracę z Kotarbińskim i przyznawał, że wiele mu zawdzięczał. W pracy „O podstawach matematyki" pisał: „Od najbardziej zamierzchłych czasów naszej wspólnej »filozoficznej« przeszłości, kiedyśmy razem [...] błądzili wśród mylnych perci semantyki i teorii »prawdy« [...] przyzwyczaiłem się do kontrolowania rozmaitych swoich pomysłów i zamierzeń teoretycznych w naradach naukowych z *Tadeuszem Kotarbińskim*: korzystałem przy różnych nadarzających się sposobnościach z jego subtelnej pomocy analitycznej; odwoływałem się do jego wnikliwych intuicji przy ustalaniu pod względem rzeczowym tych lub innych założeń poszczególnych teorii dedukcyjnych, które budowałem; wysłuchiwałem jego rzeczowych i rzetelnych uwag krytycznych i doznawałem stanów niepokojącej niepewności, gdy od reprezentowanych przez niego koncepcji teoretycznych zbytnio się oddaliłem w poglądach swoich na jakieś sprawy" (1930, s. 161).

pierwszy, poddając krytyce poglądy przyjmujące istnienie przedmiotów idealnych, w artykule „Sprawa istnienia przedmiotów idealnych" (1920). Pisał tam, że nie ma podstaw, by istnienie takich przedmiotów przyjmować. Starał się wykazać, że nie istnieją przedmioty fikcyjne (tylko pomyślane), matematyczne, nie istnieją rodzaje (powszechniki, czyli uniwersalia), cechy, relacje, przedmioty intencjonalne, procesy myślowe i treści psychiczne. W związku z tym Kotarbiński głosił tezę nazwaną reizmem lub konkretyzmem (tą drugą nazwą posługiwał się po wojnie zamiennie z nazwą „reizm").

Reizm został wyłożony w *Elementach* (1929, 1961) i w różnych artykułach. W początkowym okresie koncepcja ta była rozwijana od razu na poziomie ontologicznym i semantycznym, później Kotarbiński wprowadził rozróżnienie reizmu w sensie ontologicznym i reizmu w sensie semantycznym. Reizm w sensie ontologicznym sprowadza się do dwóch tez: (1) każdy przedmiot jest rzeczą; (2) żaden przedmiot nie jest stanem ani stosunkiem, ani cechą[28]. Kotarbiński przyjmuje też, że rzeczy są ciałami, a zatem bytami rozciągłymi istniejącymi w czasie i przestrzeni. Mamy tu więc do czynienia z somatyzmem wzmocnionym do pansomatyzmu – istnieją bowiem ciała i tylko ciała. Odróżnia to reizm od innych konkretyzmów, na przykład Leibniza, który (pod koniec życia) przyjmował wprawdzie, że istnieją tylko konkrety, ale jego konkretyzm był natury spirytualistycznej, gdyż konkrety owe były u niego duchowymi monadami. Zauważmy, że reizm można widzieć jako pewną interpretację ontologii Leśniewskiego (ten ostatni nie był reistą, choć był nominalistą – por. paragraf 3 w rozdziale 3).

Reizm w sensie semantycznym jest pewną teorią języka. Punktem wyjścia jest tu rozróżnienie nazw rzetelnych i pozornych. Nazwa pozorna (onomatoid) jest to takie wyrażenie imienne (w sensie gramatycznym), które odnosi się nie do rzeczy (przy czym osoby traktuje się jako szczególnego rodzaju rzeczy), ale do przedmiotów idealnych, tzn. – w języku klasyfikacji Wundta – do cech, stosunków czy stanów. Zdanie ma sens literalny wtedy i tylko wtedy, gdy

[28] Mamy tu wyraźne odniesienie do czterech kategorii zaproponowanych przez W. Wundta.

zbudowane jest ze stałych logicznych, czyli z funktorów logiki, oraz z nazw rzetelnych. Kotarbiński wyróżnia jeszcze zdania mające sens skrótowo-zastępczy – brak w nich wprawdzie sensu literalnego, ale można je przekształcić na zdania o takim sensie, oraz zdania bezsensowne – czyli niedające się przekształcić w zdania o sensie literalnym. Przykładami nazw pozornych mogą być: „czerwień", „sprawiedliwość", „fakt", uprawnienie" itd.

Reizm napotyka na rozmaite trudności. Nie będziemy tego problemu rozwijali tutaj dokładnie[29] – zwrócimy tylko uwagę na problemy związane z filozofią matematyki. Otóż w języku reizmu można wprawdzie mówić o zbiorach w sensie dystrybutywnym, który jest podstawowy dla teorii mnogości, na której z kolei buduje się cały gmach matematyki, ale jedynie pod warunkiem, że wypowiedzi te będą odnosiły się do elementów tych zbiorów. Pozwala to na rozwinięcie elementarnej algebry zbiorów, ale już nie na zdefiniowanie na przykład pojęcia zbioru skończonego czy nieskończonego. To jednakże jest niewystarczające dla matematyki. Leśniewski, na którego powoływał się Kotarbiński, zdawał sobie sprawę z tego rodzaju trudności i dlatego proponował posługiwanie się pojęciem zbioru w sensie kolektywnym (mereologicznym). Takie ujęcie jednak nie pozwala zrealizować tego wszystkiego, czego matematyk oczekuje od teorii mnogości. Wszystko to sprawiło, że reizm pozostał ostatecznie raczej programem semantycznym, a nie teorią świata, choć sam Kotarbiński nigdy nie odrzucił reizmu ontologicznego. Należy dodać, że reizm znalazł wielu zwolenników, spośród których największym był w szczególności Alfred Tarski (por. uwagi na ten temat w paragrafie 6 w rozdziale 3)[30]. Dodajmy też, że reizm, dzięki

---

[29] Uwagi na ten temat można znaleźć na przykład w książkach Woleńskiego (1990) oraz (1997).

[30] Warto też przytoczyć zdanie Andrzeja Mostowskiego wygłoszone po powrocie z konferencji poświęconej podstawom teorii mnogości. Mówił on: „Proszę sobie wyobrazić, że ja wzdychałem tam do reizmu. Koncepcje, które przedstawiono, były wynikiem spekulacji tak karkołomnych i tak dalece nieuchwytnych dla intuicji i niezrozumiałych, że reizm wydawał się oazą, w której można pooddychać świeżym powietrzem" (Kotarbińska 1984, s. 73).

swoim narzędziom logicznym, pozwala osiągnąć więcej niż inne nominalizmy.

Konsekwencją stanowiska reistycznego Kotarbińskiego było powstanie jego koncepcji zdania logicznego, która jest punktem wyjścia rozważań na temat pojęcia prawdy. Otóż w *Elementach* (1929, 1961) rozróżnia on idealistyczne („w duchu idealizmu platonizującego" – por. 1961, s. 130), psychologiczne i nominalistyczne pojęcie zdania, przy czym przyjmuje jedynie to ostatnie, pisząc, że zdanie to „sam symbol, napis, powiedzenie, zwrot językowy" (1961, s. 131).

Jakie były zasadnicze cechy koncepcji prawdy Kotarbińskiego? Zgodnie z reizmem twierdził on, że prawdziwość jest cechą zdania, że predykat „prawdziwy" można odnosić tylko do zdań. Ponieważ – zgodnie z reizmem – nie istnieją zadania w sensie logicznym (idealnym) ani zdania w sensie psychologicznym, predykat ten nie może odnosić się do myśli, a jedynie do zdań rozumianych jako napisy. W stosunku do myśli można go odnosić tylko w sensie przenośnym. W *Elementach* pisał:

> Z naszego stanowiska wypada stwierdzić, że nie ma sądów w znaczeniu logicznym, nieprawda przeto, jakoby sądy w znaczeniu logicznym były prawdziwe lub fałszywe. Pozostaje sprawa sądów w znaczeniu psychologicznym i sprawa zdań. Ale wszak i sądów w znaczeniu psychologicznym naprawdę nie ma, skoro miałyby to być zdarzenia. Więc nieprawda również, jakoby sądy w znaczeniu psychologicznym były prawdziwe lub fałszywe (1961, s. 131).

Kotarbiński był zwolennikiem absolutnego charakteru prawdziwości i przeciwnikiem podejścia relatywistycznego. Prawdziwość czy fałszywość zdania nie zależy od tego, kto i w jakich okolicznościach je sformułował:

> Czytelnik musiał doznać żywego wrażenia, że pozycja relatywizmu jest słabsza. Toteż, jakkolwiek relatywizm pociąga ku sobie umysły i dziś (por. pisma pragmatystów), jak pociągał je w epoce sofistów greckich (kiedy to jeden z tych mistrzów sporu, Protagoras, głosił, że człowiek jest miarą rzeczy, rozumiejąc bodaj przez to, iż dla jednego jedno, dla drugiego coś przeciwnego bywa prawdziwe), jednakże pośród dobrych

> specjalistów w dziedzinie logiki relatywizm nie cieszy się mirem (1961, s. 140).

Kotarbiński rozróżniał realne i werbalne rozumienie prawdziwości[31]. Wydaje się to jego oryginalnym wkładem do teorii prawdy. Zgodnie z tym rozróżnieniem, w pewnych kontekstach predykaty „prawdziwy" czy „fałszywy" nie są konieczne, odgrywają rolę jedynie ozdobników stylistycznych i niczego nie wnoszą do treści zdania. Można je przeformułować, nie używając słów „prawdziwy" czy „fałszywy". Tak więc zdanie „Zdanie, że Warszawa jest stolicą Polski, jest prawdziwe", można zastąpić przez zdanie „Warszawa jest stolicą Polski", które nie zawiera predykatu „prawdziwy". Kotarbiński zauważa jednak, że nie zawsze jest to możliwe. I tak na przykład zdanie „Teoria względności jest prawdziwa" czy zdanie „To, co powiedział Platon, jest prawdziwe" nie dają się tak przeformułować. Przez eliminację słowa „prawdziwy" otrzymuje się tu wypowiedzi innego rodzaju – przestają one być zdaniami, stając się nazwami. Zatem w rozmaitych kontekstach predykaty „prawdziwy" i „fałszywy" okazują się konieczne. W takich przypadkach występują one w sensie realnym (a nie tylko werbalnym). W duchu reizmu Kotarbiński twierdzi wyraźnie:

> W ogóle nie ma „prawd" ani „fałszów", jeśliby to miały być jakieś tak zwane „przedmioty idealne", jakieś tak zwane „przedmioty ze świata treści". Są tylko osoby myślące prawdziwie i osoby myślące fałszywie oraz prawdziwe zdania i fałszywe zdania. Słowa „prawda" i „fałsz" będą więc nazwami właściwymi, przy tym nie pustymi, jeżeli przez „prawdę" rozumieć będziemy „zdanie prawdziwe", a przez „fałsz" – „zdanie fałszywe" (1961, s. 136).

Nośnikami zatem prawdziwości czy fałszywości mogą być jedynie zdania rozumiane jako napisy.

Kotarbiński rozróżniał ponadto w *Elementach* klasyczne i utylitarystyczne rozumienie prawdziwości i fałszywości. Zgodnie z tym

---

[31] W (1926) Kotarbiński używał terminów: realne i nihilistyczne rozumienie prawdziwości. Por. też jego artykuł „W sprawie pojęcia prawdy" (1934) będący recenzją książki Tarskiego *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych* (1933).

pierwszym rozumieniem: „prawdziwie – to tyle, co: zgodnie z rzeczywistością", według podejścia utylitarystycznego: „prawdziwe – to pod pewnym względem użytecznie" (1961, s. 132). Jedną z form rozumienia utylitarystycznego jest pragmatyzm, który głosi, że „prawdziwość nie jest niczym innym jak tylko własnością danego sądu, iż prowadzi on do działań skutecznych" (1961, s. 132).

Rozróżniwszy oba powyższe sensy, Kotarbiński wyraźnie opowiedział się za rozumieniem klasycznym. Zdawał sobie oczywiście sprawę z tego, że owa „zgodność z rzeczywistością" jest pojęciem nieprecyzyjnym i ma raczej charakter metaforyczny, kiedy rozumie się ją jako analogię czy obraz:

> Przejdźmyż tedy do doktryny klasycznej i zapytajmy, co tu się rozumie przez ową „zgodność z rzeczywistością"? Nie idzie wszak o to, że myśl prawdziwa ma być dobrą kopią, czy wierną podobizną rzeczy, o której myślimy, na wzór kopii malarskiej lub fotografii. Chwila zastanowienia wystarczy, by utwierdzić metaforyczny charakter takiego porównania. Tu potrzebna staje się jakaś inna interpretacja owej „zgodności z rzeczywistością". Poprzestaniemy na interpretacji następującej: „Jan myśli prawdziwie zawsze i tylko, jeżeli Jan myśli, że tak a tak rzeczy się mają, i jeżeli przy tym rzeczy się mają tak właśnie" (1961, s. 133).

W *Elementach* (i wcześniej: 1926) Kotarbiński rozważał również problem kryteriów prawdy. Twierdził, że „poszukiwanie kryterium prawdy wydaje się istotnie przedsięwzięciem chimerycznym, przynajmniej jeśli idzie o kryterium powszechne, czyli takie, po którym by można było poznać prawdziwość jakiegokolwiek zdania prawdziwego" (1961, s. 141). Można jednak szukać kryteriów cząstkowych stosowalnych tylko do pewnych dziedzin. Kotarbiński wyróżnia kryteria intuicyjne (odwołujące się do poczucia oczywistości), sytuacyjne (odnoszące się do analizy spostrzeżeń z uwzględnieniem danej sytuacji) i strukturalne (opierające się na analizie logicznej struktury wypowiedzi) oraz genetyczne (polegające na analizie pochodzenia danego stwierdzenia), podkreślając wyraźnie ich cząstkowość i wskazując przypadki, w których nie dają się one stosować i nie pozwalają rozróżniać zdań prawdziwych i fałszywych.

Na koniec tych rozważań o Kotarbińskiego teorii prawdy dodajmy, że jego koncepcje wpłynęły bardzo silnie na poglądy i ujęcie problematyki prawdy przez Alfreda Tarskiego – por. paragraf 6 w rozdziale 3.

Kotarbiński poświęcał wiele uwagi kwestiom metodologicznym. Z punktu widzenia naszych rozważań ważne są jego poglądy na metodę dedukcyjną. Według niego jest ona typowa dla nauk apriorycznych, podczas gdy metoda indukcyjna jest typowa dla nauk empirycznych. Ta pierwsza osiągnęła szczyty w podstawowych gałęziach matematyki (logice formalnej, teorii mnogości), ta druga w fizyce eksperymentalnej.

W *Elementach* znajdujemy m.in. rozważania o ważnych cechach metody dedukcyjnej. I tak Kotarbiński pisze, że potrzebna jest nade wszystko jednoznaczna symbolika. Przy jej doborze „dobrze jest liczyć się [...] z przejrzystością i łatwością manipulacyjną symboli, z naturalnością wyboru terminów pierwotnych, wreszcie z tym, by terminów pierwotnych było jak najmniej" (1961, s. 289). Zdaje sobie przy tym sprawę, że postulaty te mogą prowadzić czasem do konfliktów. Ważną – aczkolwiek tylko pomocniczą rolę odgrywają w metodzie dedukcyjnej definicje, które „informują o tym, że taki a taki znak może być użyty dla zastąpienia takiego a takiego znaku przy wnioskowaniu" (1961, s. 291).

Najważniejszą składową systemu dedukcyjnego są aksjomaty. Przez aksjomaty należy rozumieć „zdania naczelne systemu dedukcyjnego, nie będące definicjami", przy czym zdania naczelne to „zdania przyjęte w skład systemu bez dowodu" (1961, s. 292). Nie stawia się tu więc wymogu oczywistości, który tradycyjnie łączono z pojęciem aksjomatu. Kotarbiński pisze, że „metodologowie [...] nie uważają [...] za rzecz istotną, by aksjomaty były oczywiste, nie mówiąc już o tym, że i prostota specjalna nie uchodzi za nieodzowną cnotę aksjomatu" (1961, s. 293). Źródłem tego jest „obniżenie się kredytu oczywistości, jako kryterium prawdy, wobec zawodów, jakie ono sprawia" (1961, s. 294). Inny powód to to, że budując systemy dedukcyjne, chcemy poznać związki logiczne między tezami, a nie przekonać się o prawdziwości tez pochodnych. Z tego punktu widzenia obojętne właściwie staje się to, jakie tezy bierze się za punkt wyjścia. Stąd systemy dedukcyjne często nazywa się systemami hipotetyczno-dedukcyjnymi – podejście takie preferują w szczególności konwencjonaliści. Z drugiej strony pojęcie oczywistości jest niejasne i winno być zawsze zrelatywizowane do konkretnej osoby – trzeba więc, jak pisze Kotarbiński – odróżnić oczywistość z punktu widzenia początkujących i oczywistość z punktu widzenia znawców przedmiotu. Układ aksjomatów winien jednak spełniać dwa warunki: aksjomaty powinny być wzajemnie niesprzeczne i powinny tworzyć układ zupełny.

W wyprowadzaniu tez z przyjętych aksjomatów nie powinno się polegać tylko na intuicji, gdyż ta bywa złudna. Stąd postulat odwoływania się jedynie do kształtu napisów i posługiwania się jedynie metodami formalnymi.

Znajdujemy w *Elementach* także uwagi filozoficzne na temat matematyki jako nauki. Według Kotarbińskiego matematyka „zawdzięcza swą rolę zarówno temu, czym się zajmuje, jak sposobom, których się chwyta, jak wreszcie licznym rezultatom, które się składają na imponujący jej dorobek” (1961, s. 370). Matematyka bowiem:

> [...] stosuje wzorowe sposoby dowodzenia, wykształca nieocenione przyzwyczajenia pożyteczne przy rozumowaniu, dostarcza obfitego zasobu wiedzy niezbędnej do głębszego zrozumienia teorii fizyki, podstawowej nauki przyrodniczej, wreszcie daje świadomość dystansu między stopniem udoskonalenia innych dociekań w porównaniu ze stopniem udoskonalenia matematyki oraz w wielu przypadkach pozwala ocenić, jakim jest postępem dla danej dyscypliny naukowej wprowadzenie do niej ilościowego traktowania rzeczy, aksjomatycznego sposobu budowania teorii oraz zastosowania w niej praw przez matematykę wykrytych i do niej należących (1961, s. 370).

Chcąc scharakteryzować matematykę jako naukę i wskazać jej cechy konstytutywne, można albo próbować szukać odpowiedzi na pytanie o jej przedmiot (Kotarbiński mówi tu o orientacji „przedmiotowej, czyli ontologicznej”), albo skoncentrować się na jej metodach (orientacja „sposobowa, czyli metodologiczna” – por. 1961,

s. 371). Mamy tu do czynienia z wielką rozmaitością stanowisk i opinii. Kotarbiński wyraźnie opowiada się za stanowiskiem nominalistycznym:

> W tym nadmiarze rozmaitych stanowisk niechaj nam wolno będzie wyróżnić stanowisko *nominalizmu* i przy nim się opowiedzieć (1961, s. 373).

A zatem – zgodnie z doktryna nominalistyczną:

> [...] żaden przedmiot nie jest liczbą i [...] ani arytmetyka, ani tzw. „teoria liczb", ani tym bardziej matematyka w ogóle nie budują zdań, które by można nazwać ściśle zdaniami o liczbach w tym sensie, w jakim np. zoologia mówi o zwierzętach (1961, s. 373).

Matematyka mówi o wszelkich rzeczach – i stąd jej uniwersalność.

Nominalizm jest zgodny, według Kotarbińskiego, z poglądem, że matematyka jest nauką aprioryczną. Przy tym odróżnia tu aprioryczność w sensie genetycznym i w sensie metodologicznym. Z pierwszym z nich mamy do czynienia wtedy, gdy ktoś uznaje dane zdanie nie na podstawie doświadczenia, z drugim zaś, gdy dane zdanie jest oczywiste, bo zrozumiałe samo przez się, lub też może być uzasadnione na podstawie samych zdań oczywistych. Podejście takie napotyka jednak trudności. Z jednej strony bowiem przyjęcie, że matematyka to nauka aprioryczna implikuje, że na przykład tezy mechaniki analitycznej, tradycyjnie zaliczane do matematyki, nie mieszczą się w niej, z drugiej zaś strony „jest rzeczą wysoce wątpliwą, czy tezy swoiste geometrii są aprioryczne w rozważanym tu sensie metodologicznym" (1961, s. 375). Przyznając, że kwestia istnienia i uzasadnienia wiedzy apriorycznej jest kwestią nadal otwartą, wyraźnie deklaruje:

> [...] opowiadamy się tutaj raczej za istnieniem wiedzy apriorycznej, oczywiście nie w tym sensie, iżby jakiś przedmiot był wiedzą aprioryczną, lecz w tym, iż to i owo wiemy apriorycznie, czyli nie na zasadzie doświadczenia (1961, s. 375).

Dyskusyjne jest również stanowisko, z którego próbuje się charakteryzować matematykę przez stwierdzenie, że wyróżnia ją stosowanie metody dedukcyjnej, ponieważ prowadzi to do konieczności zaliczenia do matematyki twierdzeń, „których by się widzieć w jej obrębie nie miało ochoty", więc łączy się dedukcyjność z „formalnym w określonym sensie charakterem tez wysnuwanych oraz tez, z których się je wysnuwa" (1961, s. 377). Takie czysto formalne byłyby zdania „zawierające oprócz znaków interpunkcyjnych jedynie symbole zmienne oraz spójniki między nimi" (1961, s. 377). Takie podejście jest charakterystyczne dla logicyzmu Fregego oraz Russella i Whiteheada. Zgodnie z nim „cała matematyka jest właściwie rozwiniętą logiką formalną" (1961, s. 378).

Kotarbiński zauważa też, że istnieją koncepcje, według których matematyka nie jest żadną nauką, mówić zaś można jedynie o metodzie matematycznej.

Odrzucając zdecydowanie koncepcję głoszącą, że matematyka bada pewien świat przedmiotów idealnych istniejących niezależnie od czasu, przestrzeni i poznającego umysłu, Kotarbiński nie opowiada się za żadną konkretną koncepcją, twierdząc, że matematykę można scharakteryzować co najmniej na trzy sposoby:

1) jako ogół systemów, w których uzasadnia się twierdzenia wyłącznie dedukcyjnie i „których twierdzenia wypowiada się poprawnie w zdaniach, zawierających tylko następujące rodzaje znaków: symbole zmienne, spójniki, tzw. »nazwy liczb«, tzw. »nazwy zbiorów«, tzw. »nazwy figur«, lub terminy przez takie znaki zdefiniowane, dalej terminy stosunkowe, jak »większy«, »równy« itp., wreszcie znaki przestankowe oraz znaki informujące o roli pozostałych znaków" (1961, s. 379) – tak rozumiana matematyka obejmuje całą logikę formalną (w jej zdaniach nie występują owe „nazwy") oraz tzw. matematykę właściwą;

2) jako matematykę właściwą czy matematykę w węższym sensie charakteryzującą się tym, że w jej tezach występują owe „nazwy";

3) jako naukę charakteryzowaną podobnie jak matematyka właściwa, ale z dodaniem warunku, że jej zdania mają cechę aprioryczności, tzn. jej aksjomatom przysługuje cecha oczywistości oraz przy uzasadnianiu jej twierdzeń nie powołujemy się na dane doświadczalne.

Warto tu dodać, że Kotarbiński zdaje sobie sprawę z tego, iż w praktyce badawczej matematycy używają poza dedukcją innych jeszcze metod, wszelako:

> [r]ozumowania przez analogię oraz rozumowania indukcyjne i w ogóle redukcyjne w matematyce rozumianej tak czy tak, mogą mieć znaczenie co najwyżej heurystyczne i w stadium dojrzałości opracowania danego problematu ustępują miejsca dowodowi właściwemu, a więc uzasadnieniu właściwemu (1961, s. 379).

Odróżniwszy więc kontekst odkrycia i kontekst uzasadnienia, Kotarbiński charakteryzuje ten pierwszy przez dopuszczenie stosowania obok dedukcji także rozumowań indukcyjnych i przez analogię oraz rezerwując dla tego drugiego tylko rozumowania dedukcyjne, które są typowe dla dojrzałego etapu rozwoju teorii matematycznych.

5. Kazimierz Ajdukiewicz

Rozważając filozoficzne poglądy Ajdukiewicza na matematykę i logikę, zacznijmy od jego rozprawy habilitacyjnej *Z metodologii nauk dedukcyjnych* (1921). Składała się ona z trzech części: „Pojęcie dowodu w znaczeniu logicznym", „O dowodach niesprzeczności aksjomatów" oraz „O pojęciu istnienia w naukach dedukcyjnych". Była ona – jak pisał Ajdukiewicz (mając na myśli zwłaszcza część pierwszą) w *Przedmowie* do pierwszego tomu swoich pism wybranych – „pierwszą polską pracą z zakresu metodologii nauk dedukcyjnych, pozostającą pod wpływem logiki matematycznej"[32] (1960a, s. V). W dziele tym można dostrzec wpływ Hilberta i jego koncepcji formalistycznych – zwłaszcza że Ajdukiewicz słuchał wykładów Hilberta w roku 1913 w czasie swojego pobytu w Getyndze. Oddziaływania, o któ-

[32] Dodawał też, że zapoczątkowała ona – przynajmniej w Polsce – „strukturalną metodę definiowania pojęć metodologicznych (jak np. pojęcia dowodu czy pojęcia wynikania), która później odegrała istotną rolę we wspaniałym rozwoju nauki o systemach dedukcyjnych, zwanej metamatematyką" (1960a, s. V).

rych mowa, widać choćby w tym, że rozważał on wszystkie wymienione kwestie jako odnoszące się do systemów sformalizowanych, rozumianych jako dobrze określone kolekcje formuł. Choć w rozprawie brak oryginalnych pomysłów, to trzeba przyznać, że przyczyniła się ona do usystematyzowania i sprecyzowania wielu kwestii związanych z filozofią i metodologią matematyki, czy ogólniej, nauk dedukcyjnych. Nowatorską jest definicja wynikania logicznego zaproponowana w części pierwszej rozprawy i powtórzona potem parokrotnie w rozmaitych podręcznikach, np. w *Logicznych podstawach nauczania* (1934b). Stała się ona podstawą sformułowanego przez Alfreda Tarskiego w pracy „O pojęciu wynikania logicznego" (1936) twierdzenia o dedukcji – Tarski w specjalnej notce w tomie swoich wybranych najważniejszych prac logicznych (1956, s. 32) stwierdził, że odkrycia swego dokonał jeszcze w roku 1921 właśnie w związku z rozważaniem pracy Ajdukiewicza (por. Batóg 1984). Oryginalna jest także propozycja relatywizacji pojęcia istnienia do danego systemu sformalizowanego (co z kolei sugerowało relatywizację także innych pojęć metalogicznych i metamatematycznych do ustalonego systemu formalnego).

Charakteryzując nauki dedukcyjne, Ajdukiewicz upatruje najbardziej rozwiniętej ich formy w teoriach sformalizowanych. W duchu formalizmu Hilberta abstrahuje od znaczenia przypisywanego pojęciom pierwotnym:

> Są tedy symbole nauk dedukcyjnych symbolami nie dlatego, jakoby „coś znaczyły" albo „coś oznaczały", lecz dlatego, że mają określoną „rolę", dlatego, ponieważ występują w ściśle określonych związkach (1921, s. 11–12).

Mówiąc o aksjomatach, stwierdza:

> Czymże są zatem aksjomaty, jeśli nie są w znaczeniu intuicyjnym zdaniami? Otóż są one tylko pewną kombinacją znaków, które wymawia się tak, że *brzmią one jak zdania*.
>
> Skoro aksjomaty nie są zdaniami w znaczeniu potocznym, a potoczne znaczenie wyrazu „prawdziwy" lub „fałszywy" odnosi się tylko do zdań, tak że tylko zdaniom ta własność może być przypisana, zatem

> jasną staje się rzeczą, że aksjomatów z tego punktu widzenia oceniać nie można. Oczywiście, że skoro aksjomaty wymawia się tak, że brzmią one jak zdania, można słusznie pytać o prawdziwość lub fałszywość tego zdania w znaczeniu potocznym, samym jednak aksjomatom nie można przypisać prawdziwości ani mylności, chyba tylko w znaczeniu przenośnym[33] (1921, s. 12).

Przez twierdzenie Ajdukiewicz rozumie „każdą kombinację symboli, posiadającą w systemie logiki zawarty dowód" (1921, s. 14). Rozróżnia też teorie czyste (oderwane) i stosowane. Teorie czyste to te, których symboli pierwotnych, a w konsekwencji także aksjomatów, nie zinterpretowano, teorie zaś stosowane to te, w których symbolom pierwotnym nadano „ten sam sens intuicyjny, który łączymy z wyrazami, w jakich symbole te wymawiamy" (1921, s. 20). Ponadto filozof pisze:

> Teorie oderwane w znaczeniu bezwzględnym nie mają same dla siebie większej wartości niż gra w szachy – przynajmniej wartości praktycznej. By móc jednak uzasadnić tę ocenę, należałoby zająć stanowisko w sprawie wartości nauki w ogóle. W każdym razie nie dają one niczego, co by można ocenić z punktu widzenia prawdy i fałszu, bo nie zawierają zdań. Nauki stosowane w tym znaczeniu, że występujące w nich symbole logiczne posiadają sens, zawierają funkcje propozycjonalne (zdaniowe), które – jak wiadomo – nie są ani prawdziwe, ani mylne, lecz stają się takimi lub takimi zależnie od przypisania takich lub innych znaczeń występującym w nich jeszcze bezsensownym symbolom.
>
> Jeśli się mimo to mówi o prawdziwości respective mylności absolutnie czystych teorii dedukcyjnych, to czyni się to w pewnym znaczeniu konwencjonalnym [...] (1921, s. 21).

Najbardziej interesująca z punktu widzenia tematu tej książki jest kwestia istnienia rozważana przez Ajdukiewicza w części trzeciej rozprawy *Z metodologii nauk dedukcyjnych* (1921). Ajdukiewicz nie zajmuje się tu problemem roztrząsanym naówczas przez filozofów, a mianowicie pytaniem o to, jaki rodzaj istnienia przypisać przed-

---

[33] Należy zauważyć, że Ajdukiewicz snuł swoje rozważania na ponad 10 lat przed sformułowaniem przez Tarskiego definicji pojęcia spełniania i prawdy.

miotom nauk dedukcyjnych, ale pyta o znaczenie słowa „istnieć" w tych naukach:

> Analiza znaczenia wyrazu „istnieć" w naukach dedukcyjnych nie jest zatem równoznaczna z zagadnieniem: jaki rodzaj istnienia przysługuje istniejącym przedmiotom nauk dedukcyjnych; problemat nasz pozwala nam w ogóle wątpić o tym, czy jakikolwiek rodzaj bytu przedmiotom tym przysługuje. Kwestią naszą zatem nie jest pytanie, co za rodzaj bytu mają przedmioty przez nas rozważane, ale co znaczy wyraz „istnieć" w naukach dedukcyjnych. Być może, że jest on całkiem mylnie używany i nie ma z istnieniem nic wspólnego (1921, s. 46).

Ajdukiewicz dowodzi, że istnienia w naukach dedukcyjnych nie można identyfikować z niesprzecznością oraz że niesprzeczność nie jest ani warunkiem koniecznym, ani wystarczającym istnienia. Twierdzi, że niezbędnymi warunkami istnienia są: (I) zawieranie się w zakresie danej teorii oraz (II) niesprzeczność:

> Twierdzę mianowicie, że koniecznym warunkiem na to, by przedmiot określony przez Ω*(p)* istniał, jest iżby przedmiot *p* należał do zakresu danej teorii, czyli iżby z Ω*(p)* wynikało A(*p*) [...].
>
> [...]
>
> Musi tedy przedmiot na to, aby istniał, spełniać prócz pierwszego (wyżej wymienionego warunku zawierania się) warunek drugi, musi mianowicie jego określenie nie posiadać następstw sprzecznych z następstwami A*(p)*. [...]
>
> Przedmioty, które nie czynią zadość pierwszemu albo drugiemu warunkowi, nie istnieją i są nieistniejące. Prócz przedmiotów istniejących i nieistniejących należy jeszcze rozróżnić, naszym zdaniem, przedmioty możliwe w danej teorii (1921, s. 59–60).

Ajdukiewicz dochodzi do wniosku, że dla istnienia przedmiotu wystarcza spełnienie warunków (I) i (II) oraz by „nie ograniczał [on] zakresu przedmiotów możliwych" (1921, s. 62) w danej teorii.

Kończy swoje rozważania, pisząc:

> O istnieniu bezwzględnym w naukach dedukcyjnych nie mówimy wcale. Zawsze tylko o istnieniu w pewnym systemie. Wszakże istnieją

> i proste euklidesowe, i nieeuklidesowe, obie nie mogą jednak współistnieć, a współistnienie ich byłoby konsekwencją ich istnienia, gdyby ten wyraz wziąć w odniesieniu do obu w tym samym sensie bezwzględnym. Można więc mówić tylko o istnieniu w pewnym systemie, podobnie jak o zawieraniu się tylko w pewnym zakresie. Niemniej jednak można utworzyć „uniwersum" z zakresów kilku zgodnych z sobą teorii, tworząc system, którego aksjomaty byłyby wszystkimi aksjomatami wszystkich teorii zgodnych. Można by wtedy mówić o istnieniu bezwzględnym, jakkolwiek niezupełnie bezwzględnym, bo można by, dobierając rozmaite teorie, potworzyć wiele takich „uniwersów" w sobie zgodnych, lecz między sobą wykluczających się (1921, s. 63).

Przejdźmy teraz do rozważenia poglądów Ajdukiewicza na zakres, status i metody logiki. Zacznijmy od przytoczenia obszernego fragmentu jego książki *Główne kierunki filozofii w wyjątkach z dzieł ich klasycznych przedstawicieli*:

> Bez względu na to, jak zapatrujemy się na genezę myśli prawdziwej, tzn. niezależnie od tego, czy jesteśmy empirystami, racjonalistami czy krytycystami, przyjmujemy, że jeżeli jedna z dwóch myśli pozostaje do drugiej prawdziwej myśli w pewnych stosunkach, wówczas na pewno lub z pewnym stopniem prawdopodobieństwa można twierdzić, że ta pierwsza jest prawdziwa [...].
>
> Nauka roztrząsająca zagadnienie, kiedy myśli pozostają w takich właśnie stosunkach, nazywa się logiką formalną. Nazywa się ona dlatego formalną, albowiem o zachodzeniu wyżej wspomnianych stosunków między myślami decyduje nie konkretna treść myśli, lecz ich struktura, ich forma.
>
> [...]
>
> Niektórzy uważają, że zadaniem logiki jest nie tylko stwierdzenie stosunków między myślami, stanowiących formalne warunki prawdy, lecz także podanie prawideł, czyli norm określających, jak należy w myśleniu postępować, by z myśli prawdziwych wywieść inne myśli prawdziwe. Taki pogląd na zadanie logiki jest dość rozpowszechniony i bodaj historycznie najwierniejszy, tzn. najlepiej charakteryzuje te zagadnienia, które w różnych czasach zaliczano do logiki. [...] Z punktu widzenia logiki teoretycznej, mającej jako jedyne zadanie badanie stosunków pomiędzy myślami, zachodzących między nimi ze względu na ich prawdziwość, przedstawia się logika podająca normy, czyli prawidła

> myślenia jako logika praktyczna. Logika w obszerniejszym znaczeniu zawiera dział traktujący o postępowaniu, jakiego należy się w myśleniu trzymać, jeśli się chce myśleć formalnie poprawnie. Przepisuje ona, jak należy obchodzić się z pojęciami, mówi ona, że należy je definiować i opisuje, jak się to czyni. Mówi, jak się dochodzi do wyników pewnych przez wnioskowanie, jak się szuka dowodów, jak się wynajduje prawa przyrody itd. Krótko mówiąc, podaje ona metody badania naukowego, a przygotowaniem tej jej części jest logika teoretyczna. Rozpada się tedy logika w obszerniejszym znaczeniu na dwa działy: pierwszy, identyczny z logiką teoretyczną, stanowi podstawę dla formułowanych przez logikę praktyczną prawideł [...], drugi, podający sposoby, metody badania naukowego, i zwany dlatego metodologią (1923, s. 22–24).

Zauważmy, że fakt, iż Ajdukiewicz mówi o myślach i myśleniu, nie musi prowadzić do psychologizmu. Zwróćmy też uwagę, że zalicza on do logiki nie tylko relacje odwołujące się do prawdziwości, ale także do prawdopodobieństwa. Wyraźnie też rozróżnia logikę teoretyczną i logikę praktyczną, dla której ta pierwsza jest bazą. Ajdukiewicz zalicza do logiki obszerny zakres zagadnień – obejmuje ona bowiem, według niego, również i metodologię nauk. Taki zakres odpowiada temu, co Arystoteles omawiał w swoich księgach nazwanych *Organon*.

Fakt, że logika praktyczna opiera się na logice teoretycznej, ma swe źródło w ogólności tej ostatniej. W skrypcie *Główne zasady metodologii nauk i logiki formalnej* filozof tak wypowiedział się o tym:

> Cały szereg twierdzeń logiki formalnej odznacza się tym, że występują w nich tylko takie wyrazy stałe, które występują w *każdej* nauce. Nie ma w nich wyrazów, które spotkać można tylko w zoologii, ani wyrazów, które by tylko chemii były właściwe. Tej okoliczności zawdzięcza logika formalna swe szerokie zastosowanie. Korzysta z niej – jak zobaczymy – każdy w większości swych rozumowań (1928, s. 152).

Warto też w tym kontekście przytoczyć definicję logiki, jaką Ajdukiewicz podał w popularnej pracy *Logiczne podstawy nauczania*:

> We wszystkich jednak naukach występują, prócz terminów naukom tym właściwych, jeszcze pewne terminy wszystkim naukom wspólne.

> Terminami takimi są np. wyrażenia: „jest", „nie", „każdy", „żaden" itd. Wyrażeń tych używa każda nauka, budując swe zdania nie tylko z wyrazów sobie właściwych, lecz nadto również z tych terminów wspólnych.
>
> [...]
>
> Istnieje [...] nauka, która te terminy ma pod swoją specjalną opieką. Nauka ta odznacza się tym, że dla budowania swych twierdzeń posługuje się obok symboli zmiennych wyłącznie tylko tymi trzema rodzajami terminów, oraz takimi, które się przy ich pomocy dają zdefiniować. Nauka ta zwie się *logiką formalną*. Owe zaś terminy należące do wymienionych wyżej trzech rodzajów[34], i te, które przy ich pomocy można zdefiniować, nazywają się *stałymi logicznymi*. *Logika formalna jest to tedy nauka, której twierdzenia zbudowane są wyłącznie ze stałych logicznych oraz z symboli zmiennych* (1934b, s. 41).

Ajdukiewicz określał więc logikę teoretyczną przez pojęcie stałej logicznej, ograniczając ją przy tym w zasadzie do logiki pierwszego rzędu. Uniezależniał też status logiki jako nauki teoretycznej od poglądu na kwestię genezy poznania – por. przytoczone wyżej słowa z jego *Głównych kierunków filozofii w wyjątkach z dzieł ich klasycznych przedstawicieli* (1923, s. 22).

Poglądy filozofa na status i genezę praw logiki wyraźnie ewoluowały. Należy je rozpatrywać w szerszym kontekście jego zapatrywań epistemologicznych, w szczególności jego konwencjonalizmu. Otóż w okresie, gdy głosił konwencjonalizm radykalny, prawa logiki traktował jako zdania uznawane na mocy aksjomatycznych i dedukcyjnych dyrektyw znaczeniowych, zwanych też później regułami sensu. W konsekwencji były one więc uznawane za zdania analityczne. Logika była więc w tym ujęciu czymś pochodnym wobec reguł sensu. Co więcej, logika była zrelatywizowana do danego języka, do danej aparatury pojęciowej. Mogła więc zmieniać się wraz z przejściem od jednej do innej aparatury pojęciowej. Zauważmy, że teza ta, traktowana przez Ajdukiewicza jako uogólnienie radykalnego konwencjonalizmu, przypomina zasadę tolerancji Carnapa, dopuszczającą wybór języka i logiki.

---

34 Chodzi tu obok wyżej wymienionych także o wyrażenia kwantyfikujące, takie jak „każdy", „pewien" itd. oraz o spójniki logiczne – uwaga moja, R.M.

Po wojnie Ajdukiewicz odszedł od koncepcji radykalnego konwencjonalizmu. Uczynił to pod wpływem rozważań epistemologicznych. Zaczął większą niż wcześniej wagę przywiązywać do roli danych empirycznych w uznawaniu zdań. Nie znaczy to, że jakichś śladów konwencjonalizmu (choć już nie w wersji radykalnej i skrajnej) nie można znaleźć w jego późniejszej twórczości. Niemniej jednak wyraźnie daje się zauważyć zwrot ku empiryzmowi. W tym kontekście rozważał też problem statusu praw logiki.

Najpełniej swe poglądy na ten temat wyłożył w artykule „Logika a doświadczenie" (1947). Badał tu kwestię statusu praw logiki na szerszym tle, a mianowicie w kontekście problemu empiryzmu, tzn. pytania, czy tylko zdania empiryczne, oparte na doświadczeniu, wyrażają rzetelne poznanie i jako jedyne mają prawo obywatelstwa w nauce. Stawia więc w szczególności pytanie o to, czy prawa logiki są pochodzenia empirycznego, czy też są od doświadczenia niezależne?[35]

Ajdukiewicz dochodzi do wniosku, że możliwe są tu dwa stanowiska. Jedno – reprezentowane przez skrajny empiryzm – uważa twierdzenia logiki za:

> zdania oparte na doświadczeniu, i o tyle tylko, o ile one się tym „oparciem o doświadczenie" legitymują przyznaje im prawo występowania w charakterze twierdzeń naukowych (1947, s. 17).

Drugie – reprezentowane przez empiryzm umiarkowany – uważa:

> prawa logiki za zdania analityczne, i pozwala uznawać je jako twierdzenia naukowe niezależnie od świadectwa doświadczenia (1947, s. 17).

---

[35] Zauważmy, że Łukasiewicz, twórca nieklasycznych logik wielowartościowych w pewnym okresie utrzymywał, że doświadczenie może pomóc w rozstrzygnięciu kwestii, który system logiki jest spełniony w rzeczywistości (por. jego pracę „Logistyka a filozofia" (1936), zob. też paragraf 1 w rozdziale 3). Ajdukiewicz, który nie interesował się szczególnie logikami nieklasycznymi, nie godził się w okresie radykalnego konwencjonalizmu z tą tezą Łukasiewicza – por. artykuł Ajdukiewicza „Zagadnienie empiryzmu a koncepcja znaczenia" (1964).

Twierdzi, że pomiędzy tymi stanowiskami nie ma konfliktu: każde z nich może być słuszne w odniesieniu do innego języka. Dodaje jednak, że:

> Wszystkie znane mi dotychczas języki, których logiczna teoria jest wypracowana, są językami z dyrektywami aksjomatycznymi i dedukcyjnymi, a więc językami, w których wolno przyjmować zdania analityczne, nie opierając ich na doświadczeniu. Językiem takim zdaje się też być język potoczny. [...] W tych językach należą przede wszystkim twierdzenia logiki do zdań analitycznych, a więc do takich, które wolno przyjąć bez apelu do doświadczenia (1947, s. 17).

Możliwe jest jednak zbudowanie języków bez reguł aksjomatycznych, ale z regułami dedukcyjnymi. Dla takich języków słuszna będzie teza skrajnego empiryzmu, w szczególności więc prawa logiki przyjmą charakter zdań empirycznych. Jak jednak sprawdzać empirycznie prawa logiki? Otóż według Ajdukiewicza:

> Wydaje się, że byłoby to możliwe w taki sposób, że traktowałoby się twierdzenia logiki jako hipotezy pomocnicze sprawdzane nie w izolacji, lecz łącznie z pewnymi hipotezami przyrodniczymi (1947, s. 18).

W konsekwencji więc prawa logiki mogą być zmieniane wraz z hipotezami empirycznymi w świetle nowych danych empirycznych. W ten sposób logika miałaby sens głównie metodologiczny, a nie ontologiczny. Zauważmy, że do tej koncepcji Ajdukiewicza podobny jest tzw. empiryzm holistyczny głoszony przez Willarda Quine'a. Według tego ostatniego jednak „jednostką poznania" jest cała wiedza, a Ajdukiewicz dopuszcza pewne jej fragmenty.

Dostrzega on też pewną przydatność takiego podejścia do praw logiki dla nauk przyrodniczych. Pisze:

> Niektórzy fizycy wyrażają przypuszczenie, że utrzymanie zasadniczych twierdzeń teorii kwantów (zasada komplementarności) nie daje się pogodzić ze zwyczajną logiką i byliby skłonni niektóre prawa tej logiki odrzucić, a zachować swoje tezy fizykalne. [...] W każdym razie wyłożona wyżej koncepcja języka bez zdań analitycznych, w których także prawa

> logiki spadłyby do rzędu hipotez, otwiera drogę dla tego rodzaju możliwości (1947, s. 19).

Wybór i uzasadnienie słuszności i prawdziwości jednej z opisanych koncepcji jest sprawą skomplikowaną. Ajdukiewicz widzi tu jednak wyjście kompromisowe. Otóż twierdzi, że stanowisko empirystów można uznać za pewien program badawczy, a w tej sytuacji trudno wymagać wykazywania jego prawdziwości. Programy badawcze nie muszą być bowiem ani prawdziwe, ani fałszywe, ale rozsądne lub nierozsądne. Aby zaś mogły zostać uznane za rozsądne, muszą okazać się celowe i wykonalne. W konsekwencji więc rozstrzygająca rola przypada tu praktyce badawczej. Ajdukiewicz dodaje:

> Nie wydaje się jednak, żeby jej dotychczasowy przebieg był z programem skrajnego empiryzmu zgodny (1947, s. 21).

Do podobnych problemów Ajdukiewicz wracał też później, w szczególności rozważając problem uzasadniania zdań analitycznych oraz kwestie możliwości konstrukcji języka skrajnie empirycznego. Pierwszą z tych kwestii zajmował się m.in. w „Le problème du fondement des propositions analytiques" (1958). Doszedł tam do wniosku, że uzasadnienie zdań analitycznych wymaga jednak odwołania się do doświadczenia[36]. Zauważmy przy okazji, że o ile rozważając wcześniej problem empirycznego uzasadniania praw logiki, Ajdukiewicz relatywizował go do wyboru języka, o tyle teraz pominął taką relatywizację.

Drugą z wyróżnionych wyżej kwestii filozof rozpatrywał m.in. w publikacji „Zagadnienie empiryzmu a koncepcja znaczenia" (1964), odróżniając wersję epistemologiczną i metodologiczną problemu. Twierdził, że nie istnieją języki, w których walor poznawczy mają jedynie zdania empiryczne, ale dopuszczał jednocześnie możliwość konstrukcji takich języków. Nie byłoby w nim ani aksjomatycznych, ani dedukcyjnych reguł sensu. Zauważa jednak, że wymagało-

[36] Uwagę zwraca tu znów zbieżność poglądów Ajdukiewicza i Quine'a, który twierdził, że podział zdań na analityczne i syntetyczne jest iluzoryczny.

by to jednak nowej koncepcji znaczenia. Zagadnienie to nie mieści się w głównym nurcie naszych rozważań, nie możemy więc wnikać tu w szczegóły (można je znaleźć na przykład w książce: Jedynak 2003).

Mówiąc o problemie statusu praw logiki i jej związkach z doświadczeniem, warto podkreślić, że choć Ajdukiewicz wskazywał na „doniosłe znaczenie logiki współczesnej dla należytego formułowania i rozwiązywania tradycją przekazanych wielkich problematów filozoficznych" (1937, s. 271), to sądził (podobnie jak Czeżowski), że logika jest neutralna wobec sporu o uniwersalia.

Ajdukiewicz rozważał także i charakteryzował status matematyki i logiki jako nauki przy okazji rozważań poświęconych klasyfikacji nauk – por. jego *Główne zasady metodologii nauk i logiki formalnej* (1928) i *Logikę pragmatyczną* (1965b). Dokonał on dwojakiego podziału nauk: (1) ze względu na rodzaj stosowanych w nich wnioskowań i (2) ze względu na to, na jakich opierają się ostatecznych przesłankach. W zakresie (1) wyróżniał nauki dedukcyjne i indukcyjne, a w (2) nauki dedukcyjne (opierające się na aksjomatach), nauki empiryczne (opierające się na aksjomatach i na zdaniach spostrzeżeniowych) oraz nauki humanistyczne (oparte na aksjomatach, zdaniach spostrzeżeniowych i na rozumieniu cudzych wypowiedzi). Przy tym nauki dedukcyjne mają w obu podziałach ten sam zakres obejmujący matematykę i logikę, do nauk zaś indukcyjnych należy zaliczyć nauki empiryczne i humanistyczne.

Z punktu widzenia interesujących nas w tej książce zagadnień warto bliżej przyjrzeć się poglądom Ajdukiewicza na nauki dedukcyjne. Otóż rozróżnia on kilka stadiów rozwoju nauk dedukcyjnych, a mianowicie stadium przedaksjomatyczne intuicyjne, aksjomatyczne intuicyjne i wreszcie aksjomatyczne abstrakcyjne. W stadium pierwszym jako twierdzenia pierwotne przyjmowano wszelkie zdania oczywiste dla ogółu badaczy z danej dziedziny, a jako terminy pierwotne – wszelkie wyrażenia zrozumiałe bez definicji. W stadium drugim mamy do czynienia z ustaloną listą terminów pierwotnych branych w znaczeniu zastanym i z aksjomatami, którymi były zdania niebudzące wątpliwości. W stadium trzecim terminy pierwotne tracą swe podstawowe znaczenie – ich sens zostaje ustalony przez przyjęte aksjomaty i tylko przez nie. Tu możliwy jest jeszcze wyższy niejako stopień, a mianowicie system aksjomatyczny można traktować jako system sformalizowany, redukując dedukcję twierdzeń w takim systemie do gry symboli bez jakiegokolwiek znaczenia odbywającej się według z góry ustalonych reguł inferencji o charakterze czysto formalnym, odwołujących się jedynie do kształtu napisów (czyli do ich formy). Wówczas zupełnie traci sens pytanie o prawdziwość aksjomatów. Zauważmy, że Ajdukiewicz rozpoczął swą twórczość od refleksji właśnie nad systemami dedukcyjnymi w stadium sformalizowanym (por. jego rozprawę habilitacyjną *Z metodologii nauk dedukcyjnych* (1921), którą omawialiśmy na początku tego rozdziału).

Systemy aksjomatyczne sformalizowane można na ogół interpretować na wiele różnych sposobów. Ajdukiewicz nazywał je systemami hipotetyczno-dedukcyjnymi lub neutralno-dedukcyjnymi (por. 1960b). Aksjomaty takich systemów nic właściwie nie znaczą, nie ma więc podstaw, by je przyjąć czy odrzucić. Podobną postawę należy też w konsekwencji przyjąć w stosunku do wydedukowanych w nich twierdzeń. Z kolei systemy niesfomalizowane oparte na aksjomatach, które coś znaczą i są zdaniami uznanymi, nazywał asertywno-dedukcyjnymi. W systemach tych można też w równej mierze co aksjomaty uznać wydedukowane z nich twierdzenia. Ajdukiewicz (por. 1960b) pisał, że:

> Wedle najbardziej rozpowszechnionych poglądów systemy aksjomatyczne matematyki mają charakter asertywno-dedukcyjny. Systemom tym przypisuje się następującą strukturę metodologiczną: najpierw, i to niezależnie od uznania twierdzeń, uznaje się aksjomaty; następnie drogą dedukcji dochodzi się do uznania twierdzeń na gruncie uznanych już aksjomatów[37] (1965a, s. 338).

[37] "The most wide-spread opinion considers the axiomatic systems of mathematics to be assertive-deductive. The methodological structure of these systems is contended to be the following: first of all, and independently from the assertion of the theorems, the axioms are asserted; afterwards, and by way of deduction, one is brought likewise to assert the theorems on the ground of having asserted the axioms" (1960b, s. 211).

Powstaje jednak naturalne pytanie: na jakich podstawach są uznawane aksjomaty w systemach asertywno-dedukcyjnych, a więc i w matematyce? Ajdukiewicz odpowiada na nie (por. 1960b) następująco:

> Otóż aksjomaty systemu asertywno-dedukcyjnego nie są uzasadniane pośrednio przez jakieś inne zdania tego samego systemu. Mogą one być uzasadnione pośrednio tylko jako twierdzenia innego systemu, z którego aksjomatów dają się wyprowadzić. Ale nawet w przypadku, jeżeli zostaną wyprowadzone z aksjomatów innego systemu, będą uzasadnione tylko o tyle, o ile te ostatnie będą uzasadnione. Widać stąd, że podstawą wszelkiego systemu asertywno-dedukcyjnego muszą być, w ostatniej instancji, takie aksjomaty, które już nie są uzasadnione pośrednio, czyli przez ich wyprowadzenie z jakichś innych zdań; muszą to być aksjomaty uzasadnione bezpośrednio. W przeciwnym wypadku popadlibyśmy w *regressus ad infinitum* bądź też twierdzenia nasze opierałyby się ostatecznie na nieuzasadnionych przesłankach i popadlibyśmy w ten sposób w błąd *petitio principii*. Wobec tego możliwość zbudowania systemu asertywno-dedukcyjnego, którego twierdzenia byłyby uzasadnione, nieuchronnie wymaga istnienia bezpośredniej metody uzasadniania[38] (1965a, s. 340).

Ajdukiewicz wyróżnia trzy wymieniane w literaturze bezpośrednie metody uzasadniania: (1) uznawanie zdań jako twierdzeń opartych bezpośrednio na spostrzeżeniach (zwanych zdaniami protokolarnymi), (2) odwołanie do intuicji i (3) uzasadnianie twierdzeń przez konwencje terminologiczne. Metoda pierwsza jednak nie jest

---

38 "Now the axioms of an assertive-deductive system are not validated indirectly by the other sentences of the same system. They can be validated indirectly only as theorems of another system, from the axioms of which they can be deduced. But even if they are deduced from the axioms of another system, they are validated only to the same extent as these. As we see, the basis of any assertive-deductive system must, in ultimate analysis, be provided by axioms that are no more validated indirectly, i.e., are no longer inferred from other sentences, but whose validation is a direct one. Otherwise, one would either fall into a *regressus infinitus,* or base all one's affirmations, ultimately, upon unfounded premisses, thus falling into the vice of *petitio principii.* Consequently, the possibility of constructing assertive-deductive systems of founding these unavoidably depends on the existence of a direct method of foundation" (1960b, s. 213).

zadowalająca, ponieważ jej stosowanie upodobniałoby nauki dedukcyjne do nauk empirycznych, a więc nie prowadziłoby do wiedzy pewnej i niepodważalnej, jakiej oczekujemy od nauk dedukcyjnych. Z drugiej strony natura i charakter aksjomatów nauk dedukcyjnych sprawiają, że nie można ich uzasadnić za pomocą metod doświadczalnych, „nie stwierdzają [one] na ogół niczego takiego, co można by było zobaczyć lub usłyszeć”[39] (1965a, s. 343). Druga nie jest zadowalająca z powodu niejasności pojęcia intuicji, „trudności w jej kontrolowaniu oraz niemożności rozstrzygania sporów pomiędzy ludźmi odwołującymi się do świadectwa intuicji”[40] (1965a, s. 343). Najmniej wątpliwa wydaje się metoda trzecia. Jednak „nie gwarantuje [ona] prawdziwości [...] twierdzeń, o ile nie są one uzasadnione, ponadto przez odpowiednią przesłankę egzystencjalną”[41] (1965a, s. 342).

Wykazawszy, że nie ma właściwie metody pozwalającej bezpośrednio uzasadnić aksjomatów systemu dedukcyjnego, Ajdukiewicz dochodzi (por. 1960b) do wniosku, że:

> [...] aksjomatyczne systemy matematyki nic by na tym nie straciły, gdyby budowane były przez matematyków jako neutralno-dedukcyjne, zaś przez przyrodników, którzy się nimi posługują, traktowane były jako systemy asertywno-redukcyjne[42] (1965a, s. 343).

Powstaje tu jednak pewna trudność. Otóż w systemie dedukcyjnym konieczne są reguły dedukcji, które są oparte na pewnych prawach logiki. Czy nie trzeba więc uprzednio założyć jakiegoś systemu logiki? Ajdukiewicz proponuje tu pewne rozwiązanie, stwierdzając (por. 1960b), że:

---

39 “[...] affirm nothing that could be seen or heard” (1960b, s. 216).

40 “[...] because of the difficulty of controlling it, of the impossibility of settling the disputes between those who appeal to its testimony” (1960b, s. 216).

41 “[...] does not secure the truth of [...] theorems, unless they are also founded on a corresponding existential premiss” (1960b, s. 215).

42 “[...] the axiomatic systems of mathematics would lose nothing by being constructed as neutral-deductive ones by the mathematicians and treated as assertive-reductive ones by the naturalists that would use them” (1960b, s. 243).

> [...] do tego, żeby jedne zdania z drugich dedukować, nie trzeba dowodzić, że używa sie przy tym reguł niezawodnych. Wystarczy, po prostu, używać takich reguł. Wobec tego zakładanie twierdzeń logiki nie jest konieczne do budowania systemów neutralno-dedukcyjnych. Twierdzenia logiki są potrzebne tylko do refleksji nad takimi systemami z metodologicznego punktu widzenia, a więc, na przykład, do oceny poprawności ich struktury[43] (1965a, s. 343).

A zatem matematycy mogą rozwijać matematykę, budując systemy neutralno-dedukcyjne według pewnych przyjętych zasad, nie troszcząc się zbytnio o ocenę przyjmowanych reguł dedukcyjnych z punktu widzenia ich poprawności i niezawodności – to ostatnie jest zadaniem dla logików i osób zajmujących się metamatematyką, którzy badają systemy aksjomatyczne jako takie.

6. Alfred Tarski

Chcąc mówić o poglądach Alfreda Tarskiego na matematykę i logikę[44], należy zaznaczyć, że Tarski – choć był w zasadzie matematykiem i logikiem i tymi dziedzinami głównie się zajmował – interesował się także filozofią i brał aktywny udział w życiu filozoficznym swego czasu. Sam pisał o sobie:

> Będąc matematykiem (jak również logikiem, a może po trochu i filozofem) [...][45] (1944, s. 369).

---

43 "But to deduce sentences from one another, one need not prove that one is proceeding by unfailing rules. It is enough simply to proceed by them. Therefore, to construct neutral-deductive systems it is unnecessary to presuppose the theorems of logic. These are needed only for reflecting upon such systems from the methodological point of view, so as to evaluate the correctness of their structure" (1960b, s. 216).

44 Na temat Tarskiego jako filozofa pisał J. Woleński – por. na przykład Woleński (1993) czy (1995b).

45 "Being a mathematician (as well as a logician, and perhaps a philosopher of a sort) [...]".

Całe środowisko, w którym rozwijał się intelektualnie Tarski, było związane z filozofią i filozofią nasycone. Filozofię studiował pod kierunkiem Tadeusza Kotarbińskiego[46]. Łukasiewicz i Leśniewski, u których Tarski uczył się logiki, również z wykształcenia byli filozofami. Tarski był członkiem naukowych towarzystw filozoficznych, w których pełnił różne funkcje i uczestniczył w rozmaitych filozoficznych konferencjach i kongresach naukowych. Publikował też w kierunkowych czasopismach (na przykład w *Przeglądzie Filozoficznym*, *Ruchu Filozoficznym*, *Erkenntnis*, *Philosophy and Phenomenological Research*, *Revue Internationale de Philosophie* czy w *History and Philosophy of Logic*).

Miał świadomość, że jego prace, w szczególności *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych* (1933), mają wartość filozoficzną:

> W istotnej swej części praca niniejsza leży jednak na uboczu od głównego łożyska badań metodologicznych. Centralne jej zagadnienie – konstrukcja definicji zdania prawdziwego i ugruntowanie naukowych podstaw teorii prawdy – należy do zakresu teorii poznania i zaliczane nawet bywa do naczelnych problematów tej gałęzi filozofii. Toteż liczę na to, że pracą tą zainteresują się w pierwszym rzędzie teoretycy poznania, że – nie zrażając się uciążliwym miejscami aparatem pojęć i metod, nie stosowanych dotąd w uprawianej przez nich dziedzinie wiedzy – zanalizują oni krytycznie zawarte w tej pracy wyniki i zdołają je wyzyskać w dalszych dociekaniach z tego zakresu (1933, s. 115).

Tarski bronił także filozofii. W liście do Alonza Churcha, dotyczącym polityki redakcyjnej czasopisma *Journal of Symbolic Logic* pisał:

---

[46] Tarski bardzo szanował Kotarbińskiego i uważał go za swego nauczyciela. To jemu poświęcił wybór swoich fundamentalnych prac logicznych *Logic, Semantics, Metamathematics* (1956), umieszczając dedykację „To his teacher TADEUSZ KOTARBIŃSKI. The author" (w drugim wydaniu z roku 1983, które ukazało się już po śmierci Kotarbińskiego, dedykacja brzmiała: „To the memory of his teacher TADEUSZ KOTARBIŃSKI. The author"). Pytany przez swoich doktorantów w Berkeley, kto był jego nauczycielem, bez wahania odpowiadał: „Kotarbiński" – mimo że promotorem jego rozprawy doktorskiej był Leśniewski, a wśród jego nauczycieli byli jeszcze Łukasiewicz czy Sierpiński. Zdjęcie Kotarbińskiego zajmowało zawsze uprzywilejowane miejsce na biurku Tarskiego.

> Nie mogę jednak zaprzeczyć, że osobiście byłbym szczęśliwy, gdyby w *Journal* ukazywały się w większej niż dotąd ilości także artykuły innego rodzaju; chodzi o artykuły, które można uznać za nie należące do logiki w sensie ścisłym, ale do filozofii, do matematyki czy innych dyscyplin – pod warunkiem jednak, że w artykułach tych stosuje się w istotny sposób metody nowoczesnej logiki czy też pociągają one wnioski, które są istotne dla logiki[47] (cyt. za Woleński 1995b, s. 333).

Mimo że Tarski orientował się świetnie w aktualnej literaturze filozoficznej i – jak twierdzi wielu jego znajomych czy przyjaciół – był zawsze gotów dyskutować na tematy filozoficzne, to niezmiernie rzadko, jeśli w ogóle, wypowiadał się na ten temat w swoich publikacjach. Nie rozwijał też (choćby na seminariach) swoich poglądów, by nadać im bardziej dojrzałą postać[48]. Pisał na przykład prace na tematy związane z wszystkimi trzema głównymi nurtami filozofii matematyki, tzn. z logicyzmem, intuicjonizmem i formalizmem, i jego wyniki formalne wnosiły istotny wkład w rozwój tych kierunków, nigdy jednak nie był reprezentantem żadnej z nich, tzn. nie przyjmował założeń filozoficznych tych kierunków. Zajmował się także logikami wielowartościowymi i logiką modalną, ale nigdy nie podejmował związanych z nimi dyskusji filozoficznych[49]. Wielokrotnie

---

47 "I cannot deny, however, that personally I should be happy if also another type of articles appeared in the *Journal* in a larger amount that they appeared so far; in fact articles which could be regarded as belonging not to logic in the strict sense but to philosophy, to mathematics, or to other disciplines – under the condition, that these articles either apply methods of modern logic in an essential way or have implications which are essentially relevant to logic".

48 P. Suppes pisze na ten temat tak (1998, s. 80): „[...] był nadzwyczaj ostrożny i uważny w podawaniu jakichkolwiek interpretacji filozoficznych swoich prac. W przeciwieństwie do tego w rozmowach był skłonny wyrażać dużo szerszą gamę opinii filozoficznych – wiem o tym zarówno z mojego osobistego doświadczenia, jak i z opowieści kolegów" ("[...] he was extraordinarily cautious and careful in giving any direct philosophical interpretation of his work. In contrast, he was in conversation willing to express a much wider range of philosophical opinions – I know this from my own experience and also from reports of colleagues").

49 Warto tu dodać, że w wystąpieniu na Bicentennial Conference w Princeton w grudniu 1946 roku Tarski wyraził wątpliwości w sprawie logiki wielowartościowej. Mówił tam (por. Sinaceur 2000, s. 25): „Historycznie rzecz biorąc,

natomiast podkreślał, że badania logiczne i metamatematyczne nie powinny być ograniczane przez żadne z góry przyjmowane założenia natury filozoficznej. W artykule „Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften" pisał:

> Na koniec zaznaczmy, że rozważania zawarte w tej pracy nie wymagają przyjęcia żadnego określonego stanowiska w zakresie podstaw matematyki[50] (1930, s. 363).

W „Contribution to the Discussion of P. Bernays ‚Zur Beurteilung der Situation in der beweistheoretischen Forschung' "(1954) znajdujemy zaś następujące słowa:

> Jako istotny wkład polskiej szkoły w rozwój metamatematyki można traktować fakt, że od samego początku dopuszczała ona w badaniach

---

problemy związane z rozstrzygalnością miały bezpośredni związek z powstaniem systemów logiki wielowartościowej. Wydaje się, że w pewnym momencie logicy poczuli, iż rozwiązanie tego problemu dla klasycznej logiki dwuwartościowej jest zbyt trudne, aby zaatakować go bezpośrednio i że powinno się próbować, »po kawałku«, to znaczy przez rozwiązanie problemu dla różnych podsystemów rachunku klasycznego. W ten sposób zostały stworzone systemy wielowartościowe: w wielu przypadkach są one właśnie tym – podsystemami rachunku klasycznego [...]. Przechodząc od tego problemu – a mam nadzieję, że nie ma tu żadnych twórców logik wielowartościowych, tak że mogę mówić swobodnie – powinienem powiedzieć, że jedynym z tych systemów, dla których istnieje jakaś nadzieja przetrwania jest [system] Birkhoffa i von Neumanna. System ten przetrwa, ponieważ odpowiada na rzeczywistą potrzebę". ("Historically the decision problem has had a direct bearing on the origin of many-valued systems logic. At one time it seems that logicians in general felt that the solution of the decision problem for the classical two-valued logic was too difficult to attack directly and that the problem should be attempted piecemeal, that is by first solving the decision problem for various subsystems of te classical calculus. It was in this way that the multi-valued systems were created: for they are in most cases just that – subsystems of the classical calculus [...]. In passing from this topic – and I hope that no creator of many-valued logics are present, so I may speak freely – I should say that the only one of these systems for which there is any hope of survival is that of Birkhoff and von Neumann. This system will survive because it does fulfil a real need").

50 „Zum Schluß sei bemerkt, das die Voraussetzung eines bestimmten philosophisohen Standpunktes zu der Grundlagen der Mathematik bei den vorliegenden Ausführungen nicht erforderlich ist".

metamatematycznych wszelkie owocne metody, zarówno finitistyczne, jak i niefinitystyczne[51].

Tarski przejął od swoich nauczycieli charakterystyczny dla szkoły lwowsko-warszawskiej stosunek do filozofii. Postawę tę wzmocniły jeszcze jego kontakty z Kołem Wiedeńskim. Charakteryzuje się ona nastawieniem antymetafizycznym. Tarski popierał ideę filozofii naukowej. Pod wpływem głównie Kotarbińskiego akceptował program tzw. małej filozofii, której celem jest nietworzenie wielkich uniwersalnych systemów filozoficznych, ale systematyczna analiza pojęć używanych w filozofii. Filozofia taka jest więc raczej minimalistyczna, cechuje się antyspekulatywnym charakterem i pewnym sceptycyzmem względem wielu problemów filozofii tradycyjnej. W szkole lwowsko-warszawskiej wierzono, że jeśli filozofia będzie rozwijana z zachowaniem właściwych standardów metodologicznych, to wzmocni to jej naukowy charakter. Trzeba dodać, że postawa tej szkoły była mniej radykalna niż Koła Wiedeńskiego. „W szczególności dopuszczano tu rozważania na temat powszechników, uznając, że sporowi o uniwersalia można nadać ściślejszą postać i rozwiązać go.

Tarski dostrzegał pewne niebezpieczeństwa w stosowaniu aparatu logicznego do analizy problemów filozoficznych – dał temu wyraz w dyskusji nad pracą Marii Kokoszyńskiej „W sprawie względności i bezwzględności prawdy" (1936). Stosowanie takiego aparatu może – jego zdaniem – prowadzić do pewnego spłycenia problemów filozoficznych i zagubienia przez to ich istoty – nie musi być bowiem całkiem jasne, czy nowe, ścisłe sformułowanie problemu oddaje wszystkie intencje jego twórców. Z drugiej strony taka analiza logiczna wymusza ścisłość i precyzję w formułowaniu problemów filozoficznych, co pozwala uniknąć prowadzących donikąd dyskusji i dywagacji. Sam Tarski był w szczególności zawsze bardzo wrażliwy na punkcie problemów związanych ze sporem o powszechniki.

Tarski mocno podkreślał swoją sympatię ku empiryzmowi. W nauce wykorzystuje się – według niego – dwie metody: deduk-

---

[51] "As an essential contribution of the Polish school to the development of metamathematics one can regard the fact that from the very beginning it admitted into metamathematical research all fruitful methods, whether finitary or not".

cję i indukcję. Matematykę był skłonny identyfikować z metodą dedukcyjną. Przy wielu okazjach czynił uwagi na temat związków między naukami formalnymi i empirycznymi. Twierdził, że nie istnieje żadna wyraźna granica oddzielająca te nauki. Podobnie jak John Stuart Mill był skłonny twierdzić, że w obu przypadkach – jeśli chodzi o źródła i pochodzenie wiedzy logicznej i matematycznej z jednej, a empirycznej z drugiej – mamy do czynienia z akumulacją doświadczenia. W liście do Mortona White'a pisał:

> Byłbym skłonny wierzyć (za J.S. Millem), że prawdy logiczne i matematyczne nie różnią się w swoim pochodzeniu od prawd empirycznych – obie są wynikiem akumulacji doświadczenia[52] (Tarski 1987, s. 31).

Dopuszczał możliwość odrzucania tez logicznych i matematycznych na bazie empirycznej. We wspomnianym liście do White'a przyznaje:

> Myślę, że jestem gotów odrzucić założenia logiczne (aksjomaty) naszej nauki w dokładnie takich samych okolicznościach, w jakich jestem gotów odrzucić założenia empiryczne (np. hipotezy fizyczne); i nie sądzę, bym był odosobniony w tym względzie[53].

Choć – jak pisze we wspomnianym liście – aksjomaty logiki są tak ogólnej natury, że rzadko „dotyka" je doświadczenie, to jednak nie ma tu żadnej różnicy, jeśli chodzi o zasadę. Tarski przyznaje, iż jest skłonny wyobrazić sobie, że „pewne nowe doświadczenia bardzo podstawowej natury mogą nas skłonić do zmiany właśnie niektórych aksjomatów logiki"[54] (1987, s. 31). Możliwość taką zdają się wskazywać, zdaniem Tarskiego, nowe wyniki mechaniki kwantowej.

---

52 "I would be inclined to believe (following J.S. Mill) that logical and mathematical truths do not differ in their origin from empirical truth – both are results of accumulated experience".

53 "I think that I am ready to reject logical premises (axioms) of our science in exactly the same circumstances in which I am ready to reject empirical premises (e.g., physical hypotheses): and I do not think that I am an exception in this respect".

54 "[...] certain new experiences of a very fundamental nature may make us inclined to change just some axioms of logic".

To, że nie jesteśmy – jak dotąd – skłonni odrzucać aksjomatów logiki, bierze się być może z faktu, że prawdy logiczne są nie tylko bardziej ogólne, ale i dużo starsze niż teorie fizyczne czy nawet aksjomaty geometryczne.

Tarski wyrażał też pewien sceptycyzm, jeśli chodzi o pojęcie tautologii i jej rolę w definiowaniu logiki i matematyki. Uważał, że jest to pojęcie niejasne. Wiąże się to z jego przekonaniem, że nie istnieje wyraźna linia demarkacyjna pomiędzy prawdami logicznymi i faktycznymi. Carnap zanotował w swoim dzienniku pod datą 22 lutego 1930 roku następujące słowa:

> Godzina 8–11 z Tarskim w Café. O monomorfizmie, o tautologii, nie jest on skłonny przyznać, że nie mówi ona niczego o świecie; uważa, że pomiędzy zdaniami tautologicznymi a empirycznymi jest jedynie drobna i subiektywna różnica[55] (cyt. za Haller 1992, s. 5).

Tarski próbował określać pojęcia logiczne w duchu programu erlangeńskiego Kleina. Ten ostatni traktował geometrię jako teorie niezmienników i w ten sposób charakteryzował różne geometrie. W artykule „What Are Logical Notions?” (1986a) Tarski określił pojęcia logiczne jako niezmienniki ze względu na wszystkie możliwe przekształcenia jednojednoznaczne świata w samego siebie[56]. Doszedł do wniosku, że wszystkie pojęcia systemu *Principia Mathematica* Whiteheada i Russella są w tym sensie logiczne. We wspomnianej pracy zastanawia się też, czy wszystkie pojęcia matematyczne są w tym sensie logiczne (zadaje więc pytanie w duchu logicyzmu). Dochodzi do wniosku, że odpowiedź nie jest tu jednoznaczna – wszystko zależy od tego, w jaki sposób buduje się matematykę: czy na podstawie teorii typów, czy aksjomatycznej teorii mnogości typu Zermela, Fraenkla, von Neumanna czy im podob-

---

55 „8–11 h mit Tarski im Café. Über Monomorphie, über Tautologie, er will nicht zugeben, daß sie nichts über die Welt sagt; er meint zwischen tautologischen und empirischen Sätzen sei ein bloß gradueller und subjektiver Unterschied“.

56 Rozważania Tarskiego o pojęciach logicznych nawiązywały do jego prac z Adolfem Lindenbaumem. Na marginesie dodajmy, że Lindenbaum też napisał trzy artykuły z filozofii matematyki – por. Lindenbaum (1930), (1931) i (1936).

nych. Jeśli w grę wchodzi pierwsza możliwość, to wtedy odpowiedź jest pozytywna. Teoria mnogości budowana w ramach teorii typów jest bowiem częścią logiki. W drugim przypadku zaś odpowiedź jest negatywna – relacja „być elementem" przestaje bowiem być pojęciem logicznym. Tarski powstrzymuje się od zajęcia jednoznacznego stanowiska. Pisze tylko, że:

> Monistyczna koncepcja logiki, teorii mnogości i matematyki, wedle której cała matematyka byłaby częścią logiki odpowiada, jak sądzę, fundamentalnej tendencji współczesnej filozofii. Z drugiej strony matematycy byliby zawiedzeni, słysząc, że matematyka, którą uważają za najważniejszą dziedzinę na świecie, jest częścią czegoś tak trywialnego jak logika; dlatego też preferują budowanie teorii mnogości w taki sposób, że pojęcia teoriomnogościowe nie są pojęciami logicznymi[57] (1986a, s. 153).

I dodaje:

> Propozycja, którą sformułowałem, nie implikuje sama przez się żadnej odpowiedzi na pytanie o to, czy pojęcia matematyczne są pojęciami logicznymi[58] (1986a, s. 153).

Postawa ta jest charakterystyczna dla Tarskiego i dla całej warszawskiej szkoły logicznej. Polega ona, jak widać, na precyzowaniu różnych możliwych stanowisk i jednocześnie uchylaniu się od zajęcia definitywnego stanowiska.

Z poruszonymi kwestiami łączy się jeszcze jedna sprawa, a mianowicie próba określenia, czym jest logika. Ajdukiewicz proponował

---

57 "A monistic conception of logic, set theory, and mathematics, where the whole of mathematics would be a part of logic, appeals, I think, to a fundamental tendency of modern philosophers. Mathematicians, on the other hand, would be disappointed to hear that mathematics, which they consider the highest discipline in the world, is a part of something so trivial as logic; and they therefore prefer a development of set theory in which set-theoretical notions are not logical notions".

58 "The suggestion which I have made does not, by itself, imply any answer to the question of whether mathematical notions are logical".

określenie logiki formalnej jako nauki, „której twierdzenia zbudowane są wyłącznie ze stałych logicznych oraz z symboli zmiennych” (Ajdukiewicz 1934b, s. 41; por. paragraf 5 w rozdziale 3). W pracy „O pojęciu wynikania logicznego” (1936) Tarski zwrócił uwagę na to, że podział terminów na logiczne i pozalogiczne – choć nie jest całkiem dowolny – jest jednak w pewnej mierze arbitralny. Pisał tam:

> [...] nie znam żadnych obiektywnych względów, które by pozwalały przeprowadzić dokładną granicę między obiema kategoriami terminów. Przeciwnie, mam wrażenie, że – nie naruszając wyraźnie intuicji potocznych – można zaliczyć do terminów logicznych i takie terminy, których logicy do tej kategorii nie zaliczają. Skrajny byłby ten przypadek, gdybyśmy wszystkie wyrazy języka potraktowali jako logiczne: pojęcie wynikania *formalnego* pokryłoby się wówczas z pojęciem wynikania *materialnego* – zdanie *X* wynikałoby ze zdań klasy *K* wtedy i tylko wtedy, gdyby było prawdziwe, bądź choć jedno zdanie klasy *K* byłoby fałszywe (1936, s. 200).

Pod wpływem Leśniewskiego Tarski był – w pewnym przynajmniej okresie – zwolennikiem intuicyjnego (czy intuicjonistycznego) formalizmu (por. paragraf 3 w rozdziale 3). W pracy „Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften” przyznawał:

> [...] moja osobista postawa w tej kwestii zgadza się zasadniczo z tym, co znalazło dobitny wyraz w pismach S. Leśniewskiego o podstawach matematyki, a co nazwałbym intuicjonistycznym formalizmem[59] (1930, s. 363).

Zgodnie z tym poglądem język logiki – jednoznacznie i w sposób pełny skodyfikowany – mówi zawsze „coś” i „o czymś”. Logika

---

[59] „[...] meine persönliche Einstellung in diesen Fragen im Prinzip mit dem Standpunt übereinstimmt, dem S. Leśniewski in seinen Arbeiten über die Grundlagen der Mathematik einen prägnanten Ausdruck gibt und den ich als »intuitionistischen Formalismus« bezeichnen werde”. Przekład angielski według (1956, s. 62): “[...] my personal attitude towards this question agrees in principle with that which has found emphatic expression in the writings of S. Leśniewski on the foundations of mathematics and which I would call intuitionistic formalism”.

może więc być traktowana – jak to wyraził Henryk Hiż, powołując się na samego Leśniewskiego – jako „formalna ekspozycja intuicji" (por. Woleński 1995b, s. 336). Później Tarski porzucił intuicyjny formalizm. W przedruku wspomnianego artykułu w tomie *Logic, Semantics, Metamathematics* (1956 i 1983) dodał w przypisie następującą uwagę:

> To ostatnie zdanie wyraża poglądy autora w okresie, gdy artykuł ten został pierwotnie opublikowany i nie odzwierciedla ono adekwatnie jego obecnego stanowiska[60] (1956, s. 62).

W istocie Tarskiemu bliższa była raczej postawa Łukasiewicza w stosunku do logiki niż postawa reprezentowana przez Leśniewskiego (por. paragrafy 1 i 3 w rozdziale 3). Stanowisko takie umożliwiało mu na przykład zajmowanie się różnymi systemami logiki bez konieczności akceptowania ich założeń ideologicznych czy filozoficznych. Wpłynęła także na jego pojmowanie badań metamatematycznych, które winny być prowadzone bez przyjmowania jakichkolwiek wstępnych założeń filozoficznych i w których powinno móc się stosować dowolne – byle poprawne – metody badawcze (por. przytoczony powyżej cyt. z Tarski 1954).

Tarski nigdzie nie wyjaśnił, dlaczego porzucił wcześniejsze poglądy związane z intuicyjnym formalizmem ani też nie opisał dokładniej swych nowych poglądów. Można to traktować jako znak świadczący o tym, że jego badania w zakresie logiki i podstaw matematyki stawały się coraz bardziej niezależne od wstępnych założeń filozoficznych. Woleński w artykule (1995b) sugeruje jednak (używając tu terminu „ideologia" zamiast „założenia filozoficzne"), że pewne ślady intuicyjnego formalizmu pozostały w pismach Tarskiego. W szczególności można je dostrzec w jego monografii na temat pojęcia prawdy (1933), gdy wyjaśnia związki między znaczeniem a językiem. Według Woleńskiego to właśnie ta ideologia stanowiła podstawę ogólnego kontekstu, w którym powstawała semantyka. Była

---

60 "This last sentence expresses the views of the author at the time when this article was originally published and does not adequately reflect his present attitude".

to jednak tylko ideologia, a nie zbiór założeń filozoficznych, które by determinowały sposób, w jaki winna być uprawiana logika. Wyjaśnia to też, dlaczego Tarski swą – przytoczoną powyżej deklarację o zgodności jego osobistej postawy „z tym, co znalazło dobitny wyraz w pismach S. Leśniewskiego [...], a co nazwałbym intuicjonistycznym formalizmem" (1930, s. 363) – poprzedził słowami „Na marginesie tylko chciałbym więc wspomnieć, że..."[61].

Wyżej pisaliśmy, że Tarski był przekonany, iż jego praca na temat pojęcia prawdy jest przyczynkiem do starego problemu filozoficznego. Podkreślał też wielokrotnie, że jego zamiarem było podanie nowoczesnej interpretacji Arystotelesowskiego pojęcia prawdy. W „The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics" pisał: „Chcielibyśmy, aby nasza definicja oddała sprawiedliwość intuicjom związanym z *klasycznym Arystotelesowskim pojęciem prawdy*"[62] (1944, s. 343). W artykule „Truth and Proof" znajdujemy zaś słowa: „Spróbujemy uzyskać tutaj bardziej precyzyjne wyjaśnienie klasycznej koncepcji prawdy, które mogłoby zastąpić sformułowanie Arystotelesowe, zachowując jego zasadnicze intencje"[63] (1969, s. 64).

Tarski przeciwstawiał się nihilistycznej koncepcji prawdy (nazwa została zasugerowana – jak sam pisze (1969, s. 69) przez Kotarbińskiego). Zgodnie z tą koncepcją słowa „prawdziwy" i „prawda" nie mają samodzielnego znaczenia i można je wyeliminować z każdego kontekstu. Zamiast na przykład mówić: „Prawdą jest, że wszystkie koty są czarne", można po prostu powiedzieć: „Wszystkie koty są czarne"[64]. Tarski twierdzi, że: „W terminologii logiki średniowiecznej możemy powiedzieć, że słowa »prawda« i »prawdziwy« mogą być użyte synkategorematycznie w pewnych specjalnych

---

61 „Nur nebenbei erwähne ich deshalb, daß ..." Przekład angielski według (1956, s. 62): "Only incidentally, therefore I may mention ...".

62 "We should like our definition to do justice to the intuitions which adhere to the *classical Aristotelian conception of truth*".

63 "We shall attempt to obtain here a more precise explanation of the classical conception of truth, one that could supersede the Aristotelian formulation while preserving its basic intentions".

64 Przykład ten zaczerpnięto z pracy Tarskiego (1969).

kontekstach, lecz nigdy nie mogą być użyte kategorematycznie”[65] (1969, s. 68).

W artykułach „The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics” (1944) i „Truth and Proof” (1969) Tarski zwraca uwagę na trudności, do jakich prowadzi przyjęcie koncepcji nihilistycznej. W pierwszym pisze (por. 1944, s. 61) o stwierdzeniu, że wszystkie konsekwencje zdań prawdziwych są prawdziwe, w którym to stwierdzeniu, ważnym z punktu widzenia logiki, nie można wyeliminować słowa „prawdziwy” we wspomniany sposób i w którym jego użycie jest istotne. W drugim z artykułów (por. 1969, s. 69) przytacza przykład historyka nauki, który chce sformułować hipotezę głoszącą, że ponieważ znane teksty jakiegoś matematyka, którym się zajmował, są prawdziwe, więc to samo dotyczy wszystkich jego dzieł, włącznie z tymi, które mogą zostać jeszcze odkryte. Przyjęcie nihilistycznego poglądu na prawdę uniemożliwia sformułowanie takiej hipotezy. Tarski podsumowuje swe rozważania, pisząc:

> Można by powiedzieć, że „nihilizm” w rozumieniu prawdy z pozoru akceptuje użycie słowa „prawda” w pewnych rozpowszechnionych formach ludzkiej mowy, w istocie jednak usuwa pojęcie prawdy z zasobu pojęć ludzkiego umysłu[66] (1969, s. 69).

W pracach Tarskiego poświęconych pojęciu prawdy, szczególnie w sztandarowej pozycji, jaką jest *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych* (1933), widać wyraźnie wpływy Kotarbińskiego (por. początek tego paragrafu). Uwidaczniają się one w dwu kwestiach: pojęciu zdania i samej definicji prawdy[67]. Już na samym początku (1933) Tarski powołuje się na Kotarbińskiego *Elementy logiki formalnej, teorji poznania i metodologji* (1926; zob. też 1929) i wyraźnie deklaruje,

---

[65] “Employing the terminology of medieval logic, we can say that the word »true« can be used syncategorematically in some special situations, but it cannot ever be used categorematically”.

[66] “One could say that truththeoretical »nihilism« pays lip service to some popular forms of human speech, while actually removing the notion of truth from the conceptual stock of the human mind”.

[67] Na temat koncepcji prawdy u Tarskiego i jego poprzedników zob. Murawski i Woleński (2008b).

że „z książki tej korzystałem niejednokrotnie przy redagowaniu niniejszych rozważań, dostosowując się w wielu punktach do ustalonej tam terminologii" (1933, przyp. 1, s. 2). Tarski przejął klasyczne korespondencyjne pojęcie prawdy w sformułowaniu Kotarbińskiego – pisze o tym w przypisie 4 na stronie 4 w (1933)[68].

Śladem wpływu Kotarbińskiego jest też fakt, że Tarski pokazał w pracy (1933) nie, jak zdefiniować „prawdę" jako taką, ale jak zdefiniować zwrot „jest zdaniem prawdziwym języka *L*".

W okresie międzywojennym Tarski, pod wpływem Kotarbińskiego i Leśniewskiego, traktował język jako zbiór zdań, przy czym rozumiał te ostatnie w sposób ściśle nominalistyczny jako obiekty fizyczne. W „Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften" pisał:

> Najwygodniej jest uważać zdania za napisy, czyli za konkretne ciała fizyczne[69] (1930, s. 363).

Tarski był oczywiście świadom tego, że takie rozumienie zdań prowadzi do pewnych trudności w badaniach logicznych, w szczególności w metalogice i metamatematyce. W *Pojęciu prawdy* (1933) powołuje się on na *Elementy* Kotarbińskiego (1926), wyróżniającego trzy interpretacje pojęcia „zdanie": idealistyczną, psychologiczną i nominalistyczną, wybierając do dalszych rozważań tę ostatnią – co było konsekwencją przyjmowanego przezeń reizmu (por. paragraf 3 w rozdziale 3). W przypisie 5 Tarski pisze:

> Zdania traktujemy tu stale jako pewnego rodzaju wyrażenia, a więc jako twory językowe. Jeśli jednak terminy „wyrażenie", „zdanie" itd. interpretować jako nazwy konkretnych napisów, to różne sformułowania, zawarte w niniejszej pracy, nie są zupełnie poprawne i stwarzają pozory pospolitego błędu, polegającego na utożsamianiu wyrażeń równokształtnych. [...] Aby uniknąć podobnych zarzutów i nie wprowadzać

---

[68] „Podobne sformułowanie znajdujemy w książce Kotarbiński$_1$ [chodzi tu o Kotarbiński (1926) – uwaga moja, R.M.] [...]".

[69] „Die Aussagen sind ihrerseits am bequemsten als Schriftzeichen, also als konkrete physische Körper zu betrachten".

> przy tym pewnej zbędnej komplikacji do rozważań związanej m.in. z koniecznością operowania pojęciem równokształtności, dogodnie jest umówić się, że terminy takie jak „wyraz", „wyrażenie", „zdanie" itd. oznaczać będą stale nie konkretne napisy, a całe klasy napisów, równokształtnych z pewnym napisem danym [...] (1933, s. 5–6).

Tarski traktuje zatem język jako zbiór nie konkretnych pojedynczych napisów, ale jako kolekcję wyrażeń-typów.

W *Pojęciu prawdy* występują co najmniej cztery różne pojęcia zdania: (1) zdanie jako wyrażenie określonej kategorii syntaktycznej, (2) zdanie jako produkt psychofizyczny, (3) zdanie jako ciało fizyczne oraz (4) zdanie jako funkcja bez zmiennych wolnych (a więc jako wyrażenie pewnej kategorii logicznej). W sensie (1) zdanie może być określone w sposób czysto strukturalny (por. 1933, s. 16). Rozumienie (2) ma tę wadę, że przypuszczenie, iż istnieje nieskończenie wiele wyrażeń, staje się bezsensowne (por. 1933, s. 25). Sens (3) rodzi kolejną trudność – zwłaszcza w kontekście badań metateoretycznych. Tarski pisze:

> Punkt ciężkości zagadnienia przenosi się wówczas do fizyki, twierdzenie o nieskończonej liczbie wyrażeń przestaje być niedorzeczne i przedstawia nawet pewną specjalną konsekwencję założeń, normalnie przyjmowanych w fizyce lub w geometrii (1933, przyp. 23, s. 25–26).

Niezależnie od rozmaitości znaczeń pojęcia zdania, Tarski podkreśla finitystyczny charakter języka – co więcej, traktował on to jako fakt o fundamentalnym znaczeniu. W przypisie 94 twierdzi:

> Kilkakrotnie już zetknęliśmy się w toku rozważań z pokrewnymi zjawiskami: z niemożliwością uchwycenia równoczesnej zależności między przedmiotami, należącymi do nieskończenie wielu kategorii semantycznych, z brakiem wyrazów „nieskończonego rzędu", z niemożliwością objęcia jednym procesem definiowania nieskończenie wielu pojęć itp. [...] Nie sądzę, by można było traktować te zjawiska jako symptom niedoskonałości formalnej istniejących aktualnie języków – przyczyna tkwi raczej w samej istocie języka: język, będąc wytworem działalności ludzkiej, nosi z konieczności „finitystyczny" charakter i nie może

> służyć jako adekwatne narzędzie do badania faktów lub konstruowania pojęć natury wybitnie „infinitystycznej" (1933, s. 102).

Dodajmy, że odpowiada to podejściu Kotarbińskiego do języka.

Tarski początkowo wyraźnie i ostro oddzielał język potoczny, naturalny i język sformalizowany. W zakończeniu *Pojęcia prawdy* pisał:

> Filozofowie, nie przyzwyczajeni do stosowania metod dedukcyjnych w swej codziennej pracy naukowej, skłonni są traktować wszelkie języki sformalizowane z pewnym lekceważeniem, przeciwstawiając tym „sztucznym" tworom jedyny język naturalny – język życia potocznego. Dlatego też w oczach niejednego z czytelników jako moment, istotnie obniżający wartość powyższych rozważań, zarysuje się zapewne ta okoliczność, że uzyskane wyniki dotyczą niemal wyłącznie języków sformalizowanych. Z poglądem tym trudno by im było się zgodzić [...]. Ktoś, kto pragnąłby mimo wszelkie trudności uprawiać ścisłymi metodami semantykę języka potocznego, musiałby uprzednio podjąć się niewdzięcznej pracy nad „reformą" tego języka: musiałby sprecyzować jego strukturę, usunąć wieloznaczność występujących w nim terminów, rozbić wreszcie język na szereg coraz to obszerniejszych języków, z których każdy pozostawałby w tym samym stosunku do następnego co język sformalizowany do swego metajęzyka. Wątpić jednak wolno, czy „zracjonalizowany" na tej drodze język potoczny zachowałby swą cechę „naturalności" i czy nie zyskałby wówczas charakterystycznych znamion języków sformalizowanych (1933, s. 115–116).

Okazuje się zatem, że dla zwykłych języków naturalnych niemożliwa jest właściwie sformalizowana semantyka.

Tarski nie identyfikował języków sformalizowanych i języków sztucznych. Wyrażenia tych pierwszych są, według niego, wyposażone w znaczenie:

> Zbyteczne jest może dodawać, że nie interesują tu nas wcale języki i nauki „formalne" w pewnym specyficznym znaczeniu tego wyrazu, a mianowicie tego rodzaju nauki, iż występującym w nich znakom i wyrażeniom nie przypisuje się żadnego intuicyjnego sensu; w odniesieniu do takich nauk postawione tu zagadnienie traci wszelką rację bytu i przestaje być po prostu zrozumiałe. Znakom występującym

> w tych językach, których dotyczą niniejsze rozważania, przypisujemy zawsze całkiem konkretne i zrozumiałe dla nas znaczenie [...]; wyrażenia, które nazywamy zdaniami, pozostają zdaniami i po przełożeniu zawartych w nich znaków na język potoczny [...] (1933, s. 17).

Trudno jednoznacznie sprecyzować, co Tarski rozumiał w tym kontekście przez znaczenie. W przywoływanym *Pojęciu prawdy* pisze, że języki sformalizowane można scharakteryzować „jako tego rodzaju (sztucznie skonstruowane) języki, w których sens każdego wyrażenia jest jednoznacznie wyznaczony przez jego kształt" (1933, s. 16). Z drugiej strony, gdy Tarski mówi o przekładalności języków, to zdaje się sugerować, że znaczenie nie jest całkowicie wyznaczone przez własności syntaktyczne wyrażenia. Woleński pisze (1995b), że Tarski starał się unikać rozważań nad naturą znaczenia.

W późniejszych swych pracach Tarski nie był skłonny wyznaczać ścisłej granicy pomiędzy językami sformalizowanymi i językiem potocznym. W „Truth and Proof" pisał:

> Trzeba podkreślić, że używając terminu „języki sformalizowane" nie mamy na myśli wyłącznie systemów językowych sformułowanych całkowicie za pomocą symboli i nie mamy też na myśli niczego, co byłoby zasadniczo przeciwstawne językom naturalnym. Przeciwnie, tylko te języki sformalizowane wydają mi się naprawdę interesujące, które są fragmentami języków naturalnych (fragmentami wyposażonymi w pełne słowniki i ścisłe reguły syntaktyczne) lub które dają się przynajmniej adekwatnie przetłumaczyć na języki naturalne[70] (1969, s. 69–70).

W pracy „The Semantic Conception of Truth" (1944) twierdzi, że język nazywa się sformalizowanym, gdy w określaniu jego struktury odwołujemy się wyłącznie do kształtu wyrażeń. Takimi są na przy-

---

70 "I should like to emphasize that, when using the term »formalized languages«, I do not refer exclusively to linguistic systems that are formulated entirely in symbols, and I do not have in mind anything essentially opposed to natural languages. On the contrary, the only formalized languages that seem to be of real interest are those which are fragments of natural languages (fragments provided with complete vocabularies and precise syntactical rules) or those which can at least be adequately translated into natural languages".

kład języki różnych systemów logiki dedukcyjnej. Można w nich rozwijać wiele gałęzi nauki, w tym matematykę i fizykę teoretyczną. Tarski dodaje jednak, że można sobie wyobrazić konstrukcję języków, które mają dokładnie określoną strukturę, a nie są językami sformalizowanymi – w językach takich akceptacja zdania może zależeć nie tylko od jego struktury, ale także od jakichś innych pozajęzykowych czynników. Zatem języki o ściśle określonej strukturze zajmują w pewnym sensie pozycję pośrednią pomiędzy językami sformalizowanymi a zwykłym językiem potocznym.

Tarski uważał, że cechą negatywną języków potocznych jest ich brak ścisłości oraz zamkniętość (tzn. to, że zawierają też własny metajęzyk). Ten ostatni wyróżnik powoduje w szczególności, że możliwe są w takich językach antynomie semantyczne.

Wspominaliśmy powyżej o skłonnościach nominalistycznych Tarskiego – w okresie międzywojennym traktował on język jako zbiór zdań, przy czym rozumiał te ostatnie w sposób ściśle nominalistyczny jako obiekty fizyczne. Jego sympatie skierowane ku nominalizmowi były jednak znacznie silniejsze. Przytoczmy opinię Mostowskiego:

> Tarski w dyskusjach często wskazywał na swoje sympatie dla nominalizmu. Podczas gdy nie zaakceptował on nigdy „reizmu" Tadeusza Kotarbińskiego, czuł niewątpliwie do niego sympatię we wczesnym okresie swojej pracy. Metody teoriomnogościowe stanowiące podstawę jego badań logicznych i matematycznych zmuszały go jednak nieustannie do używania abstrakcyjnych i ogólnych pojęć, których nominalista stara się unikać. Wobec braku obszerniejszych publikacji Tarskiego na tematy filozoficzne, konflikt ten wydaje się pozostawać nierozwiązany[71] (1967c, s. 81).

[71] "Tarski, in oral discussions, has often indicated his sympathies with nominalism. While he never accepted the »reism« of Tadeusz Kotarbiński, he was certainly attracted to it in the early phase of his work. However, the setheoretical methods that form the basis of his logical and mathematical studies compel him constantly to use the abstract and general notions that a nominalist seeks to avoid. In the absence of more extensive publications by Tarski on philosophical subjects, this conflict appears to have remained unresolved".

Zanim rozważymy kwestię pewnego konfliktu pomiędzy poglądami Tarskiego a jego praktyką badawczą, zauważmy, że ta pronominalistyczna postawa Tarskiego znajduje potwierdzenie w różnych źródłach. Zacznijmy od uwagi uczynionej przez Tarskiego (i zachowanej na taśmie magnetofonowej) podczas sympozjum zorganizowanego przez Association for Symbolic Logic oraz American Philosophical Association, które odbyło się w Chicago 29–30 kwietnia 1965 roku, a było poświęcone implikacjom filozoficznym twierdzeń Gödla o niezupełności. Powiedział on wtedy:

> Okazuję się dużo bardziej skrajnym antyplatonikiem. [...] Reprezentuję jednak ten surowy, naiwny rodzaj antyplatonizmu, który określiłbym jako materializm albo nominalizm z pewną skazą materialistyczną. Bardzo trudno jest żyć, wyznając przez cały czas taką postawę filozoficzną, szczególnie jeśli jest się matematykiem, a zwłaszcza gdy z jakichś powodów ma się hobby zwane teorią mnogości[72] (Feferman i Feferman 2004, s. 52).

W książce Fefermanów (2004) znajdujemy więcej podobnych słów, czy to samego Tarskiego, czy innych o Tarskim – są to opinie wypowiedziane podczas obchodów siedemdziesiątych urodzin Tarskiego, zapamiętane przez Chiharę, Chateaubrianda i samych Fefermanów:

> Jestem nominalistą. Jestem o tym głęboko przekonany. W istocie tak głęboko, że nawet po mojej trzeciej reinkarnacji nadal będę nominalistą. [...] Ludzie pytają mnie „Jak ty, nominalista, możesz zajmować się teorią mnogości i logiką, które są teoriami na temat obiektów, w które ty nie wierzysz?" ... Uważam, że nawet bajka jest wartościowa[73].

---

72 "I happen to be, you know, a much more extreme anti-Platonist. [...] However, I represent this very [c]rude, naive kind of anti-Platonism, one thing which I would describe as materialism, or nominalism with some materialistic taint, and it is very difficult for a man to live his whole life with this philosophical attitude, especially if he is a mathematician, especially if for some reasons he has a hobby which is called set theory".

73 "I am a nominalist. This is a very deep conviction of mine. It is so deep, indeed, that even after my third reincarnation, I will still be a nominalist. [...] People have asked me, »How can you, a nominalist, do work in set theory and logic,

> [Jestem] udręczonym nominalistą[74].
>
> Gdzie indziej Tarski powiedział wyraźniej, że podpisuje się pod reizmem czy konkretyzmem (rodzaj fizykalistycznego nominalizmu) swego nauczyciela Tadeusza Kotarbińskiego[75] (2004, s. 52).

Więcej o nominalistycznych sympatiach i skłonnościach Tarskiego można powiedzieć na podstawie niedawno odkrytych protokołów Carnapa z dyskusji prowadzonych na Uniwersytecie Harvarda w roku akademickim 1940/1941. Uczestniczyli w nich oprócz Carnapa także Tarski i Quine oraz – okazjonalnie – Russell.

Pod datą 10 stycznia 1941 roku Carnap zanotował następujące uwagi na temat nominalizmu i finityzmu:

> Tarski: W gruncie rzeczy rozumiem tylko język, który spełnia następujące warunki:
> 1. *Skończona* liczba indywiduów.
> 2. *Realistyczny* (Kotarbiński): Indywidua są rzeczami fizycznymi.
> 3. Nieplatoński: Występują tylko zmienne indywiduowe (rzeczy), nie [ma zmiennych] dla uniwersaliów (klasy itd.)[76] (Mancosu 2005, s. 342).

Mancosu zauważa (2005, s. 343), że występuje tu błąd: zamiast „realistyczny" powinno być „reistyczny". Potwierdza to przywołanie Kotarbińskiego.

W zapiskach Carnapa znajdujemy też następującą wymianę zdań:

> Ja [Carnap]: Powinniśmy konstruować język nauki z czy bez typów?
>
> On [Tarski]: Być może okaże się coś zupełnie innego. Należałoby sobie życzyć, a może i przypuszczać, że cała ogólna teoria mnogości, choć jest tak piękna, zniknie w przyszłości. Wraz z wyższymi typami zaczyna

---

which are theories about things you do not believe in?« ... I believe that there is a value even in fairy tales".

74 "[I am] a tortured nominalist".

75 "Elsewhere Tarski has said more specifically that he subscribed to reism or concretism (a kind of physicalistic nominalism) of his teacher Tadeusz Kotarbiński".

76 „Tarski: Ich verstehe im Grunde nur eine Sprache die folgende Bedingungen erfüllt: [1] *Finite* Anzahl der Individuen; [2] *Realistisch* (Kotarbiński): Die Individuen sind physikalische Dinge; [3] Nicht-platonisch: Es kommen nur Variable für Individuen (Dinge) vor, nicht für Universalien (Klassen usw.)".

> sie platonizm. Tendencje Chwistka i innych („nominalizm"), by mówić tylko o tym, co może być nazwane, są zdrowe. Problemem jest tylko znalezienie dobrej implementacji[77] (2005, s. 334).

Interesujące – w kontekście problemu przejścia od systemów teorii typów do systemów bez typów – jest także streszczenie Carnapa rozmowy z Tarskim z 12 lutego 1941 roku:

> *Logicy warszawscy*, a zwłaszcza Leśniewski i Kotarbiński, postrzegali w sposób całkiem oczywisty system taki jak PM [= Principia Mathematica – uwaga moja, R.M.] (ale z prostą teorią typów) jako wzorzec systemów. To ograniczenie wpłynęło silnie na wszystkich uczniów; także na T[arskiego] aż do *Pojęcia prawdy* (gdzie nie rozważa się ani systemu z typami pozaskończonymi, ani systemu bez typów i gdzie milcząco zakłada się skończoność typów; dyskutuje się je dopiero w dołączonym później dodatku). Wtedy jednak T[arski] zdał sobie sprawę, że w *teorii mnogości* stosuje się z wielkim powodzeniem system całkiem innego kształtu. W ten sposób doszedł w końcu do tego, iż uznał systemy bez typów za naturalniejsze i prostsze[78] (2005, s. 335).

O tym, jak ważny był nominalizm dla Tarskiego, świadczy jego list do Woodgera z 21 listopada 1948 roku. Pisał w nim:

---

77 „Ich: Sollen wir vielleicht die Sprache der Wissenschaften mit oder ohne Typen machen? Er: Vielleicht wird sich etwas ganz Anderes entwickeln. Es wäre zu wünschen und vielleicht zu vermuten, dass die ganze allgemeine Mengenlehre, so schön sie auch ist, in der Zukunft verschwinden wird. Mit den höheren Stufen fängt der Platonismus an. Die Tendenzen von Chwistek und anderen (»Nominalismus«), nur über Bezeichenbaren zu sprechen, sind gesund. Problem nur, wie gute Durchführung zu finden".

78 „*Die Warschauer Logiker,* besonders Leśniewski und Kotarbiński, sahen ein System wie PM (aber mit einfacher Typentheorie) ganz selbstverständlich als die Systemform an. Diese Beschränkung wirkte stark suggestiv auf alle Schüler; auf T. selbst noch bis zu »Wahrheitsbegriff« (wo weder transfinite Stufen noch stufenloses System betrachtet wird, und Endlichkeit der Stufen stillschweigend vorausgesetzt wird, erst im später hinzugefügten Anhang werden sie besprochen). Dann aber sah T., dass in der *Mengenlehre* mit grossem Erfolg eine ganz andere Systemform verwendet wird. So kam er schliesslich dazu, diese stufenlose Systemform als natürlicher und einfacher zu sehen".

> Problem zbudowania logiki i matematyki nominalistycznej interesuje mnie mocno od wielu, wielu lat. Matematyka – co najmniej tak zwana matematyka klasyczna – jest obecnie nieodzownym narzędziem w badaniach naukowych prowadzonych w naukach empirycznych. Głównym problemem dla mnie jest to, czy narzędzie to daje się zinterpretować nominalistycznie lub czy może być zastąpione przez inne narzędzie nominalistyczne adekwatne względem wspomnianych celów[79] (Mancosu 2009, s. 147).

Warto dodać, że Tarski przy wielu okazjach podkreślał wyraźnie swoje sympatie dla reizmu Kotarbińskiego i dla fizykalizmu. Przetłumaczył też na angielski (razem z Davidem Ryninem) pracę Kotarbińskiego „Zasadnicze myśli pansomatyzmu" (1935). Tłumaczenie zostało opublikowane w *Mind* – jednym z najważniejszych angielskich czasopism filozoficznych. Zostało ono także włączone do *Collected Works* Tarskiego (1986b)[80].

Wyżej wskazywaliśmy na fakt, że praktyka badawcza Tarskiego, w szczególności jego badania w zakresie teorii mnogości czy teorii modeli stały w pewnej sprzeczności z jego nominalizmem – sugerowałyby one raczej, że był on platonikiem. Powstaje pytanie, jak wyjaśnić tę rozbieżność. Otóż wynikało to z ducha i kanonu ideowego polskiej szkoły matematycznej[81]. Według nich badania naukowe nie powinny być krępowane żadnymi apriorycznymi założeniami filozoficznymi. Powinno się stosować dowolne – byle poprawne – metody badawcze, a przekonania i poglądy filozoficzne są prywatną sprawą badacza i nie powinny mieć żadnego wpływu na jego badania matematyczne. Zgodnie z tym, Tarski mógł „prywatnie" czuć się nominalistą, a jednocześnie bez skrępowania i niepokojów o niezgod-

---

[79] "The problem of constructing nominalistic logic and mathematics has intensively interested me for many-many years. Mathematics – at least the so-called classical mathematics – is at present an indispensable tool for scientific research in empirical sciences. The main problem for me is whether this tool can be interpreted nominalistically or replaced by another nominalistic tool which should be adequate for the same purposes".

[80] Świadczy to też o tym, jak silnie Kotarbiński wpłynął na Tarskiego.

[81] Por. uwagi Sierpińskiego na temat aksjomatu wyboru na końcu paragrafu 1 w rozdziale 2.

ność z tą doktryną stosować w swoich badaniach metamatematycznych metody infinitystyczne.

7. Andrzej Mostowski

Twórczość naukowa Andrzeja Mostowskiego należy zasadniczo do okresu po II wojnie światowej. Włączamy go jednak do niniejszego opracowania poświęconego filozofii matematyki w Polsce w okresie międzywojennym, ponieważ źródła jego prac, a w szczególności jego poglądów filozoficznych na logikę i matematykę, które nas tu interesują, kształtowały się w okresie przedwojennym. Możemy go zaliczyć do drugiego pokolenia szkoły lwowsko-warszawskiej – był przecież uczniem Tarskiego.

Pobierając nauki u wspomnianego filozofa, Mostowski przejął od niego ogólne poglądy filozoficzne, w szczególności skłonność ku empiryzmowi i wyraźny szacunek, jakim darzył nominalizm. Wydaje się, że sympatyzował też z reizmem Kotarbińskiego, czyli z poglądem, że istnieją tylko indywidualne rzeczy cielesne.

Sympatyzując z nominalizmem, Mostowski w swoich badaniach naukowych nad logiką i podstawami matematyki był wierny wspomnianym już przez nas zasadom, którym hołdowali polscy matematycy:

1) wszelkie powszechnie akceptowane metody matematyczne winny być stosowane w badanich metamatematycznych,

2) badania metamatematyczne nie powinny być ograniczane przez żadne przyjęte *a priori* założenia filozoficzne.

W związku z tym swobodnie stosował na przykład metody infinitystyczne, co powodowało pewne napięcie – podobnie jak w przypadku Tarskiego (por. paragraf 6 w rozdziale 3). To, co Mostowski pisał o swym nauczycielu (1967c, s. 81; por. s. 150), można odnieść i do niego samego. Wydaje się, że Mostowski czuł się bardziej zobligowany do obszerniejszego i bardziej systematycznego zajęcia się problemami filozoficznymi związanymi z matematyką i logiką.

Miało to źródło w przekonaniu, któremu dał wyraz we wstępie do *Logiki matematycznej*[82]:

> Trzecia wreszcie trudność pochodzi stąd, że nie potrafimy pozbawić logiki (jakkolwiek bądź byłaby ona formalna) pewnego choćby podświadomego podkładu filozoficznego, którego wybór świadomy jest tym trudniejszy, że – w obecnym stanie dyskusji nad podstawami matematyki – nie można z całą pewnością powiedzieć, który z wielu ścierających się ze sobą poglądów jest najlepszy albo chociażby dobry (1948, s. IV).

Jest to jedna z trudności, jakie zdaniem Mostowskiego trzeba przezwyciężyć, pisząc książkę z logiki matematycznej – trudności tego rodzaju „nie spotyka się przy opracowywaniu dzieł z klasycznych działów matematyki" (1948, s. III). Uważał też, że wybór odpowiedniego poglądu wykracza poza samą logikę jako taką. Siedemnaście lat później pisał w pracy *Thirty Years of Foundational Studies. Lectures on the Development of Mathematical Logic and the Study of the Foundations of Mathematics in 1930–1964*:

> Widzimy, że spór między platonikami, formalistami i intuicjonistami jest dziś tak samo nierozstrzygnięty, jak był pięćdziesiąt lat temu[83] (1965, s. 149).

W związku z tymi trudnościami Mostowski świadomie unika w tekstach logicznych i matematycznych wyraźnych deklaracji filozoficznych. W *Logice matematycznej* pisze:

> Co do trzeciej trudności, związanej z zajęciem określonego stanowiska filozoficznego w zakresie podstaw matematyki, to celowo unikam

---

[82] Ten znakomity podręcznik został opublikowany niestety tylko po polsku, choć planowano wydanie tłumaczenia angielskiego. Świadczy o tym fakt, że na okładce wydanej w roku 1952 książki Mostowskiego i Kuratowskiego *Teoria mnogości* (1952) zaanonsowano tytuł *Mathematical Logic* autorstwa Mostowskiego jako książkę w przygotowaniu. Planów tych jednak nigdy nie zrealizowano.

[83] "We see that the issue between Platonists, formalists and intuitionists is as undecided to-day as it was fifty years ago".

> poruszania tych zagadnień w tekście, gdyż wykraczają one oczywiście poza ramy logiki formalnej. System logiczny potraktowałem jako język, w którym mówi się o zbiorach i relacjach. Przyjąłem dla tych tworów pewnik ekstensjonalności i uznałem, że podlegają one zasadom, znanym pod nazwą prostej teorii typów. Stanowisko takie jest dogodną podstawą do rozwinięcia zagadnień formalnych i pokrywa się z mniej lub więcej uświadomionym stanowiskiem większości matematyków – co zresztą nie znaczy, by musiało być uznane bez zastrzeżeń przez filozofów (1948, s. VI).

Przytoczony fragment sugeruje pewne pokrewieństwo poglądów Mostowskiego i Leśniewskiego, które podzielał też Tarski, a znane są pod nazwą „formalizmu intuicyjnego". Zgodnie z nimi matematyka nie jest zbiorem czysto formalnych gier, ponieważ używa ona języków wyposażonych w pewne znaczenia, choć sformalizowanych. Być może wyjaśnia to też, dlaczego Mostowski nie był nigdy szczególnym entuzjastą Hilbertowskiego formalizmu.

Pewne założenie filozoficzne na temat badanych systemów logicznych Mostowski przyjmuje także w pracy „A Classification of Logical Systems" (1949–1950). Deklarując wyraźnie już na samym początku, że „zarówno sam temat, jak i metoda jego prezentacji będą miały raczej charakter matematyczny, a nie filozoficzny"[84] (1949–1950, s. 245), stwierdza wyraźnie, że:

> Choć nasze badania będą czysto formalne, przyjmujemy jednak pewien określony filozoficzny punkt widzenia w stosunku do systemów logicznych. Nie będziemy traktowali systemów logicznych jako pustych schematów pozbawionych jakiejkolwiek interpretacji. Przeciwnie, będziemy zakładali obiektywne istnienie pewnego rodzaju „rzeczywistości matematycznej" (na przykład zbioru wszystkich liczb całkowitych czy zbioru wszystkich liczb rzeczywistych). Przez obiektywne istnienie rozumiemy tu istnienie niezależne od jakichkolwiek konstrukcji językowych[85] (1949–1950, s. 246–247).

---

84 "The subject itself as well as the method of its presentation will be of a mathematical rather than philosophical character".

85 "Although our investigations will be purely formal we shall nevertheless accept a definitive philosophical point of view with respect to logical systems. We shall

Zadaniem systemów logicznych i matematycznych jest – zdaniem Mostowskiego – opisanie tej „rzeczywistości matematycznej". W konsekwencji każde zdanie logiki jest wyposażone w pewne znaczenie – mówi ono mianowicie, że rzeczywistości matematycznej przysługuje ta czy inna własność. Jeśli w istocie rzeczywistość matematyczna ma daną własność, to wtedy zdanie owo będzie prawdziwe, jeśli zaś nie – to będzie fałszywe. Intuicje związane z tymi ostatnimi pojęciami mogą być sprecyzowane za pomocą metod, których dostarcza teoria prawdy Tarskiego. Przy tym fakt istnienia zdań, które są prawdziwe, ale niedowodliwe w określonym systemie można wyjaśnić tym, że własności owej „rzeczywistości matematycznej" są bardziej złożone niż własności, które można wydedukować z aksjomatów za pomocą przyjętych reguł wnioskowania. Mostowski kończy swoje uwagi wstępne w charakterystyczny sposób, pisząc:

> Nie zamierzamy bronić ani filozoficznej poprawności, ani nawet filozoficznej akceptowalności przyjętego tu punktu widzenia. Jest w pełni oczywiste, że jest on całkowicie przeciwny nominalizmowi i tendencjom pokrewnym[86] (1949–1950, s. 247).

Wyraźnie widać tu owo napięcie pomiędzy wspomnianymi wyżej skłonnościami Mostowskiego ku nominalizmowi a konkretnymi badaniami logicznymi i matematycznymi.

To samo przekonanie o wadze i znaczeniu pytań filozoficznych znajdziemy także we wstępie do napisanej razem z Kazimierzem Kuratowskim monografii pt. *Teoria mnogości* (por. Kuratowski, Mostowski 1952)[87]. Rozważając rozwój teorii mnogości, autorzy piszą, że jedną z podstawowych kwestii, które muszą zostać rozważone

---

not consider logical systems as void schemata deprived of any interpretation. On the contrary we shall assume the objective existence of a kind of »mathematical reality« (e.g. of the set of all integers or the set of all real numbers). By objective existence we mean existence independently of all linguistic constructions".

86 "We do not intend to defend the philosophical correctness or even the philosophical acceptability of the point of view here described. It is evident that it is entirely opposite to the point of view of nominalism and related trends".

87 Rozważane uwagi zostały powtórzone w drugim i trzecim wydaniu monografii.

w podstawach tej teorii, jest problem, na jakich aksjomatach powinna być oparta teoria zbiorów. Powinno się wybrać takie aksjomaty, które gwarantują, że oparta na nich teoria będzie miała „istotną wartość naukową, tj. żeby mogła służyć do poznania świata materialnego, czy to bezpośrednio, czy też za pośrednictwem innych działów matematyki, dla których jest narzędziem" (1952, s. V). Dochodzą więc do wniosku, że:

> Nie jest też dotychczas przeprowadzona wszechstronna dyskusja filozoficzna podstawowych założeń teorii mnogości. Zagadnienie, czy i do jakiego stopnia bliski jest związek pojęć abstrakcyjnej teorii mnogości (a zwłaszcza tych jej działów, w których jest mowa o zbiorach bardzo wysokiej mocy) z podstawowymi pojęciami matematycznymi bezpośrednio związanymi z praktyką, nie jest dotąd wyjaśnione. Potrzeba takiej analizy jest tym większa, że u twórcy teorii mnogości – Cantora – podstawowe pojęcia tej teorii były owiane duchem mistycyzmu (1952, s. VI).

Z drugiej strony autorzy są przekonani, że znaczenie teorii mnogości dla podstaw matematyki ujawniło się także w związku z pewnymi problemami związanymi z filozofią matematyki. Piszą:

> W tej dziedzinie wpływ teorii mnogości daje się szczególnie silnie odczuć. Tak na przykład, dzięki zdefiniowaniu zbioru skończonego i wprowadzeniu liczb kardynalnych ugruntowano na mocnych podstawach arytmetykę liczb naturalnych. Równocześnie powstała nowa należycie sprecyzowana problematyka matematyczna związana z ogólnym pojęciem zbioru nieskończonego. Pojęcie to nie ma dziś już nic w sobie z charakteru mistycznego, którym przez stulecia było obarczone (1952, s. VII).

Kuratowski i Mostowski deklarują też, że najistotniejszą cechą teorii mnogości jest fakt, że dostarcza ona *narzędzia* innym działom matematyki bezpośrednio związanym z zastosowaniami.

Tyle uwag natury filozoficznej zawarli autorzy we wstępie. We właściwej części książki, gdzie mamy wykład teorii mnogości, nie znajdziemy już żadnych uwag filozoficznych! Co więcej, mając świadomość kontrowersyjnego charakteru niektórych aksjomatów teoriomnogościowych – w szczególności aksjomatu wyboru – z jednej strony, a ich wagi i znaczenia dla matematyki z drugiej, autorzy przyjmują aksjomat wyboru, ale za każdym razem, kiedy go stosują w dowodzie jakiegoś twierdzenia, wyraźnie zaznaczają ten fakt (opatrując odnośne twierdzenie małym kółeczkiem °)[88]. W ten sposób Kuratowski i Mostowski podążają drogą charakterystyczną dla matematyków polskich, na którą to drogę zwracaliśmy już uwagę wyżej (por. na przykład paragraf 1 w rozdziale 2). Zgodnie z nią należy wyraźnie oddzielić filozofię aksjomatu wyboru (i innych aksjomatów o podobnym charakterze) od jego roli w matematyce. Zgrabnie wyraził to Sierpiński, który pisał (por. paragraf 1 w rozdziale 2):

> Niezależnie od naszych osobistych poglądów na temat aksjomatu wyboru należy uwzględnić rolę, jaką odgrywa on w teorii mnogości i w analizie. Z drugiej strony, ponieważ aksjomat wyboru jest podważany przez niektórych matematyków, ważne jest, by wiedzieć, których twierdzeń dowodzi się z jego pomocą i w którym dokładnie miejscu dowodu jest on stosowany; często się bowiem zdarza, że rozmaici autorzy stosują ten aksjomat, nie zdając sobie z tego sprawy. Nawet gdyby nikt nie kwestionował aksjomatu wyboru, byłoby interesujące zbadać, które dowody są na nim oparte, a które twierdzenia można udowodnić bez niego – to samo odnosi się zresztą i do innych aksjomatów[89] (1965, s. 95).

---

88 Piszą: „Aby uwidocznić rolę aksjomatu wyboru, zaznaczyliśmy kółeczkiem ° te twierdzenia, w których dowodzie pewnik jest użyty. Nadto dodaliśmy liczne jego zastosowania [...] oraz uwagi, dotyczące roli aksjomatu wyboru w poszczególnych dowodach; wreszcie uzupełniliśmy nasz wykład dodatkiem, w którym przedstawiony jest jeden z najbardziej paradoksalnych wniosków, do których prowadzi aksjomat wyboru" (1952, s. IX).

89 "Still, apart from our personal inclination to accept the axiom of choice, we must take into consideration, in any case, its role in the set theory and in the calculus. On the other hand, since the axiom of choice has been questioned by some mathematicians, it is important to know which theorems are proved with its aid and to realize the exact point at which the proof has been based on the axiom of choice; for it has frequently happened that various authors have made use of the axiom of choice in their proofs without being aware of it. And after all, even if no-one questioned the axiom of choice, it would not be without interest to investigate which proofs are based on it and which theorems are proved without its aid – this, as we know, is also done with regards to other axioms".

Ta sama metoda oddzielania kółeczkiem twierdzeń zależnych od aksjomatu wyboru (w celu zilustrowania jego roli) została zastosowana także w angielskim przekładzie monografii Kuratowskiego i Mostowskiego (1969). Zauważmy przy okazji, że w przekładzie tym prawie zupełnie zostały pominięte uwagi filozoficzne na temat teorii mnogości i jej aksjomatyki, które mamy w wersji polskiej i które wyżej omówiliśmy[90]. Znajdujemy tam tylko następujące zdania:

> Ścisłe związki pomiędzy teorią mnogości a filozofią matematyki datują się od czasu dyskusji dotyczących natury antynomii i aksjomatyzacji teorii mnogości. Fundamentalne problemy filozofii matematyki takie jak sens [pojęcia] istnienia w matematyce, aksjomatyka a opis rzeczywistości, potrzeba dowodów niesprzeczności i środki dopuszczalne w takich dowodach nie zostały nigdy lepiej zilustrowane niż właśnie w tych dyskusjach[91] (1969, s. V).

Mostowski powracał do problemów filozoficznych teorii mnogości także później, zwłaszcza gdy komentował wyniki Paula J. Cohena dotyczące niezależności aksjomatu wyboru i hipotezy kontinuum od aksjomatów teorii mnogości Zermela–Fraenkla ZF (por. artykuły 1964, 1967a, 1967b, 1968). W (popularnych) pracach (1964) i (1968) do najważniejszych problemów filozofii matematyki Mostowski zalicza następujące pytania: (1) czym są zbiory i w jaki sposób możemy odkryć ich własności, (2) czym są w szczególności zbiory liczb rzeczywistych, (3) czy każdy zbiór można określić, podając własność jego elementów (i czy w konsekwencji można zbiór utożsamiać z tą własnością), czy też jest on jakimś obiektem abstrakcyjnym istnie-

---

90 Dodajmy, że żadnych uwag natury filozoficznej nie znajdziemy też w monografii Mostowskiego (1969) poświęconej zbiorom konstruowalnym i ich zastosowaniom.

91 "Close ties between set theory and philosophy of mathematics date back to discussions concerning the nature of antinomies and the axiomatization of set theory. The fundamental problems of philosophy of mathematics such as the meaning of existence in mathematics, axiomatics versus description of reality, the need of consistency proofs and means admissible in such proofs were never better illustrated than in these discussions".

jącym niezależnie od naszych konstrukcji myślowych? Dochodzi wówczas do następującego wniosku:

> Niestety problem prawdy w matematyce nie jest prosty. Powtórzmy jeszcze raz: Jeśli zbiory istniałyby w tym samym sensie jak obiekty fizyczne, moglibyśmy oczekiwać, że prawdziwość lub fałszywość hipotezy continuum zostanie w końcu odkryta. Jeśli jednak zbiory są tylko naszą własną konstrukcją myślową, odpowiedź na pytanie, czy hipoteza continuum jest prawdziwa, czy fałszywa może zależeć od tego, jakie konstrukcje przyjmiemy za dozwolone (1968, s. 177).

Ponieważ – według Mostowskiego – nic nie da się powiedzieć na temat dopuszczalności platonizmu w teorii mnogości, nie wiadomo więc, czy pytanie o prawdziwość względnie fałszywość hipotezy kontinuum ma w ogóle sens. Z drugiej strony problemy formalne dotyczące jej niesprzeczności czy niezależności od aksjomatów teorii mnogości są w najwyższym stopniu interesujące. Wyniki na temat niezależności aksjomatu wyboru i hipotezy kontinuum od ZF uzyskane przez Cohena (i uzupełniające wcześniejsze wyniki Kurta Gödla na temat niesprzeczności tych zdań) nie rozwiązują problemu prawdy w teorii mnogości. Co więcej, skoro aksjomat wyboru i hipoteza kontinuum nie mogą być rozstrzygnięte na podstawie akceptowanych aksjomatów teorii mnogości, można traktować ten fakt jako „jeden z najważniejszych argumentów przeciwko matematycznemu platonizmowi" (1968, s. 176). Sytuacja jest tu podobna do sytuacji w geometrii: aksjomatyczna teoria mnogości znajduje się obecnie w takiej samej sytuacji, w jakiej znajdowała się geometria aksjomatyczna po pracach Kleina i Poincarégo, które wskazały na rzeczywiste znaczenie problemu prawdziwości aksjomatu o równoległych. Po wynikach Cohena możliwe jest konstruowanie różnych wewnętrznie niesprzecznych, ale wzajemnie sprzecznych teorii mnogości. Jeśli teorie takie zostaną skonstruowane, to „będziemy musieli stwierdzić, że w meczu między platonizmem a formalizmem ten ostatni zdobył znowu jeden punkt" (1968, s. 182).

Inne źródło problemów dostrzega Mostowski także w doborze i akceptacji aksjomatów nieskończoności. W artykule „O niektórych nowych wynikach meta-matematycznych dotyczących teorii mnogości", pisał tak:

> Dowody niezależności aksjomatów nieskończoności są na ogół łatwe. Natomiast nie ma żadnej nadziei na uzyskanie dowodów ich względnej niesprzeczności. Drugie twierdzenie Gödla o niezupełności pokazuje, że dowód względnej niesprzeczności nie mógłby być formalnie przeprowadzony w teorii mnogości. Wobec tego, co powiedzieliśmy wyżej o rekonstrukcji matematyki w teorii mnogości, nie jest łatwo zdać sobie sprawę, jak wyglądałby taki nieformalizowalny dowód. Musimy więc stwierdzić, że nie ma racjonalnych podstaw do przyjmowania mocnych pewników nieskończoności (1967b, s. 103).

W artykule „Recent Results in Set Theory" (1967a) Mostowski dochodzi do mocniejszych w wymowie konkluzji. Mówi tam, że złożona i nie do końca jasna natura pojęcia zbioru i w konsekwencji możliwość różnych aksjomatyzacji teorii mnogości powoduje – niezależnie od tego, że teoria mnogości jest z matematycznego i filozoficznego punktu widzenia bardzo ważna – iż nie ma właściwie szans na to, by stała się ona centralną dyscypliną matematyczną. Z jednej strony większość (jeśli nie wszystkie) pojęć matematycznych można interpretować i definiować w teorii mnogości („co jest zjawiskiem godnym uwagi domagającym się oczywiście wyjaśnienia"[92] – jak pisze w 1967a, s. 83), z drugiej zaś „istnieje wiele istotnie różnych pojęć zbioru, które są równie dopuszczalne jako baza intuicyjna dla teorii mnogości"[93] (1967a, s. 82). Mostowski dochodzi do następującego wniosku:

> Jeśli istnieje wiele teorii mnogości, to oczywiście żadna z nich nie może domagać się centralnego miejsca w matematyce. Jedynie ich części wspólnej mogłaby przysługiwać taka pozycja; jest jednak dyskusyjne, czy taka część wspólna zawierać będzie wszystkie aksjomaty potrzebne do redukcji matematyki do teorii mnogości[94] (1967a, s. 94–95).

---

92 "[...] is a remarkable phenomenon which evidently calls for explanation".

93 "[...] there are several essentially different notions of set which are equally admissible as the intuitive basis for set theory".

94 "Of course if there are a multitude of set theories then none of them can claim

Potwierdza to i umacnia wątpliwości, jakie Mostowski sformułował w związku z aksjomatyzacją teorii mnogości w artykule „Współczesny stan badań nad podstawami matematyki" (1955b; por. też 1955a), gdzie pisał:

> Szczególnie niepokojącym i domagającym się wyjaśnienia jest fakt, że do aksjomatyki teorii mnogości dołączono w ubiegłych latach rozmaite nowe pewniki lub zmieniano sformułowania aksjomatów, wskutek czego mamy w tej chwili do wyboru bardzo liczne i istotnie między sobą różne aksjomatyki teorii mnogości, a nie mamy żadnych kryteriów, które wskazywałyby nam trafny wybór spośród tych wielu systemów (1955b, s. 29).

W podobnym duchu wyrażał się w pracy *Sets*:

> [...] sama niezupełność Z-F nie jest jako taka objawem alarmującym. Co jest niepokojące to nasza ignorancja, gdzie szukać dodatkowych informacji, które pozwolą nam rozwiązać problemy, które wydają się bardzo proste i naturalne, a których nie rozwiązują aksjomaty Z-F. Dochodzimy tu do fundamentalnych problemów filozofii matematyki, której podstawowe pytanie brzmi: o czym mówi matematyka? Formalista powiedziałby, że o niczym; że jest ona po prostu grą z arbitralnie wybranymi aksjomatami i regułami inferencji. Niezupełność Z-F nie jest zatem żadnym zmartwieniem dla formalisty. Platonicy z kolei wierzą w „obiektywne istnienie" przedmiotów matematyki. Platonik teoriomnogościowy wierzy zatem, że powinniśmy głębiej myśleć o zbiorach i eksperymentować na nich, aż w końcu odkryjemy nowe aksjomaty, które – dodane do Z-F, pozwolą nam rozwiązać wszystkie ważne problemy. [...] Niezależnie od tego, jaki będzie końcowy wynik tej walki pomiędzy tymi dwoma przeciwnymi tendencjami, jest oczywiste, że powinniśmy skoncentrować się na badaniu pojęć, które wydają się nam doskonale jasne i zrozumiałe. W czasach Cantora pojęcie dowolnego zbioru wydawało się bardzo jasne, ale antynomie pokazały, że takie nie jest. Dziś pojęcie to zostało zastąpione przez pojęcie dowolnego

---

the central place in mathematics. Only their common part could claim such a position; but it is debatable whether this common part will contain all the axioms needed for a reduction of mathematics to set theory".

> podzbioru danego zbioru. Dodatkowo przekonanie, że wszystkie podzbiory danego zbioru tworzą zbiór, jest prawie powszechnie akceptowane. Nie wszyscy jednak matematycy podzielają tę opinię. Nawet Gödel, którego [...] należy zaliczyć do platoników, wyraził kiedyś pogląd, iż pojęcie dowolnego podzbioru danego zbioru potrzebuje wyjaśnienia. [...] Autor niniejszych słów wierzy (choć nie jest w stanie przedstawić przekonujących racji za tym poglądem), że to właśnie w tym kierunku będzie podążać w przyszłości teoria mnogości[95] (1972b, s. 28–29).

Mostowski jest przekonany, że „ostateczne sformułowanie aksjomatyki teorii mnogości powinno być poprzedzone dyskusją nad zasadniczymi założeniami teorii, uwzględniającą przy tym stanowisko konstruktywne"[96] (1955a, s. 30).

---

[95] "[...] the mere incompleteness of Z-F is not an alarming symptom by itself. What is disturbing is our ignorance of where to look for additional information which would permit us to solve problems which seem very simple and natural but which are nevertheless left open by the axioms of Z-F. We come here very close to fundamental problems of the philosophy of mathematics whose basic question is: what is mathematics about? A formalist would say that it is about nothing; that it is just a game played with arbitrary selected axioms and rules of proof. The incompleteness of Z-F is thus of no concern for a formalist. Platonists on the contrary believe in the »objective existence« of mathematical objects. A set-theoretical Platonist believes therefore that we should continue to think more about sets and experiment with them until we finally discover new axioms which, added to Z-F, will permit us to solve all outstanding problems. [...] Whatever the final outcome of the fight between these two opposing trends will be, it is obvious that we should concentrate on the study of concepts which seem perfectly clear and perspicuous to us. In Cantor's time the concept of an arbitrary set seemed to be a very clear concept, but the antinomies proved that this was not so. Today, this concept has been replaced by that of an arbitrary subset of a given set. In addition, the belief that all subsets of a given set form a set is almost universally accepted. However, it is by no means true that these views are shared by all mathematicians. Even Gödel himself, who [...] should be counted among Platonists, has once expressed the view that the concept of an arbitrary subset of a given set is in need of clarification. [...] The present writer believes (although he cannot present convincing evidence to support this view) that it is in this direction where the future of set theory lies".

[96] Do tematu sympatii Mostowskiego do konstruktywizmu wrócimy w dalszej części wywodu.

Rozważał kwestie filozoficzne również w związku z twierdzeniami Gödla o niezupełności. Podobnie jak to było w przypadku teorii mnogości, wskazywał tylko na problemy filozoficzne związane z tymi twierdzeniami i pokazywał możliwe rozwiązania, ale unikał jakichkolwiek definitywnych deklaracji. Co więcej, wyrażone uwagi filozoficzne były zredukowane do minimum. Można je znaleźć w dwu miejscach: w artykule „O zdaniach nierozstrzygalnych w sformalizowanych systemach matematyki" (1946) i we wstępie[97] do książki *Sentences Undecidable in Formalized Arithmetic. An Exposition of the Theory of Kurt Gödel* (1957).

Mostowski deklaruje, że nie zamierza podejmować dyskusji nad kwestią filozoficzną, czy zdania, które są dziś nierozstrzygalne, są „istotnie nierozstrzygalne", czy też nie. Dostrzega tu zasadniczą trudność mającą swe źródło w braku precyzyjnego pojęcia poprawnego dowodu matematycznego. Pojęcie dowodu formalnego, które wprowadziła i bada logika matematyczna, umożliwiło konstrukcję i badanie systemów sformalizowanych. Żywimy przekonanie, iż systemy takie obejmują całą matematykę, tzn. że każde intuicyjnie poprawne wnioskowanie matematyczne można sformalizować w takim systemie. Ponieważ jednak nie można dowieść, że dany system sformalizowany pokrywa się z matematyką intuicyjną, więc „nie istnieje żaden bezpośredni związek między problemem zupełności danego zaproponowanego systemu sformalizowanego a problemem istnienia istotnie nierozstrzygalnych problemów matematycznych"[98] (1957, s. 3).

Ani w przytoczonym artykule, ani w przywoływanej książce nie znajdziemy żadnych dalszych dyskusji na temat konsekwencji twierdzeń Gödla o niezupełności dla epistemologii matematyki. Zarówno książka, jak i artykuł przynoszą jedynie techniczny wykład twierdzeń Gödla.

---

97 W przedmowie wyjaśniono, że wstęp ten jest prawie dosłownym tłumaczeniem fragmentów artykułu (1946).

98 "[...] there is no immediate connection between the problem of completeness of any proposed formal system and the problem of existence of essentially undecidable mathematical problems".

Twierdzenia Gödla o niezupełności, jak i twierdzenie Tarskiego o niedefiniowalności pojęcia prawdy były też źródłem pewnych ważnych (także filozoficznie) uwag Mostowskiego na temat związków między syntaksą i semantyką. Był on właściwie pierwszym, który jasno stwierdził, że semantyka wymaga metod infinitystycznych, podczas gdy metody finitarne są wystarczające dla syntaksy. Precyzyjne ujęcie różnic między syntaktycznym a semantycznym sformułowaniem twierdzeń o niezupełności było produktem ubocznym tej obserwacji i prowadziło do następującej ważnej konkluzji:

> Interpretacja języka jest zdefiniowana za pomocą pojęć teoriomnogościowych, co prowadzi do bliskich związków pomiędzy semantyką i teoriomnogościową, infinitystyczną filozofią matematyki, podczas gdy teoria obliczalności skłania się ku filozofii bardziej finitystycznej[99] (1965, s. 42).

Pewne uwagi natury filozoficznej – a nawet wyraźną deklarację – na temat związków pomiędzy praktyką badawczą matematyków a systemami sformalizowanymi można znaleźć w artykule Mostowskiego „Matematyka a logika" (1972a)[100]. Autor stwierdza tam, że:

> [...] pełna formalizacja matematyki jest w tej chwili hasłem już przebrzmiałym. Antynomie teorii mnogości nikogo już nie straszą. Matematyka, której przeważna część w ogóle nie ucierpiała z powodu „kryzysu podstaw", rozwija się dalej, nie bardzo dbając o to, co dzieje się w jej podstawach (1972a, s. 82).

I dodaje, że „dążenie do mechanizacji rozumowań matematycznych wydaje mi się czynnością wysoce zdehumanizowaną: jak napisał

99 "The interpretation of a language is defined by means of set-theoretical concepts, which gives rise to the close relations between semantics and the set-theoretical, infinitistic philosophy of mathematics; whereas the theory of computability leans toward a more finitistic philosophy".

100 Artykuł ten jest właściwie obszerną recenzją książki A. Grzegorczyka *Zarys arytmetyki teoretycznej,* ale zawiera wiele uwag natury ogólnej na temat logiki i matematyki.

kiedyś E.L. Post, istotą matematyki są pojęcia prawdy i znaczenia" (1972a, s. 84). Podkreśla, że:

> Dowód matematyczny jest czymś o wiele bardziej skomplikowanym niż proste następstwo elementarnych prawideł zawartych w tzw. regułach wnioskowania [...]. Dlatego niezbędny jest umiar w podkreślaniu roli praw logicznych w dowodach: jeśli będziemy zbyt usilnie tę rolę podkreślali, zamienimy wykład matematyczny na coś zbliżonego do systemu sformalizowanego, a systemy takie [...] nie mają już dziś znaczenia i tylko odstraszają większość słuchaczy od matematyki (1972a, s. 83–84).

Z drugiej strony, choć stary program formalizacji matematyki został praktycznie porzucony, to „współpraca logiki i matematyki była owocna i zapewne nadal będzie przynosić ważne rezultaty" (1972a, s. 83).

Uwagi filozoficzne były punktem wyjścia serii wykładów, w których Mostowski „naszkicował rozwój logiki matematycznej i badań nad podstawami matematyki w latach 1930–1964"[101] (1965, s. 7). Wygłosił je podczas Szkoły Letniej w Vaasa w Finlandii w roku 1964, a opublikował w formie książki pt. *Thirty Years of Foundational Studies* (1965). Ów cykl wykładów rozpoczął od przypomnienia trzech prądów współczesnej filozofii matematyki, które dominowały w latach 20. i 30. XX wieku, a mianowicie logicyzmu, intuicjonizmu i formalizmu. Podkreślił, że przyczyniły się one do ukształtowania się trzech kierunków w badaniach logiczno-matematycznych: konstruktywizmu, kierunku metamatematycznego i kierunku teoriomnogościowego. Jako początek wymienionych „szkół myślenia" w logice matematycznej można traktować, odpowiednio, pracę Heytinga z roku 1930 – podał w niej aksjomatyzację logiki intuicjonistycznej, rozprawę Gödla z 1931 roku, w której dowiódł twierdzeń o niezupełności, oraz pracę Tarskiego z roku 1933, w której zamieścił definicję pojęcia spełniania i prawdziwości. Badania konstruktywistyczne koncentrują się na różnych formalnych (matematycznych) konstrukcjach pojęciowych i związkach logicznych między

[101] "[...] sketch[ed] the development of mathematical logic and of the study of foundations of mathematics in the years 1930–1964".

nimi. Badania w nurcie metamatematycznym poświęcone są głównie związkom logicznym „wewnątrz" systemów aksjomatycznych oraz własnościom logicznym takich systemów. W nurcie teoriomnogościowym bada się semantyczne własności wyrażeń języków formalnych.

W kolejnych wykładach Mostowski nie podejmuje już żadnych dyskusji natury filozoficznej – czyni co najwyżej pewne sceptyczne uwagi. Z opinii, które formułuje na marginesie głównych rozważań, wynika, że według niego zasadniczym problemem, który czeka na rozwiązanie w filozofii matematyki, są podstawy teorii mnogości i kwestia genezy pojęć matematycznych oraz problem praw rządzących rozwojem matematyki.

Te dwa ostatnie zagadnienia Mostowski rozważał już we wcześniejszej pracy „Współczesny stan badań nad podstawami matematyki" (por. 1955a i 1955b)[102]. Mimo iż autor już we wstępie deklaruje, że ogranicza się „do problematyki czysto matematycznej, tj. takiej, która jest związana z pojęciami lub metodami specyficznymi dla matematyki" (1955b, s. 13), to w artykule można znaleźć wiele uwag filozoficznych. Niestety czas jej powstania rodzi problemy i nasuwa pytania interpretacyjne. Otóż praca powstała w połowie lat 50. i atmosfera ideologiczna tego okresu mogła mieć wpływ na pewne użyte w niej sformułowania i głoszone tezy. Nie sposób teraz rozstrzygnąć, w jakim stopniu czynniki pozamerytoryczne wpłynęły na autora. Z drugiej strony autor mógł przecież ograniczyć się do spraw czysto matematycznych i w ten sposób uniknąć konieczności formułowania tez filozoficznych. Skoro tego nie uczynił, mamy prawo traktować jego słowa i uwagi jako wyraz autentycznych przekonań.

Mostowski zaczyna od sformułowania następujących dwóch ogólnych problemów dotyczących całej matematyki, do postawienia których doprowadziły dyskusje nad podstawami teorii zbiorów, związane przede wszystkim z faktem odkrycia antynomii:

---

[102] Obie te prace to, odpowiednio, angielska i polska wersja tego samego tekstu. Wygłosił go Mostowski (w formie skróconej) na VIII Kongresie Matematyków Polskich, który odbywał się w Warszawie 6–12 września 1953 roku. Główne tezy wystąpienia Mostowskiego zostały opublikowane także w krótkim raporcie (1954).

> A. Jaka jest natura pojęć rozpatrywanych w matematyce? W jakim stopniu są one konstruowane przez człowieka, a w jakim narzucone z zewnątrz i skąd czerpiemy wiedzę o ich własnościach?
>
> B. Jaka jest natura dowodów matematycznych i jakie są kryteria pozwalające odróżniać dowody poprawne od błędnych (1955b, s. 13).

Zaznacza przy tym od razu, że:

> Zagadnienia te mają charakter filozoficzny i nie należy przypuszczać, żeby dały się one rozwiązać w obrębie samej matematyki i przy użyciu tylko metod matematycznych. Na tle tych ogólnych zagadnień rozwinęły się jednak bardziej specjalne problemy, dostępne już badaniu matematycznemu [...] (1955b, s. 13).

Wśród tych ostatnich Mostowski wymienia: (1) metodę aksjomatyczną, jej rolę i granice jej stosowalności, (2) prądy konstruktywne w matematyce, (3) aksjomatyzację logiki i wreszcie (4) problemy rozstrzygalności.

Próbując – na przykładzie liczb naturalnych – odpowiedzieć na ogólne pytanie, czy można traktować przedmioty matematyki jako obiekty w pełni określone przez stosowne układy aksjomatów, Mostowski stwierdza przede wszystkim, że decyzja należy tu nie do matematyki, ale do filozofii i dochodzi do następującego wniosku:

> Jedynym konsekwentnym stanowiskiem zgodnym zarówno ze zdrowym rozsądkiem, jak i z tradycją matematyczną jest przyjęcie, że źródłem i ostatecznym *raison d'être* pojęcia liczby zarówno naturalnej, jak i rzeczywistej jest doświadczenie i stosowalność praktyczna. To samo odnosi się do pojęć teorii mnogości, o ile rozpatrujemy je w dość wąskim zakresie – takim, w jakim są one potrzebne w klasycznych działach matematyki.
>
> Przyjmując to stanowisko, musimy wyciągnąć konsekwencję, że jest tylko jedna arytmetyka liczb naturalnych, jedna arytmetyka liczb rzeczywistych i jedna teoria mnogości, a wobec tego *definiowanie* tych działów matematyki przez aksjomaty, które mają raz na zawsze ustalić ich zakres i ich treść, nie jest możliwe (1955b, s. 25).

Systemy aksjomatyczne pozwalają nam na systematyzację pewnych fragmentów teorii, a mianowicie tych, które obejmują naszą aktualną wiedzę. Ułatwiają ponadto czasami wykład danej teorii i stąd mają wartość dydaktyczną. Mostowski dodaje:

> Filozofia materialistyczna od dawna występowała przeciw tym próbom, wykazując idealistyczny charakter idei Hilberta, polegającej na określaniu treści matematyki przez podanie jej aksjomatów, jak również koncepcji neopozytywistycznych, polegających na wyjaśnianiu treści matematyki przez analizę języka (1955b, s. 25–26).

Wyniki Gödla o niezupełności dowodzące, że nie można w pełni scharakteryzować liczb naturalnych przez układ aksjomatów oraz że istnieją nieizomorficzne modele arytmetyki, nie powinny jednak prowadzić do pesymistycznych wniosków, ponieważ dostarczają one narzędzi, za pomocą których można uzyskać szereg wyników na temat niezależności pewnych zadań od stosownych układów aksjomatów.

Podobne, a nawet znacznie trudniejsze problemy powstają w podstawach teorii mnogości. Tu główną trudność stanowi nieokreśloność pojęcia dowolnego zbioru, jak również status takich aksjomatów jak na przykład aksjomat wyboru.

Rozważaną pracę Mostowski kończy pewnymi ogólnymi uwagami dotyczącymi problemu podstaw matematyki zarówno w sensie matematycznym, jak i filozoficznym. Pisze tam:

> Zagadnienie podstaw matematyki nie jest jednym konkretnym zagadnieniem matematycznym, które można raz rozwiązać i potem już o nim zapomnieć. Rozważania na temat podstaw nauki są równie dawne jak sama nauka, a matematyka nie jest od tej reguły wyjątkiem. Istota i treść matematyki od wielu wieków była przedmiotem rozważań filozofów i pozostanie tak niewątpliwie w przyszłości. Przy tym matematyka sama zmienia się z biegiem czasu, co pociąga za sobą potrzebę zmiany poglądów na jej podstawy.
>
> [...] Wyjaśnienie natury matematyki nie należy do matematyki, lecz do filozofii i jest możliwe tylko w ramach szerokiego poglądu filozoficznego, nie traktującego matematyki w oderwaniu od reszty nauki,

> lecz uwzględniającego jej przyrodniczą genezę, zastosowania, związki z innymi naukami i wreszcie jej historię (1955b, s. 50).

Badania nad podstawami matematyki prowadzone za pomocą metod matematycznych wywierają rzecz jasna wpływ na ukształtowanie się takiego szerokiego poglądu filozoficznego. Zdaniem Mostowskiego wyniki uzyskane w ramach tych badań:

> [...] potwierdzają [...] tezę filozofii materialistycznej głoszącą, że matematyka jest w ostatecznej instancji nauką przyrodniczą, że jej pojęcia i metody mają swe źródło w doświadczeniu i że próby ugruntowania matematyki, nie uwzględniające jej przyrodniczej genezy, są skazane na niepowodzenie (1955b, s. 51).

Widzimy więc, że Mostowski reprezentuje tu stanowisko empiryczne w zakresie filozofii matematyki. Jak wspomnieliśmy już wyżej, nie jest do końca jasne, jaki wpływ na jego poglądy i na przytoczone sformułowania wywarły pozamerytoryczne czynniki związane z panującą wówczas i narzucaną społeczeństwu ideologią. Specyficzne sformułowania używające określonych pojęć charakterystycznych dla tamtej ideologii mogą sugerować taki wpływ. Być może była to cena, jaką autor musiał zapłacić oficjalnie lansowanej filozofii. Z drugiej strony warto zauważyć, że prądy empiryczne (czy *quasi*-empiryczne) są coraz to żywsze w filozofii matematyki, poczynając od lat 60. ubiegłego wieku.

Tezę o empirycznych źródłach pojęć matematycznych powtórzył Mostowski w popularnej pracy „O tzw. konstruktywnych poglądach w dziedzinie podstaw matematyki”[103]:

> Nie ulega żadnej wątpliwości, że wszystkie pojęcia matematyczne powstały przez abstrakcję z pojęć ukształtowanych na podstawie bezpośredniego doświadczenia (1953, s. 231).

---

[103] Wzięcie pod uwagę okresu, w jakim powstał ten artykuł, może być źródłem problemów interpretacyjnych podobnych do tych, które pojawiły się w przypadku prac (1955a) i (1955b) omawianych wyżej.

Dodaje jednak, że stwierdzenie to nie jest wystarczające i że proces abstrakcji wymaga głębszej analizy.

Mostowski przyznawał, że konstruktywizm (w szczególności jego cel, ale niekoniecznie proponowane rozwiązania) żywo go interesował (por. 1959, s. 192). Wierzył nawet kiedyś, że to właśnie ten kierunek będzie w matematyce fundamentalny. W *Logice matematycznej* pisał:

> Jestem skłonny mniemać, że zadowalające rozstrzygnięcie zagadnienia podstaw matematyki nastąpi na drodze wskazanej przez konstruktywizm lub kierunek do niego zbliżony. Na tej jednak podstawie nie można by już teraz napisać podręcznika logiki (1948, s. VI).

To przekonanie miało swe źródło w fakcie, iż:

> [...] chce on [tzn. konstruktywizm – uwaga moja, R.M.] wniknąć w naturę obiektów matematycznych i znaleźć uzasadnienie dla ogólnych praw nimi rządzących, podczas gdy platonizm bierze te prawa za dane bez jakichkolwiek dalszych dyskusji[104] (1959, s. 192).

Na dalszym etapie swoich badań Mostowski porzucił ideę o wyższości konstruktywizmu nad innymi poglądami, choć dalej dostrzegał i podkreślał jego zalety w konkretnych przypadkach. Twierdził, że tendencje konstruktywistyczne w podstawach matematyki są bliższe filozofii nominalistycznej niż filozofii idealistycznej (w sensie platońskim). Ten charakter nominalistyczny konstruktywizmu powoduje, że nie akceptuje on ogólnych pojęć matematyki jako danych, ale próbuje je konstruować. „To prowadzi do rezultatu, że pojęcia matematyczne mogą być utożsamiane z ich definicjami"[105] (1959, s. 178). W arytmetyce konstruktywizm pozwala uwolnić się od zakładania nieskończoności aktualnej lub też stosować rozwiązania, w których wystarcza podejście nominalistyczne. Korzyścią, jaką niesie nominalizm, jest

[104] "[...] it wants to inquire into the nature of mathematical entities and to find a justification for the general laws which govern them, whereas platonism takes these laws as granted without any further discussion".

[105] "This leads to the result that one can identify mathematical concepts with their definitions".

zaś to, że wiele ważnych teorii matematycznych zostało w sposób zadowalający zrekonstruowanych na podstawie nominalistycznej, a rekonstrukcje te okazały się równoważne teoriom klasycznym.

Mostowski zdawał sobie sprawę z tego, że metody finitarne, predykatywne i konstruktywne w matematyce nie wystarczą (por. 1972b, s. 29–32). Nie poprzestawał jednak na konstatacji ograniczeń konstruktywizmu, lecz dokładnie badał głoszone przezeń zasady. Twierdził, że konstruktywizm jest czasami filozoficznie bardziej satysfakcjonujący, jak w przypadku arytmetyki. W matematyce stosowanej również zdaje się on odsłaniać obiecujące perspektywy. Zatem wyznaczenie dokładnego zasięgu metod konstruktywnych w matematyce klasycznej jest ważnym zadaniem zarówno dla matematyki, jak i dla filozofii. Idea ta związana była z pomysłem stopni konstruktywności przypisywanych różnym teoriom matematycznym, naszkicowanym w „On Various Degrees of Constructivism" (1959) (por. także 1953).

Rozumienie konstruktywizmu przez Mostowskiego najlepiej charakteryzuje następujący cytat:

> Moja koncepcja konstruktywizmu będzie tak naiwna jak to możliwe i opisać się da następująco. Będę rozważał teorie liczb rzeczywistych i funkcji rzeczywistych, w których bada się nie dowolne liczby rzeczywiste i funkcje rzeczywiste, ale tylko liczby i funkcje, które należą do pewnej z góry ustalonej klasy. Zależnie od wyboru tej klasy otrzymamy różne teorie arytmetyki i analizy. Nasz wybór klasy wyjściowej nie będzie arbitralny: spróbujemy dokonać takiego wyboru, żeby elementy wybranej klasy spełniały pewne warunki obliczalności czy efektywności. Rozpoczniemy od surowych warunków, a następnie będziemy stopniowo osłabiali je i zobaczymy, że można w ten sposób usystematyzować spory fragment starej, a także nowszej pracy konstruktywistów. Nie będę brał w ogóle pod uwagę sposobu, w jaki wspomniane klasy są definiowane i nie będę nakładał żadnych ograniczeń na metody dowodu dopuszczalne w rozważaniach o liczbach i funkcjach należących do tych klas. To naiwne podejście do konstruktywizmu jest niezbyt właściwe z konstruktywistycznego punktu widzenia. Nie daje ono konstruktywistycznego rozwinięcia takiej czy innej gałęzi matematyki, ale jedynie spojrzenie na konstruktywizm z zewnątrz. Wartość takiego podejścia (jeśli ma ono jakąś wartość) dostrzegam w możliwości rozważenia w oparciu o pewną wspólną podstawę różnych

najprostszych koncepcji konstruktywistycznych; bardziej wyrafinowane jednak, w szczególności takie, które jak intuicjonizm nakładają ograniczenia na metody dowodowe, muszą z konieczności zostać wykluczone z tego przeglądu[106] (1959, s. 180).

Mostowski postrzegał konstruktywizm w sposób związany z klasycznym punktem widzenia. Reprezentował on – w odróżnieniu od czystego konstruktywizmu Heytinga i intuicjonistów – pewną kombinację konstruktywizmu i programu teoriomnogościowego, która stanowiła dla niego bazę dla matematycznie rozwijanych podstaw matematyki.

Z powyższych rozważań wynika, że Mostowski był świadom problemów filozoficznych związanych z matematyką oraz ich znaczenia. Z jednej strony unikał (z kilkoma wyjątkami) formułowania jakichkolwiek deklaracji filozoficznych, koncentrując się na stronie czysto matematycznej i technicznej rozważanych zagadnień. Kiedy było to konieczne, wtedy czynił – acz niechętnie – pewne ogólne uwagi filozoficzne. Był też świadom znaczenia dla filozofii matematyki wyników

[106] "My conception of constructivism will be as naive as possible and will consists in the following. I shall consider theories of real numbers and real functions in which not arbitrary real numbers or real functions are considered but only numbers and functions which belong to a certain class specified in advance. According to the choice of this class, we shall obtain different theories of arithmetic and analysis. Our choice of the initial class will not be arbitrary: we shall try to make the choice so that the elements of the chosen class satisfy certain conditions of calculability or effectivity. We shall start with stringent conditions and then loosen them gradually and we shall see that it is possible in this way to systematize a good deal of older and also of more recent work of constructivists. I shall pay no attention to the way in which the classes just mentioned are defined and shall impose no limitations on methods of proof acceptable in dealing with numbers or functions belonging to these classes. This naive approach to constructivism is certainly objectionable from the constructivist point of view. It does not represent a constructivist development of a branch of mathematics but gives merely a glance of constructivism, so to say, from outside. The value (if any) of such an approach I see in the possibility of reviewing on a common background several of the simplest constructivistic conceptions; but more refined ones and especially those which, like intuitionism, impose restrictions on methods of proof must necessarily be excluded from such a review".

uzyskanych (metodami matematycznymi) w zakresie podstaw matematyki, ale z drugiej strony był przekonany, że wyniki te nie mogą dać definitywnych rozwiązań problemów filozoficznych. W związku z tym zamiast składać jakiekolwiek deklaracje, prezentował różne możliwe rozwiązania. Kwestie filozoficzne rozważał i dyskutował na marginesie właściwych badań metamatematycznych, rozważania umieszczając najczęściej w uwagach wstępnych do pracy i – co ważne – uwagi te nie miały nigdy wpływu na dalsze przemyślenia czysto (meta)matematyczne. Mostowski zdecydowanie unikał w pracach technicznych wszelkich uwag i komentarzy filozoficznych. Wyraźnie rozdzielał perspektywę filozoficzną z jednej strony i perspektywę (meta)matematyczną z drugiej. Niektóre jego wyniki były, jak można przypuszczać, inspirowane rozważaniami filozoficznymi (na przykład niezależność różnych definicji skończoności, konstrukcje, które prowadziły do tzw. dziś hierarchii Kleene'ego – Mostowskiego, konstrukcje modeli z automorfizmami), nigdy jednak o tym nie pisał i nie formułował ich, koncentrując się całkowicie na badaniach matematycznych i metamatematycznych. Jesteśmy więc zdani tu jedynie na domysły i hipotezy, których nie da się rozstrzygnąć.

Choć Mostowski nie stworzył żadnego nowego „-izmu" w filozofii matematyki, to jego prace wniosły ważny wkład do tej dziedziny i mogą być właściwie uznane za paradygmatyczny przykład pewnego rozumienia współoddziaływania matematyki i idei filozoficznych. Mostowski stanowi doskonały przykład charakterystycznej dla polskiej szkoły postawy co do podstaw i filozofii matematyki.

W świetle powyższych rozważań trafne wydaje się spostrzeżenie Romana Suszki, który pisał, że „Mostowski jest matematykiem-logikiem, któremu nie jest obcy filozoficzny aspekt logiki i teorii podstaw matematyki" (1968, s. 169).

8. Henryk Mehlberg

Henryk Mehlberg zaliczany – podobnie jak Mostowski – do drugiego pokolenia szkoły lwowsko-warszawskiej zajmował się zarówno filozofią nauk formalnych, jak i filozofią nauk pozaformalnych. Nas będzie tu interesować oczywiście tylko ta pierwsza dziedzina i w tym zakresie ważna jest jedna jego publikacja, a mianowicie „The Present Situation in the Philosophy of Mathematics" (1962). Zaproponował w niej – rozważywszy istniejące kierunki w filozofii matematyki – tzw. logicyzm pluralistyczny.

Mehlberg wyróżnia trzy postaci/wersje logicyzmu: radykalny, umiarkowany i proponowany przez siebie logicyzm pluralistyczny (jego zwolennikiem był także Hilary Putnam). Główne tezy logicyzmu radykalnego – reprezentowanego przez Russella i Whiteheada w *Principia Mathematica* – sprowadzają się do dwóch następujących tez:

1) wszystkie pojęcia matematyki można zdefiniować *explicite* za pomocą pojęć logicznych,

2) wszystkie twierdzenia matematyki można wydedukować z praw logiki za pomocą ustalonych czysto logicznych sposobów rozumowania (wspólnych dla całej matematyki).

W konsekwencji matematyka staje się częścią logiki.

Dokładne analizy pokazały – i wiedzieli o tym już twórcy logicyzmu – że do udowodnienia pewnych (nawet podstawowych) twierdzeń matematyki (dokładniej: arytmetyki) potrzebne są pewne zasady i założenia, co do których można żywić wątpliwości o ich czysto logicznym charakterze. Chodzi tu głównie o aksjomat nieskończoności (potrzebny już na przykład w dowodzie twierdzenia głoszącego, że dla każdej liczby naturalnej istnieje jej następnik) czy o aksjomat wyboru. Russell i Whitehead widzieli rozwiązanie tych trudności w skorzystaniu z twierdzenia o dedukcji, które pozwala zamienić rozważanie danego twierdzenia φ, w którego dowodzie użyto aksjomatów $\varphi_1,\dots, \varphi_n$ na rozważanie implikacji postaci $\varphi_1,\dots, \varphi_n \to \varphi$, która to implikacja jest już tezą logiki. Jest to jednak zabieg w istocie sztuczny. Obraz matematyki i sposobów uzasadniania w niej twierdzeń, jaki w ten sposób uzyskujemy, odbiega bardzo od rzeczywistej praktyki badawczej matematyków.

Stąd pomysł pewnego osłabienia postulatów logicyzmu. W roku 1962 Alonzo Church w opracowaniu „Mathematics and Logic" (1962) zaproponował tzw. logicyzm umiarkowany, polegający na odrzuceniu drugiego wyżej opisanego postulatu Russella i Whiteheada.

Według niego jest to w pełni uzasadnione przez aktualną sytuację w matematyce. Konsekwencją tego jest nie tyle teza, że matematyka jest częścią logiki, ale że logika jest bardziej pierwotna niż matematyka i zajmuje miejsce przed nią.

Według Mehlberga nie rozwiązuje to wszystkich problemów. Trudno bowiem zaliczyć pojęcie zbioru do pojęć czysto logicznych. Nie sposób też zbudować systemu logiki bez używania jakichkolwiek pojęć i metod mnogościowych – stają się więc one niezbędne na poziomie metamatematycznym. Z drugiej strony jednak nie ma jednej powszechnie akceptowalnej wersji aksjomatycznej teorii mnogości. Powstaje więc pytanie, którą z nich wybrać. Mehlberg proponuje logicyzm pluralistyczny. Według niego rozwiązuje on problemy, na jakie napotykają inne wersje logicyzmu, a z drugiej strony „jest w stopniu zadowalającym zgodny z aktualną sytuacją w badaniach nad podstawami matematyki, ponieważ taka wersja logicyzmu stwarza wspólną bazę dla głównych tendencji w filozofii matematyki"[107] (1962, s. 79). Mówiąc o aktualnej sytuacji w badaniach nad podstawami matematyki, ma on na myśli przede wszystkim twierdzenia Gödla o niezupełności oraz twierdzenie Churcha o nierozstrzygalności.

Zdaniem filozofa intuicjonizm i formalizm nie są tak diametralnie różnymi sposobami podejścia do matematyki. Dzięki wynikom Kołmogorowa, Gödla, Kleene'ego i Gliwienki o wzajemnej interpretowalności wiemy, że systemy te są w jakimś sensie podobne i że niesprzeczność matematyki intuicjonistycznej jest równoważna niesprzeczności matematyki klasycznej. Z drugiej strony intuicjonizm jest, według Mehlberga, w jakiś sposób podobny do logicyzmu. Pisze on:

> Zauważmy jednak, że gdyby różnica dzieląca klasyków od intuicjonistów sprowadzała się jedynie do odpowiedniej interpretacji symboli logicznych, wtedy intuicjonizm stałby się wersją logicyzmu, niezależnie od tego, jak bardzo różne są te dwie interpretacje terminów logicznych.

---

107 "[...] is capable of providing a satisfactory adjustment to the present situation in foundational research because such a version of logicism supplies a common basis for the main trends in contemporary philosophy of mathematics".

> Co ważniejsze, wydaje się, że z praktycznego punktu widzenia trudno spodziewać się, by matematyk prowadzący badania doceniał wagę specjalnej natury matematyki intuicjonistycznej. Matematyk jest bowiem *twórcą dowodów*, niezależnie od tego, czy mieszka w Holandii, czy też poza nią[108] (1962, s. 93).

Takie myślenie pozwala Mehlbergowi zaproponować pewną koncepcję filozofii matematyki, która ma za zadanie zbliżyć logicyzm, intuicjonizm i formalizm – ma nią być właśnie logicyzm pluralistyczny. Wspomniana koncepcja nawiązuje do znanego już Russellowi i Whiteheadowi triku opartego na twierdzeniu o dedukcji, o którym pisaliśmy wyżej. Pozwala on na rozważanie zamiast danego twierdzenia φ po prostu implikacji $\varphi_1,\ldots, \varphi_n \rightarrow \varphi$, gdzie $\varphi_1,\ldots, \varphi_n$ to aksjomaty użyte w dowodzie φ. Zachodzi więc następująca zasada:

> Dowolny dowód prawdziwy w pewnej konkretnej teorii matematycznej ma swą prawdziwą *replikę*, która w sposób oczywisty należy do pewnego [systemu] logiki czystej i w związku z tym może być otrzymana przez logika w jego własnej dziedzinie[109] (1962, s. 94).

Argumentem za tezą Mehlberga jest też fakt, że twierdzenie o dedukcji zachodzi zarówno dla logiki klasycznej, jak i dla logiki intuicjonistycznej. W ten sposób autor dochodzi do następującego wniosku:

> Tak więc zarówno matematyka klasyczna, *jak* i intuicjonistyczna mają swe dokładne *repliki* w swoich systemach logicznych. Jedyna różnica pomiędzy tymi dwoma rodzajami matematyki wydaje się sprowadzać

[108] "Let us notice, however, that if the difference separating classicists form intuitionists would affect only their respective interpretations of logical symbols, then intuitionism would become a version of logicism, no matter how much the two interpretations of logical terms differ from each other. More importantly, it would seem that, from a practical point of view, a working mathematician could hardly be expected to appreciate the separate and individual nature of intuitionist mathematics under the circumstances just mentioned. For the mathematician is essentially an *architect of proofs*, no matter whether he lives inside or outside Holland".

[109] "Any proof which is valid in some particular mathematical theory has a valid *replica* which clearly belongs to some pure logic and can therefore be established by a logician within his own field".

do faktu, że używa się w nich dwóch różnych rodzajów logiki[110] (1962, s. 95).

Zauważmy, że propozycja logicyzmu pluralistycznego jest podobna do poglądów Arystotelesa na matematykę. Głosił on bowiem, że pewność i konieczność przysługuje w matematyce nie poszczególnym twierdzeniom, a jedynie związkom logicznym pomiędzy zdaniami wyrażonymi przez okresy warunkowe.

Na podkreślenie zasługuje fakt, że logicyzm pluralistyczny dopuszcza zarówno realistyczne, czy nawet platońskie, jak i nominalistyczne rozumienie logiki i jest z nimi wszystkimi zgodny. Rozwiązuje on też trudności, na które zwrócono uwagę w logicyzmie umiarkowanym Churcha – istotnie, nie ma tu żadnego znaczenia rozstrzygnięcie, czy na przykład pojęcie zbioru zaliczymy do pojęć (czysto) logicznych, czy też nie. Logicyzm pluralistyczny podkreśla – zdaniem Mehlberga – tę cechę wiedzy matematycznej, iż „dla każdej teorii matematycznej istnieje *pewna* logika, która dostarcza środków koniecznych dla wyprowadzenia wszystkich stosownych twierdzeń tej teorii bez odwoływania się do »intuicji« pozalogicznej"[111] (1962, s. 100). To ma też usprawiedliwiać i wyjaśniać użycie w nazwie przymiotnika „pluralistyczny".

Warto zwrócić jeszcze uwagę na pewne wnioski epistemologiczne, które Mehlberg wyciąga z drugiego twierdzenia Gödla, czyli z twierdzenia o niedowodliwości niesprzeczności. Ponieważ – zgodnie z tym twierdzeniem – nie istnieją absolutne dowody niesprzeczności bogatszych (czyli zawierających arytmetykę liczb naturalnych), a więc ciekawszych teorii matematycznych, więc w praktyce jesteśmy zdani na założenie, iż rozważana teoria jest niesprzeczna na podstawie faktu, że jak dotąd nie natrafiono w niej na sprzecz-

---

110 "Hence, both classical *and* intuitionist mathematics have their exact *replicas* in their respective logical systems. The only difference between these two kinds of mathematics would seem to consists in the circumstance that two different logics are used in these kinds of mathematics".

111 "[...] for every mathematical theory there exists *some* logic capable of providing the necessary tools for the derivation of all the relevant theorems of this theory without any recourse to extralogical »intuition«".

ność. Nie wyklucza to oczywiście możliwości znalezienia sprzeczności w przyszłości. Wystarczy jednak, by teorię zaliczyć do zasobu wiedzy ludzkiej, a nie opatrywać etykietą „wiara". Przypomina to sytuacje, z jakimi mamy do czynienia w naukach empirycznych.

Unifikacja wiedzy matematycznej – przez na przykład jej redukcję do logiki, czy teorii mnogości, czy logiki i teorii mnogości – może być traktowana jako zbudowanie podstaw matematyki tylko wtedy, gdy aksjomaty systemu unifikującego są pewniejsze i bardziej niezawodne niż aksjomaty systemu unifikowanego czy redukowanego do logiki bądź teorii mnogości. Mehlberg zauważa, że już Gödel sądził, iż „tak zwane logiczne czy teoriomnogościowe »podstawy« teorii liczb czy jakiejkolwiek innej dobrze rozwiniętej teorii matematycznej pełnią rolę eksplanacyjną raczej, a nie dostarczają jej rzeczywistego ugruntowania i podstaw"[112] (1962, s. 86). Przywołany cytat jest kolejnym podkreśleniem podobieństwa matematyki do nauk empirycznych, na przykład do fizyki.

---

[112] "[...] so-called logical or set-theoretical »foundations« for number-theory, or any other well established mathematical theory, is explanatory, rather than really foundational [...]".

ROZDZIAŁ 4

Ośrodek krakowski

Rozdział ten jest poświęcony analizie poglądów filozoficznych na matematykę i logikę uczonych związanych głównie z ośrodkiem krakowskim, tzn. Jana Sleszyńskiego, Stanisława Zaremby i Witolda Wilkosza. Dodajmy, że przez pewien okres swojej działalności naukowej z ośrodkiem krakowskim związani byli też Zygmunt Zawirski i Leon Chwistek. Z pewnych względów (por. Wstęp) zdecydowaliśmy się jednak omówić ich prace i poglądy w innych rozdziałach (dokładniej: Zawirskiego w rozdziale 3, a Chwistka w rozdziale 2).

1. Jan Sleszyński

Sleszyński w okresie odeskim zajmował się przede wszystkim analizą matematyczną i rachunkiem wariacyjnym, w okresie zaś krakowskim głównie logiką matematyczną, a zwłaszcza rachunkiem zdań, który nazywał teorią dowodu, u schyłku życia zaś – teorią liczb. Należy jednak zauważyć, że już w okresie odeskim interesował się logiką, o czym świadczy praca pt. „Logičeskaja mašina Dževonsa” z 1893 roku. Był erudytą, ale na tematy *stricte* filozoficzne publikował jednak mało[1].

Sleszyński może być uznany w jakimś sensie za pioniera logiki matematycznej w Polsce. Zaszczepił – m.in. na gruncie krakowskim – zainteresowanie tą nową i intensywnie rozwijającą się dziedziną. Dzięki niemu elementy logiki stały się nieodłącznym składnikiem wykładów matematyki na Uniwersytecie Jagiellońskim. W swoich pracach dawał wyraz silnemu przekonaniu o znaczeniu logiki dla matematyki i o roli, jaką odgrywa (czy odgrywać winna)

---

[1] W bibliotece Uniwersytetu Warszawskiego znajduje się wiele rękopisów Sleszyńskiego, m.in. notatki do wykładów oraz wyciągi z lektur.

w matematyce. Przekonanie to wypływało z dostrzegania luk w dowodach matematycznych. W artykule „O znaczeniu logiki dla matematyki" pisał:

> Treść matematyki jest wspaniała, lecz forma jej pozostawia dużo do życzenia. Te słowa wypowiadam z rozmysłem, aby je przeciwstawić hymnom wygłaszanym na cześć nauki w ogóle, a matematyki w szczególności (1923).

Sytuacja nie jest zresztą – zdaniem Sleszyńskiego – lepsza również w innych naukach. Z drugiej strony twierdził wyraźnie, że „wszystko, co jest ciemne i skomplikowane, jest bez wartości" oraz że „poszukiwanie jasności i prostoty powinno być myślą przewodnią wszelkich badań w tym zakresie" (1925–1929, t. 2, s. 212). Remedium na tę sytuację dostrzegał właśnie w logice, która była – jego zdaniem – jedynym narzędziem mogącym „wyplenić chwasty na polu naukowym i drogą analizy skracać i kondensować ten przeogromny materiał, który daje twórczość naukowa. Logika [bowiem] jest jedynym środkiem otrzeźwiającym badacza, wskazującym mu normy ważności tematu i dojrzałości jego pracy" (1925–1929, t. 1, s. 4). Dlatego też, jak pisze Antoni Maria Hoborski:

> Nie był jednym z tych, którzy pogrążeni w swojej twórczej pracy, nie interesują się swymi studentami, a wykład uważają za balast; nie należał również do tych, którzy w stałym kontakcie ze studentami gromadzą koło siebie przyszłych pracowników naukowych, budują tym samym szkołę matematyczną i tworzą ośrodek naukowy[2]. Prof. Sleszyński nakreślił sobie zadanie zupełnie odmienne i wręcz oryginalne: pragnął w swych wykładach elementów, czy to analizy, czy teorii wyznaczników, czy też rachunku prawdopodobieństwa itd. wyjaśnić wszelkie trudności natury logicznej i matematycznej, tkwiące właśnie w elementach tych nauk, zwykle nie dostrzeganych przez matematyków;

---

[2] Sleszyński istotnie miał niewielu uczniów. Należeli do nich m.in. Stanisław Krystyn Zaremba (1903–1990) (syn Stanisława Zaremby, o którym mówimy w paragrafie 2 tego rozdziału) i Wacław Borejko. W kręgu jego oddziaływania byli też Antoni Maria Hoborski (1879–1940), Leon Chwistek (1884–1944), Tadeusz Ważewski (1896–1972) i Stefan Rozental (1903–1944?). (Przypis mój – R.M.).

> pragnął zapełnić luki w klasycznych niekiedy rozumowaniach, by wywody matematyczne, które podawał, miały charakter rozumowań „zupełnych” (1934, s. 74).

Źródeł niejasności w pracach matematycznych uczony upatrywał w – jak pisał w artykule „O znaczeniu logiki dla matematyki”:

> 1) ogromnej zawiłości i trudności badań matematycznych i
> 2) ogromnej trudności wykładu wyników tych badań (1923, s. 41).

To pierwsze zależne jest od „niedokładności metod badania” oraz od „istoty rzeczy badanych, tj. od prawd matematycznych” (1923, s. 45). To drugie zaś polega na włączaniu do dowodów rozumowań, „które są dowodami pewnych innych twierdzeń, wplecionych do danego dowodu, ale niesformułowanych dokładnie” (1923, s. 46), włączaniu do dowodu nieudowodnionych tematów oraz na nadużywaniu dowodów nie wprost. Nie należy też, jego zadaniem, zapominać o tym, że często autorzy (zwłaszcza dawniejsi) celowo pomijają[3] lub zniekształcają dowody. Źródłem niejasności może być też oderwanie przedmiotu dociekań matematycznych od doświadczenia zmysłowego[4]. Przy tym Sleszyński odróżnia wyraźnie „gotową naukę” od jej „tworzenia” (por. 1925–1929, t. 1, s. 149), czyli kontekst odkrycia i kontekst uzasadnienia w matematyce. Pisze we wzmiankowanym już artykule „O znaczeniu logiki dla matematyki”, że:

> Odkrycie prawd matematycznych odbywa się przeważnie drogą intuicji przy pomocy fantazji twórczej i nie daje się ująć w żadne określone prawidła (1923, s. 44).

---

3 Tak czynił na przykład Kartezjusz, który w *La géométrie* pomijał dowody, zastępując je uwagami typu: „Nie będę zatrzymywał się tu nad podawaniem szczegółów, ponieważ pozbawiłbym w ten sposób czytelnika przyjemności znalezienia ich samemu”.

4 Sleszyński ilustruje w (1923) swoje uwagi obszernymi cytatami z Kartezjusza, Leibniza, Jocobiego, Eisensteina, Gaussa i Galois.

To zaufanie do intuicji połączone z „zaniedbaniem kultury logicznej" (1923, s. 46) jest także źródłem trudności i niejasności[5]. Po tym dopiero następuje sprawdzenie „domysłów" za pomocą „ścisłych dowodów" (1923, s. 46).

Aby zaradzić tym kłopotom, Sleszyński proponuje podawanie dowodów zupełnych, tzn. składających się z:

> [...] części (ogniw), z których każde jest zastosowaniem jakiegoś poprzednio dowiedzionego albo przyjętego twierdzenia na podstawie *modus ponens*, tj. na podstawie tego, że jeżeli *p* wynika z *q*, i *p* jest prawdą, to i *q* jest prawdą (1923, s. 49).

Dowody zupełne są jednak bardzo długie i przez to często nieczytelne. Dlatego też matematycy w praktyce poprzestają zazwyczaj na skrótach dowodów. Aby jednak uniknąć kłopotów i błędów, należy stosować skróty ostrożnie i zgodnie z pewnymi zasadami. Stąd postulat Sleszyńskiego, by przeprowadzić analizę logiczną teorii matematycznych oraz znaleźć metody skracania procedury dowodowej. I tu właśnie jako narzędzie przydaje się logika. Nie wystarczy jednak logika tradycyjna:

> [...] ta logika nie wystarcza dla matematyki przyszłości. Jeśli mianowicie będziemy się zajmowali badaniem podstaw matematyki, to do tego potrzebna jest logika nowa, której pierwsze zarysy znajdujemy w *Principia Mathematica*. W tych badaniach bowiem wszystkie twierdzenia są oczywiste, a chodzi o to, aby ustanowić związek logiczny między twierdzeniami (1921a, s. 11).

Logika jest więc niezbędna dla matematyki. Jej rolę i miejsce oraz związek z matematyką uczony charakteryzuje w zakończeniu pracy „O znaczeniu logiki dla matematyki" następująco:

> Z poprzednich rozważań wypływa odpowiedź na pytanie o znaczenie logiki dla matematyki. Bez dowodów zupełnych poważne badania nad podstawami matematyki są właściwie niemożliwe. Dla innych badań

[5] Rozważania nad źródłami niejasności w matematyce znajdujemy też we wcześniejszej pracy Sleszyńskiego „Sur le raisonnement dans les sciences deductives" (1921b). Formułuje w niej tezy podobne do wyżej opisanych.

> matematycznych wystarczą, co prawda skróty dowodów, ale takie skróty, które dawałyby pewność, nie mogą być zbudowane bez dokładnej znajomości teorii dowodu.
>
> Widzimy więc, że logika jako teoria dowodu, jest konieczna dla wyprowadzenia matematyki z jej obecnego smutnego, moim zdaniem, stanu na drogę, gdzie forma jej, zaniedbywana dotychczas, odpowiadałaby jej wspaniałości i wzniosłej treści. Wtedy dopiero znajdzie matematyka jak najszersze rozpowszechnienie, a potężna metoda matematycznego myślenia wywrze decydujący wpływ na myślenie naukowe w ogólności! Cudowność polotu całkiem swobodnej fantazji matematycznej i posągowa piękność prawd matematycznych nie będą omraczane gmatwaniną logiczną jej dotychczasowej formy i staną się źródłem najwyższej rozkoszy dla szerokich kół ludzi myśli (1923, s. 52).

Zarysowane zadanie Sleszyński realizował przez swoje odczyty. Od roku akademickiego 1914/1915 do roku 1920 prowadził na przemian wykład z metodologii matematyki i z logiki matematycznej, a w latach 1921–1924 wykładał „Teorię dowodu". Na tej podstawie powstała książka o tym samym tytule (1925–1929). Jest to dwutomowy skrypt opublikowany dzięki jego uczniom – do druku przygotował go Stanisław Krystyn Zaremba we współpracy z R. M. Wasserbergerem, a został wydany przez Kółko Matematyczno-Fizyczne Uczniów Uniwersytetu Jagiellońskiego z zasiłku Ministerstwa Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego. Skrypt został opracowany nie tylko na podstawie notatek studentów do wykładów, ale wykorzystano w nim także własne zapiski Sleszyńskiego, który cały czas udzielał merytorycznych konsultacji.

Teoria dowodu zawiera przedstawienie historii logiki oraz nowoczesny wykład samej dyscypliny. Tom pierwszy otwierają ogólne rozważania nad pojęciem systemu dedukcyjnego jako zbioru zdań, z których pewne przyjęto bez dowodu (są to pewniki i definicje), a wszystkie pozostałe należy z nich wyprowadzić drogą rozumowania dedukcyjnego. Następnie Sleszyński przedstawia zarys historii logiki (przede wszystkim formalnej) na tle rozwoju matematyki. Mowa tu o Zenonie z Elei i jego paradoksach (podkreśla się zarówno ich historyczną doniosłość, jak i aktualność), sofistach, Gorgiaszu, Protagorasie, Sokratesie, Platonie, Arystotelesie, Piotrze Hiszpanie, Baconie, Ockhamie, Kartezjuszu, Leibnizu, Bolzanie, Millu. W końcowej części metodologicznej znajdujemy analizę pojęcia dowodu dedukcyjnego w matematyce. Tom drugi przynosi omówienie wkładu w rozwój logiki matematycznej Leibniza, Boole'a, Jevonsa, Hermanna Günthera i Roberta Grassmanów, Schrödera, Poreckiego, dalej Peana, Burali-Fortiego, Russella i Whiteheada. Podkreśla się tu przejście od rachunku logicznego służącego rozwiązywaniu zadań logicznych do rachunku jako narzędzia uzasadniania twierdzeń. Po tym zamieszczony jest wykład rachunku zdań zawierający dowody 250 praw (z tego 44 w dodatku autorstwa Stanisława Krystyna Zaremby) w systemie opartym na 11 aksjomatach oraz regułach podstawiania i odrywania. Autor pokazuje, jak prawa logiki mogą być wykorzystane do budowy zupełnych dowodów twierdzeń matematycznych – czyni to przez analizę różnych przykładów.

Zasługą Sleszyńskiego jest sformułowanie i próba realizacji programu rekonstrukcji faktycznego przebiegu dowodów matematycznych – próbę tę podjął później Stanisław Jaśkowski w postaci systemu dedukcji naturalnej. Należy przy tym podkreślić jego odcięcie się od psychologizmu i naleciałości epistemologicznych. Sleszyński traktował system dedukcyjny jako system hipotetyczny. Podkreślał, że twierdzenia matematyki są „twierdzeniami warunkowymi, których treścią jest związek między poprzednikiem a następnikiem" (1912, s. 119a).

Podkreślając rolę i znaczenie formalizacji i symboliki w kontekście uzasadniania, Sleszyński przestrzegał przed tym, co Kazimierz Twardowski nazwie (1927) „symbolomanią i pragmatofobią". Symbolika służy jedynie upraszczaniu dowodów i czynieniu ich przejrzystymi, a w logice umożliwia analizę i ścisłe sformułowanie tzw. naczelnych praw myślenia (por. 1913, s. 23a).

Zajmując się metodologią matematyki, uczony nie prowadzi w zasadzie rozważań natury ontologicznej czy epistemologicznej *sensu stricto*. Był jednak antyfikcjonalistą, tzn. uważał wprowadzanie do nauki fikcji, zwłaszcza fikcji sprzecznych, za destrukcyjne, szczególnie w przypadku matematyki. Pisał z przekąsem:

> Fikcje sprzeczne ukazują się w matematyce tylko tam, gdzie pojęcia matematyczne nie zostały dokładnie zbadane (1914, s. 199b).

Za najważniejsze osiągnięcie Sleszyńskiego z punktu widzenia interesującego nas w tej książce zagadnienia, tzn. rozwoju filozofii matematyki, należy uznać jego przekonanie o wadze i znaczeniu logiki i metod formalnych dla matematyki i jej metodologii. Profesor wpisuje się więc w ważny i istotny nurt obecny w Polsce. Trzeba jednak mocno podkreślić, że przypisywał on logice raczej rolę nauki pomocniczej w stosunku do matematyki i nie traktował jej jako dyscypliny samodzielnej i niezależnej. W konsekwencji rozważał ją wyłącznie pod kątem jej zastosowań w matematyce. Taką samą postawę reprezentował też związany z Krakowem Stanisław Zaremba (por. paragraf 2 tego rozdziału), który mówił o logice *w* matematyce, traktował ją jako *ancilla mathematicae*. Stanowi to wyraźny kontrast z postawą, która dominowała w warszawskiej szkole logicznej, gdzie traktowano logikę jako samodzielną i autonomiczną dyscyplinę leżącą u podstaw i metodologii matematyki (por. rozdział 3).

2. Stanisław Zaremba

Rozważając filozoficzne poglądy Stanisława Zaremby na matematykę, zacznijmy od stwierdzenia, że należał on do grona osób zainteresowanych nowoczesną logiką matematyczną w ośrodku krakowskim, w tym zakresie był tu niejako pionierem. Choć sam w tej dziedzinie twórczo nie pracował, doceniał jednak rolę logiki w matematyce – o czym powiemy więcej niżej. Wraz ze Sleszyńskim (por. poprzedni paragraf) zainteresował logiką i filozofią matematyki młodych matematyków krakowskich, w szczególności Witolda Wilkosza (por. paragraf 3 w rozdziale 4).

Zaremba interesował się nie tyle samą logiką matematyczną jako taką, co podstawami matematyki. Widać tu zapewne wpływ jego studiów na Sorbonie, gdzie doktoryzował się w roku 1899 – jego stosunek do logiki i poglądy na jej rolę w matematyce były zgodne z postawą większości matematyków francuskich w tym zakresie. Zaremba napisał kilka ważnych książek, w których przedstawił logiczną strukturę matematyki – por. na przykład jego *Arytmetykę teoretyczną* (1912), *Zarys pierwszych zasad teorii liczb całkowitych* (1907), *Wstęp* *do analizy* (1915), czy wreszcie pracę *La logique des mathématique* (1926). Były to dzieła o charakterze metodologicznym. Do niektórych z nich przyjdzie nam jeszcze wrócić, gdyż stanowią one dobrą ilustrację pojmowania przez Zarembę logiki i jej roli w matematyce. Dodajmy tu więc tylko, że mimo zainteresowania logiką matematyczną, to nie Zaremba, ale Sleszyński wprowadził tę dziedzinę jako przedmiot akademicki na Uniwersytecie Jagiellońskim.

Zaremba był matematykiem wszechstronnym. Pracował głównie w zakresie analizy matematycznej, dokładniej w teorii równań różniczkowych cząstkowych rzędu drugiego. Zainteresowania te były chyba konsekwencją jego przekonania, że matematyka nie powinna być celem samym w sobie, że ostatecznym celem matematyki są jej zastosowania, w szczególności w naukach przyrodniczych. Doceniał jednak znaczenie i widział piękno matematyki czystej – była ona dla niego źródłem nowych narzędzi i metod w badaniach teoretycznych. Stąd zapewne jego zainteresowanie fizyką matematyczną i rolą matematyki w fizyce. Zajmował się również problematyką filozofii i metodologii matematyki.

Zaremba dostrzegał związki badań w zakresie matematyki z problematyką filozoficzną. Dowodem może tu być jego artykuł „Pogląd na te kierunki w badaniach matematycznych, które mają znaczenie teoretyczno-poznawcze" (1911). Mówi w nim o badaniach nad podstawami geometrii i w zakresie teorii mnogości, które jego zdaniem „graniczą z teorią poznania, a nawet w pewnej mierze należą do tej gałęzi dociekań filozoficznych" (1911, s. 217).

Rozważając badania nad niezależnością piątego postulatu Euklidesa o równoległych od pozostałych aksjomatów geometrii i związane z tym powstanie geometrii nieeuklidesowych, subtelnie odróżnia kwestię dowodliwości czy niedowodliwości pewnych stwierdzeń na podstawie przyjętych aksjomatów od kwestii prawdziwości tych stwierdzeń:

> Na podstawie tych uwag mogłoby się wydawać, że kwestia niezależności logicznej postulatu Euklidesa od innych aksjomatów geometrii zlewa się z pytaniem, czy postulat Euklidesa wyraża prawdę, czy też błąd. W rzeczywistości jednak tak nie jest (1911, s. 219).

Zaremba dochodzi w swych rozważaniach dotyczących geometrii do następującej konkluzji:

> Znaczenie teoriopoznawcze badań nad podstawami geometrii możemy, jak sądzę, przedstawić w sposób następujący:
>
> 1. Badania te pouczają nas, iż wytworzyć sobie możemy bardzo ogólne pojęcie, mianowicie pojęcie rozciągłości *n*-wymiarowej, która mieści w sobie, jako przypadek szczególny rozciągłości trójwymiarowej, pojęcie przestrzeni.
> 2. Przy sposobności badań nad podstawami geometrii rozwinęło się ogólne pojęcie niezależności logicznej pewnych twierdzeń od pewnych innych.
> 3. Przez to, iż badania nad podstawami geometrii doprowadziły do ustawienia wykazu [tzn. układu – uwaga moja, R.M.] logicznie niezależnych od siebie orzeczeń [czyli stwierdzeń – uwaga moja, R.M.], z których cała geometria klasyczna wynika już na drodze czysto dedukcyjnej, uzyskane zostały niezbędne podstawy do bliższego zbadania natury psychologicznej pojęcia przestrzeni (1911, s. 220).

Z tym ostatnim zagadnieniem wiąże się, zdaniem Zaremby, pytanie o prawdziwość aksjomatów geometrii – w tym jednak zakresie panuje, jego zdaniem, wielka rozbieżność wśród matematyków.

Drugą rozważaną przez Zarembę dziedziną matematyki, której wyniki mają znaczenie dla filozofii, w szczególności dla teorii poznania, jest teoria mnogości. Jej znaczenie polega tu na tym, że zbadano w niej bliżej pojęcie nieskończoności, dokładniej „jedną z wielu postaci, w której pojęcie nieskończoności występuje w analizie matematycznej" (1911, s. 221). Dokonanie to

> zasługuje na szczególną uwagę filozofa z tej przyczyny, iż z pojęcia tak mętnego, jakim jest pospolite pojęcie nieskończoności, zdołała wysnuć cały szereg pojęć i twierdzeń, które pod względem precyzji i jasności nie ustępują żadnym innym pojęciom matematycznym (1911, s. 221).

Powtórzmy: Zarembę interesowały zastosowania matematyki, zwłaszcza w fizyce. Rozważał też te zagadnienia z punktu widzenia filozofii i metodologii. Poświęcił im dwa artykuły – „O stosunku wzajemnym fizyki i matematyki" (1923) zamieszczony w *Poradniku dla samouków* i „Uwagi o metodzie w matematyce i fizyce" (1938).

Zrozumienie związków fizyki i matematyki Zaremba traktował jako „nadzwyczaj zajmujące ze stanowiska filozoficznego", jak i „konieczne do głębszego zrozumienia obu tych gałęzi wiedzy ludzkiej i biegu ewolucji każdej z nich" (1923, S. 131). Rolę matematyki w fizyce można, według niego, sprowadzić do tego, że:

> Samo sformułowanie większości z najważniejszych hipotez fizyki nieodzownie wymaga posługiwania się matematyką. [...]
>
> Z biegiem czasu teorie fizyki przybierają coraz bardziej charakter teorii matematycznych, a już w dobie obecnej matematyka jest głównym narzędziem, którym fizyka posługuje się do urzeczywistnienia swoich wywodów logicznych; wobec tego matematyka stanowi główny środek, którym posługuje się fizyka do dopięcia w miarę możności swych celów. [...]
>
> Historia fizyki poucza, że dedukcja matematyczna doprowadza niekiedy do odkrycia zjawisk nowych, których możliwości zgoła skądinąd nie przewidywano, a które dopiero a posteriori zostawały eksperymentalnie urzeczywistnione. [...]
>
> Pomiędzy pewnymi klasami zjawisk fizycznych, pozornie nic wspólnego nie mającymi, zachodzi ścisły związek ujawniający się w tym, że jedna i ta sama teoria matematyczna, zależnie od znaczenia nadanego jej symbolom, przedstawiać może teorię zjawisk którejkolwiek z tych klas (1923, s. 148–150).

Zdaniem Zaremby rachunek różniczkowy i całkowy jest dogodnym narzędziem pozwalającym formułować hipotezy. Matematyka nie zbudowała jednak jeszcze adekwatnego narzędzia do „uskuteczniania wywodów logicznych" i „zagadnienia nastręczane matematyce przez fizykę, połączone bywają z trudnościami, którym obecnie matematyka nie może jeszcze podołać w sposób zadowalający" (1923, s. 150).

Zależności między matematyką a fizyką nie są jednak jednostronne – również matematyka zawdzięcza wiele fizyce. Przykładów mogą tu dostarczyć choćby zagadnienia związane z teorią drgań struny czy problemy związane z teorią ciepła, które stymulowały badania nad równaniami różniczkowymi o pochodnych cząstkowych.

Powyższe tezy powtórzył Zaremba w artykule „Uwagi o metodzie w matematyce i fizyce" (1938). Podkreśla tam, że „w matematyce, jak i w fizyce rozumowanie dedukcyjne, czyli, dokładniej mówiąc, dowodzenie dedukcyjne odgrywa pierwszorzędną rolę" (1938, s. 31). Podkreśla przy tym wyraźnie, że rozumowanie dedukcyjne nie upoważnia nas do stwierdzenia prawdziwości dowodzonej tezy, a jedynie do „powiedzenia, że jeżeli wszystkie założenia, przyjęte w dowodzie twierdzenia T, są zdaniami słusznymi, to twierdzenie T jest także zdaniem słusznym" (1938, s. 32). Zwraca też uwagę na to, że postulaty teorii dedukcyjnej mogą być rozmaicie interpretowane. Zatem teorie takie nie dotyczą żadnych konkretnych przedmiotów. Mówiąc o wpływie fizyki na ewolucję matematyki, porównuje go do „wpływu nauczyciela na rozwój swojego ucznia, gdyby tenże poprzestawał niemal wyłącznie na stawianiu uczniowi rozumnie obmyślanych pytań przy podawaniu niekiedy niektórych wskazówek w odniesieniu do odpowiedzi" (1938, s. 33–34). Przytacza też słowa Josepha Fouriera, „jednego z głównych twórców fizyki matematycznej" (1938, s. 35), który pisał:

> Gruntowne badanie przyrody jest najobfitszym źródłem odkryć matematycznych. Badanie takie, nastręczając poszukiwaniom oznaczony cel, nie tylko wykluczają kwestie mętne i rachunki bez wyniku, lecz stanowią one pewny środek do tworzenia samej analizy i do odkrycia elementów, o poznanie których nam najbardziej chodzi i które ta nauka zawsze musi zachować: są to elementy podstawowe, które się powtarzają we wszystkich zjawiskach naturalnych[6] (Fourier 1888, t. 1, s. XXIII).

Zaremba podsumowuje swoje wywody, stwierdzając, że:

> Rola matematyki w rozwoju fizyki określona być może w niewielu wyrazach: przyjąwszy za postulaty hipotezy, nastręczane przez obserwację

---

[6] „L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non seulement cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure des questions vagues et les calculs sans issue: elle est encore un moyen assuré de former l'Analyse elle-même, et d'un découvrir les éléments qu'il nous importe le plus de connaître, et que cette science doit toujours conserver: ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels".

> i doświadczenie w odniesieniu do pewnej klasy zjawisk, zwracamy się do matematyki, żeby poznać następstwa logiczne powyższych postulatów; jeżeli fakty potwierdzą (z dostatecznym stopniem dokładności) powyższe wyniki, to teoria, która została rozwinięta koordynuje zjawiska rozważanej klasy; w razie przeciwnym powyższa teoria stanowi dowód na to, że układ postulatów, z którego się wyszło, winien być zmodyfikowany; ta ostatnia okoliczność może się objawić i bez zwracania się do faktów; żeby się to wydarzyło potrzeba i wystarcza, ażeby, przy rozwijaniu następstw przyjętych postulatów, okazało się, że rzeczone postulaty są sprzeczne ze sobą (1938, s. 36).

Zdaniem Zaremby więc matematyka odgrywa w stosunku do fizyki rolę służebną – mianowicie dostarcza fizyce narzędzi formalnych, z drugiej jednak strony sama rozwija się dzięki rozwiązywaniu zagadnień dostarczanych jej przez fizykę.

Wspomnieliśmy wyżej o zainteresowaniu Zaremby logiką matematyczną. Jego poglądy na temat miejsca i roli logiki pokrywały się z poglądami matematyków francuskich w tym zakresie. Zaremba traktował logikę jako dyscyplinę całkowicie służebną wobec klasycznych działów matematyki, przede wszystkim zaś za narzędzie dydaktyki matematycznej. W konsekwencji nie interesował się więc problemami teoretycznymi samej logiki. Pisał o sobie:

> Głębokie przekonanie, że w naukach matematycznych należy dążyć do maksimum precyzji i ścisłości skłoniło mnie do zajęcia się logiką (Szarski 1962, s. 26).

W rozprawie *La logique des mathématiques* (1926) Zaremba dobitnie daje wyraz temu przekonaniu, pisząc już we wstępie:

> Dodajmy, że logika teoretyczna jest powołana jeszcze do ścisłej służby dziełu koordynowania i upraszczania teorii matematycznych, dziełu które znakomity rozwój tych teorii czyni coraz bardziej koniecznym[7].

[7] „Ajoutons que la logique théorique est appelée encore à rendre de précieux services dans l'œuvre de coordination et de simplification des théories mathématiques, œuvre que le développement considérable des ces théories rend de plus en plus nécessaire".

Ponadto w sposób jasny i prosty przedstawił te działy logiki matematycznej, które jego zdaniem stanowią nieodzowne przygotowanie do studiów w różnych dziedzinach nauki. Podał też wyjaśnienie kilku paradoksów logicznych.

Z pełnym przekonaniem można więc powiedzieć, że Zaremba reprezentował pogląd, iż logika winna być „w matematyce" (*en mathématique*) i być *ancilla mathematicae* – odzwierciedla to już w jakimś sensie tytuł jego pracy *La logique des mathématiques*. Takie pojmowanie miejsca i roli logiki znalazło swój wyraz w polemice, jaka rozgorzała w związku z jego książką *Arytmetyka teoretyczna* (1912) i z analizą metodologiczną, jakiej dzieło to poddał Jan Łukasiewicz. Dyskusję tę opisaliśmy w paragrafie 1 w rozdziale 3. Przypomnijmy więc tu tylko, że spór nie dotyczył – jak można by wnosić z tytułu artykułu Łukasiewicza „O pojęciu wielkości. (Z powodu dzieła Stanisława Zaremby)" (1916) – definicji pojęcia wielkości, ale miał głębszy charakter. Był to w istocie spór programowy. Znakomicie oddał różnice w pojmowaniu roli logiki w matematyce i w kwestii stosunku tych dwóch nauk. Różnice postaw reprezentowanych przez Zarembę i Łukasiewicza dobrze uchwycił matematyk rosyjski Mikołaj N. Łuzin w liście do Arnauda Denjoy z 30 września 1926 roku, w którym pisał:

> Wydaje mi się, że życie matematyczne w Polsce toczy się dwiema całkiem różnymi drogami: jedna z nich ciąży ku klasycznym działom matematyki, druga zaś ku teorii mnogości (funkcji). Tendencje te w Polsce wykluczają się nawzajem, są sobie bardzo wrogie i obecnie trwa między nimi zacięta walka. Obydwie strony są bardzo energiczne, lecz jak mi się wydaje, siły ich są nierówne. [...] Stronę klasyczną reprezentuje obecnie tylko stary [...] uniwersytet krakowski. [...] Spośród matematyków polskich najbardziej nieugiętym zwolennikiem tej drogi jest p. profesor Zaremba. Inni zwolennicy tej drogi trzymają się blisko p. Zaremby. [...] Jednakże tendencja klasyczna zakończyła się w wielu miastach [...], gdzie zastąpiła ją tendencja szkoły p. Sierpińskiego (Łuzin 1983, s. 66).

Istotnie, Zaremba był raczej osamotniony w swojej postawie[8]. Sugeruje to zrelacjonowany w paragrafie 1 w rozdziale 3 przebieg dyskusji w *Przeglądzie Filozoficznym*. Warszawskie środowisko matematyczne przyznało rację Łukasiewiczowi, podzielając jego poglądy na miejsce i rolę logiki w stosunku do matematyki – zgodnie z nim logika matematyczna to nie dyscyplina peryferyjna w stosunku do matematyki (jak chciał Zaremba), ale przeciwnie, należy ona do centrum matematyki, a do tego winna być traktowana jako dyscyplina autonomiczna. Pogląd ten korespondował z programem warszawskiej szkoły matematycznej, w którym kładziono nacisk na teorię mnogości, podstawy matematyki i właśnie logikę matematyczną (por. paragraf 1 w rozdziale 2).

3. Witold Wilkosz

Pod wpływem Jana Sleszyńskiego logiką zainteresowało się kilku młodych matematyków krakowskich, wśród nich Witold Wilkosz[9]. Nie napisał on wprawdzie żadnego osobnego dzieła czy artykułu poświęconego filozofii matematyki, jednak w jego pracach można znaleźć wiele uwag natury filozoficznej. Nie są to może idee rewolucyjne, nie stanowią też zwartego systemu – dają jednak pojęcie o panujących wtedy w Polsce tendencjach i sympatiach filozoficznych. Świadczą też o zainteresowaniu polskich matematyków problematyką filozoficzną. Zwrócimy tu uwagę na niektóre z nich.

---

8 Dodajmy, że autorytet, jakim cieszył się Zaremba w środowisku krakowskim (choć oczywiście nie tylko w nim – był on przecież matematykiem o renomie międzynarodowej i niekwestionowanym autorytecie w całej Polsce), sprawił, że jego poglądy na rolę i miejsce logiki w stosunku do matematyki miały konsekwencje także na poziomie instytucjonalnym i wpłynęły na sytuację logiki w Krakowie. Mimo że około 1918 roku Kraków był znacznie bardziej zaawansowanym centrum logiki matematycznej niż Warszawa, to jednak nie w nim, ale właśnie w Warszawie powstała szkoła logiczna. O sile tradycji świadczy też fakt, że do dziś nie ma katedry czy zakładu logiki na Wydziale Matematyczno-Fizycznym Uniwersytetu Jagiellońskiego – co jest raczej wyjątkiem wśród polskich uniwersytetów.

9 Trzeba by wspomnieć w tym kontekście jeszcze Antoniego Marię Hoborskiego (1879–1940) i Ottona Nikodyma (1887–1974).

Zacznijmy od książeczki *Liczę i myślę. Jak powstała liczba* (1938a). Omawiając genezę pojęcia liczby, Wilkosz opowiada się po stronie koncepcji logiczno-teoriomnogościowej (przeciwstawianej koncepcji intuicjonistycznej odwołującej się do pierwotnej intuicji liczby), zgodnie z którą liczba i dotycząca jej arytmetyka wywodzi się z ogólniejszych intuicji związanych z równolicznością. Przytacza wiele przykładów natury psychologiczno-etnologicznej, które mają podbudować i zilustrować tę koncepcję. Według Wilkosza w procesie kształtowania się pojęcia liczby można wyróżnić trzy etapy: (1) umiejętność praktycznego stwierdzenia równoliczności zbiorów obiektów, (2) pomysł konkretnego, fizycznego zbioru „zastępczego", i wreszcie (3) mentalizacja czy interioryzacja owego zbioru zastępczego. To doprowadziło do powstania idei łańcucha służącego do odliczania – przykładem takiego łańcucha jest właśnie ciąg liczb naturalnych (0), 1, 2, 3 itd.[10]

Ważne dla metodologii matematyki i ogólnie nauk formalnych zagadnienia Wilkosz rozważa w artykule „Znaczenie logiki matematycznej dla matematyki i innych nauk ścisłych" (1936a)[11]. Uznając logikę za „nieodzowny składnik każdego systemu dedukcyjnego", stwierdza, że „logika dedukcyjna, a więc matematyczna, to *tylko narzędzie* [podkr. moje – R.M.] rozbudowy pierwotnych pojęć systemu drogą określeń i pierwotnych jego zdań drogą dowodzeń" (1936a, s. 343–344). Logika związana jest z systemami dedukcyjnymi i z metodą aksjomatyczną. Sama ta metoda została wprowadzona przez starożytnych Greków – Platon był bodaj pierwszym, który ją obmyślił, a Euklides w *Elementach* pokazał, jak ją można i należy stosować do matematyki. Na składnik logiczny tej metody nie zwracano jednak szczególnej uwagi, stosując raczej zdroworozsądkowe metody wnioskowania (sylogistyka Arystotelesa nie była tu specjalnie pomocna). Dopiero wiek XIX przyniósł zmianę i rozwój badań nad samą logiką. Ponieważ – jak pisze Wilkosz – „w praktyce spotykamy się niemal wyłącznie z systemami dedukcyjnymi w matematyce

[10] Liczba 0 została tu wzięta w nawias, ponieważ odgrywała ona specyficzną rolę wśród liczb naturalnych, ewoluując od symbolu pustego miejsca w zapisie pozycyjnym, aż po status pełnoprawnej liczby.

[11] Jest to autoreferat z odczytu.

i dla potrzeb matematyki" (1936a, s. 344), więc logika sama przybrała postać systemu dedukcyjnego, gdzie – jak pisze Wilkosz – „»logikę« zastępuje system »dyrektyw«". Wilkosz zwraca też uwagę na to, że:

> Metodologicznie logika formalna przybrała pewną postać nieco jednostronną. Wyrugowanie języka imion ogólnych na rzecz języka klas lub warunków zdaniowych, zarzucenie techniki konkludowania epicherematycznego, zatracenie różnicy między znanymi z gramatyki odcieniami zdań warunkowych jest teoretycznie najzupełniej dopuszczalne. Ale czy korzystne w praktyce? (1936a, s. 346)

Sukcesy, jakie dzięki metodzie aksjomatycznej odniosła matematyka, sprawiły, że próbuje się ją stosować i w innych naukach. Ocena tych prób według Wilkosza jest „bardzo krytyczna":

> Metoda aksjomatyczna ma swe naturalne miejsce tam, gdzie główne hipotezy danej konkretnej nauki opłaca się uważać, choćby na jakiś czas, za niewymagające zmian. Wtedy przełożenie ich na język poddający się procesom logicznym i wtłoczenie ich w metodykę dedukcyjną może przynieść korzyści, a teoria dysponować będzie dostateczną ilością czasu, by swe żmudne dowodzenie przeprowadzić z całą precyzją (1936a, s. 345).

Niewiele jednak nauk podąża tą drogą. Nawet fizyka teoretyczna nie stosuje jej w całej pełni. Powodem może być to, że „aksjomatyzacja zmuszałaby niejednokrotnie do nadmiernej symplifikacji założeń i zwężeń tematu" (1936a, s. 345). Z drugiej strony, zdaniem Wilkosza, „przyszedł już czas na stosowanie dzisiejszej precyzji w naukach takich jak ekonomia, socjologia – nie mówiąc już o filologii[12] czy historii" (1936a, s. 345). Wilkosz wspomina też o możliwości stosowania jej w teologii[13].

---

[12] Warto tu wspomnieć o zainteresowaniach Wilkosza filologią i językami wschodnimi. Po zdaniu matury Wilkosz otrzymał stypendium i studiował kilka miesięcy na uniwersytecie w Bejrucie, a po powrocie zapisał się na studia filologii klasycznej i języków wschodnich na Uniwersytecie Jagiellońskim, porzucając je po dwóch latach na rzecz matematyki.

[13] Być może ma tu Wilkosz na myśli także prace podjęte przez tzw. Koło Krakow-

Podkreślone wcześniej niedostatki logiki formalnej, a więc pewne jej nieprzystawanie do „naturalnych" sposobów wnioskowania i forma systemu dedukcyjnego, to, że „postać jej dzisiejsza i poręczność procederów wedle jej wymogów nie przedstawia się świetnie" powodują, że „niezmiernie odstrasza np. matematyków, nie zajmujących się zawodowo logiką, od posługiwania się nią w całej rozciągłości" (1936a, s. 346).

Należy zwrócić tu uwagę na trafność spostrzeżeń Wilkosza. Istotnie, wydaje się, że logika matematyczna i metoda aksjomatyczna mogą raczej służyć do rekonstrukcji rzeczywiście uprawianej matematyki, a nie dają adekwatnego obrazu tego, jak matematyka jest rzeczywiście uprawiana. Stąd popularność intensywnie dziś rozwijanych nurtów filozofii matematyki, zwracających uwagę raczej na praktykę badawczą matematyków, a nie na jej rekonstrukcję jako systemu naukowego w celu wykazania jej niesprzeczności (co było zasadniczym celem kierunków klasycznych, takich jak logicyzm, intuicjonizm czy formalizm).

Omówimy tu jeszcze jedną pracę Wilkosza zawierającą treści filozoficzne – a mianowicie jego artykuł „O definicji przez abstrakcję" (1938b). Poświęcony jest on stosowanej często w nauce (w szczególności w matematyce) procedurze wprowadzania nowych obiektów (abstrakcyjnych) przez abstrahowanie od pewnych cech szczególnych i wyidealizowywanie cech nas interesujących. Wilkosz stawia sobie za cel popularne, a przy tym ścisłe ujęcie tej metody za pomocą teoriomnogościowej zasady abstrakcji i relacji równoważnościowych przy jednoczesnym podkreśleniu problemów natury ontologicznej z tym związanych.

Nie będziemy tu zatrzymywać się nad samą zasadą abstrakcji znaną przecież dziś każdemu studentowi, który wysłuchał wykładu z logiki i teorii mnogości, a zatrzymamy się nad kwestiami filozoficznymi. Otóż Wilkosz wyprowadza swe sądy od stwierdzenia nieistnienia zasady definiowania przez abstrakcję (Wilkosz proponuje zresztą nazwę „definiowanie abstraktów" jako bardziej adekwatną)

skie (I.M. Bocheński, F. Drewnowski, J. Salamucha), które próbowało stosować metody logiczno-aksjomatyczne do zagadnień filozoficznych i teologicznych.

sformułowanej przez Giuseppe Peana w pracy *Notions de Logique Mathématique* (Torino 1894). Peano pisał, że w przypadku relacji równoważności R można wprowadzić „nowe przedmioty (logiczne)" postaci φx, żądając, by zdanie aRb było zawsze równoważne zdaniu $\varphi a = \varphi b$. Już Russell pytał o to, co to znaczy, że wprowadzamy nowe obiekty, jak to czynimy i na mocy czego? Nie zadowalała go odpowiedź Georga Cantora mówiącego, że czynimy to „dzięki naszej aktywnej zdolności myślenia". I zaproponował utożsamianie abstraktu przedmiotu a ze zbiorem tych elementów x pola relacji R, dla których zachodzi aRx. Sposób ten, aczkolwiek zadowalający pod względem formalnym, nie może być w pełni zadowalający na gruncie języka codziennego, gdzie też tworzymy przecież abstrakty i posługujemy się nimi. Wilkosz proponuje więc jeszcze inne sposoby rozwiązania tych trudności (natury ontologicznej). Otóż sugeruje on, by „nazwać abstraktem przedmiotu *termin klasowy* (imię wspólne) wszystkich i tylko tych przedmiotów, które z nim wchodzą w dany stosunek" (1938b, s. 10). Można też za abstrakt przedmiotu a z pola relacji R przyjąć „pewien określony i oznaczony wedle osobnego przepisu *przedmiot z pola R*, który jest R-równoważny elementowi a (być może jest nim właśnie a) pod warunkiem, że o ile aRb, to a i b przypiszemy ten sam przedmiot" (1938b, s. 11). Mówi tu o metodzie przez reprezentację. Inną jeszcze możliwością jest sposób polegający na tym, że w ogóle nie określa się, czym jest abstrakt $Abs_R a$ danego elementu a względem relacji R, a po prostu posługujemy się nim – jak mówi Russell – *in use*. Dokładniej: zamiast określać, czym jest $Abs_R a$, „określamy, co oznaczają zdania wypowiedziane o $Abs_R a$" (1938b, s. 11).

Warto też zwrócić uwagę na to, że Wilkosz w omawianym artykule, rozważając identyczność (w szczególności identyczność abstraktów), odwołuje się do klasycznej definicji tego pojęcia pochodzącej od Leibniza i głoszącej, iż $a = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy „każde orzeczenie o przedmiocie a jest równocześnie orzeczeniem o przedmiocie b, jednocześnie z nim prawdziwym lub fałszywym" (1938b, s. 7). Znajduje on przy tym źródło tej definicji już u św. Tomasza z Akwinu, który w *Sumie teologicznej* (questio XL, art. I,3) pisał: „Quaecumque sunt idem, ita se habent, quod quidquid praedicatur de uno, praedicatur et de alio".

Zakończenie

Z przeprowadzonych w poprzednich rozdziałach analiz wynika wyraźnie, że matematycy i logicy polscy okresu międzywojennego interesowali się zagadnieniami filozoficznymi związanymi z matematyką i logiką. Byli dobrze zorientowani w aktualnych tendencjach panujących w tej dziedzinie w nauce światowej, świetnie orientowali się w literaturze, formułowali rozmaite komentarze na temat logicyzmu, intuicjonizmu czy formalizmu. Prowadzono też badania historyczne nad rozmaitymi kwestiami filozofii matematyki i logiki – w tym kontekście trzeba wspomnieć ważną i aktualną do dziś pracę Zbigniewa Jordana *O matematycznych podstawach systemu Platona. Z historii racjonalizmu* (1937)[1].

Matematycy i logicy polscy okresu międzywojennego formułowali też pewne własne koncepcje filozoficzne dotyczące logiki i matematyki. Z drugiej strony – i to jest chyba cecha charakterystyczna logików i matematyków polskich rozważanego okresu – uważali, że badania matematyczne i logiczne nie powinny być krępowane żadnymi przyjmowanymi *a priori* założeniami natury filozoficznej. Matematyka i logika winny być autonomiczne i neutralne w stosunku do filozofii. Stąd wypowiedzi na temat filozoficznych aspektów związanych z matematyką czy logiką były raczej fragmentaryczne i niekompletne, dotyczyły przede wszystkim kwestii szczegółowych związanych z badanymi aktualnie problemami. Nie dążono do sformułowania całościowej koncepcji filozofii matematyki i logiki. Formułowane uwagi to często po prostu komentarze do konkretnych wyników technicznych z podstaw matematyki czy logiki. Co więcej,

---

[1] Jordan dowodził w tej rozprawie, że „Platon był pierwszym filozofem matematyki" oraz że był „odkrywcą metody aksjomatycznej" i „pierwszym metodologiem systemu dedukcyjnego" (1937, s. 14). Podkreślał też, że to Platon jako pierwszy „zwrócił uwagę na doniosłość badań logicznych nad matematyką, konieczność analizy metod już stosowanych i projektowania metod nowych" (1937, s. 14).

nie zawsze dbano o ich konsekwencje i o spójność deklarowanych poglądów z praktyką badawczą. Widać to na przykład u Tarskiego, zwolennika nominalizmu, który w swej pracy badawczej bez skrępowania i bez ograniczeń stosował metody infinitystyczne, dalekie od akceptowanych przez nominalizm[2]. Poglądy filozoficzne były wśród polskich logików i matematyków sprawą niejako prywatną i na czas pracy badawczej nad konkretnymi zagadnieniami matematycznymi czy logicznymi winny zostać zawieszone. Kiedy już formułowano pewne tezy natury filozoficznej, to rozpatrywano i precyzowano różne możliwe stanowiska, unikając opowiadania się jednoznacznie po stronie któregoś z nich i nie udzielając definitywnych i ostatecznych odpowiedzi.

Dobrą ilustracją takiej postawy jest stanowisko matematyków i logików polskich wobec budzących kontrowersje aksjomatów teorii

---

[2] Oprócz Tarskiego sympatykami nominalizmu byli także i inni polscy logicy i matematycy, na przykład Chwistek, Leśniewski czy Kotarbiński (por. paragrafy 2 w rozdziale 2, 3 i 4 w rozdziale 3). Odegrali oni ważną rolę w odrodzeniu zainteresowania nominalizmem na świecie. Pisze o tym L. Henkin w artykule „Nominalistic Analysis of Mathematical Language", w którym czytamy m.in. (1962, s. 187–188): „Podczas gdy nominalistyczna tradycja w filozofii jest oczywiście bardzo dawna, zwrócenie uwagi na ten punkt widzenia specjalnie w odniesieniu do analizy języka *matematycznego* po raz pierwszy jasno daje się zauważyć w polskiej szkole logików początków tego stulecia. Z tą działalnością związane są nazwiska Leśniewskiego, Kotarbińskiego, Chwistka i jego ucznia Hetpera, oraz Tarskiego. [...] Jeżeli nie liczyć kilku artykułów Russella, to zainteresowania polskich logików bodaj że nie znajdowały odzewu poza granicami ich własnej ojczyzny. Lecz po wyjeździe Tarskiego w 1938 roku [Tarski wyjechał do USA w sierpniu 1939 roku, a nie – jak pisze Henkin – w roku 1938 – uwaga moja, R.M.] do Stanów Zjednoczonych, tam, a następnie w krajach zachodniej Europy, zaczęło się pojawiać zainteresowanie nominalizmem". ("While the nominalistic tradition in philosophy is of course very ancient, a specific concentration of interest in this viewpoint, as applied especially to the analysis of *mathematical* language, can be clearly discerned in the work of the Polish school of logicians of the early decades of this century. The names of Lesniewski, T. Kotarbinski, Chwistek and his student Hetper, and Tarski are all associated with this activity. [...] Aside from some writings of Russell this interest of the Polish logicians did not seem to be reflected outside of their own country. But with the transplantation of Tarski to the United States in 1938 the concern with nominalism made itself evident in this country, and subsequently in countries of western Europe").

mnogości, w szczególności wobec aksjomatu wyboru czy hipotezy kontinuum. Uważano, że rozstrzygnięcie filozoficznej kwestii ich prawomocności winno być uzyskane na podstawie i z uwzględnieniem technicznych wyników ściśle matematycznych mówiących o konsekwencjach takich założeń.

U źródeł więc i podstaw świetnego rozwoju logiki i matematyki w Polsce międzywojennej nie leżała żadna ideologia lub ściśle określona koncepcja filozoficzna. W polskiej szkole matematycznej stworzono co prawda kierunek teoriomnogościowy, ale miał on charakter metodologiczny, a nie ściśle filozoficzny (w sensie przyjęcia z góry pewnych rozstrzygnięć ontologicznych czy epistemologicznych, jak to miało miejsce na przykład w intuicjonizmie). W warszawskiej szkole logicznej ważna była filozofia – w szczególności konkretne badania logiczne były często motywowane filozoficznie (tak było dla przykładu z logikami wielowartościowymi Łukasiewicza czy z semantyczną definicją prawdy Tarskiego). Z chwilą jednak sformułowania problemów natury logicznej ich motywacja filozoficzna przestawała odgrywać jakąkolwiek rolę i ważne były jedynie techniczne badania logiczne i uzyskane metodami logiki matematycznej wyniki. Wyjątkami od tej reguły byli jedynie Leon Chwistek i Stanisław Leśniewski, którzy interesowali się tylko problemami logicznymi wynikającymi z ich własnych poglądów filozoficznych dotyczących podstaw logiki i matematyki. Ich poglądy filozoficzne generowały ich zainteresowanie badawcze konkretnymi problemami logicznymi, ich badania logiczne były motywowane ich poglądami filozoficznymi.

Jakie były źródła opisanej postawy logików i matematyków polskich okresu międzywojennego w stosunku do filozofii logiki i matematyki? Wydaje się (por. Woleński 1996), że należy dopatrywać się ich z jednej strony w odróżnieniu praktyki badawczej od filozoficznych sporów dotyczących podstaw matematyki, co wyraźnie postulowano w polskiej szkole matematycznej, a co dobitny wyraz znalazło w szczególności w postawie badawczej, jaką zajęto w sporze wokół aksjomatu wyboru, a z drugiej strony w postulowanej przez Kazimierza Twardowskiego i stworzoną przezeń szkołę filozoficzną zasadzie odróżniania nauki i światopoglądu. Zgodnie z tym ostatnim postulatem, gdy zajmujemy się konkretną dyscypliną naukową, to zagadnienia filozoficzne z nią związane stają się wtedy rodzajem światopoglądu, gdy natomiast badamy kwestie filozoficzne, to czynić to powinno się metodami naukowymi i wówczas na serio traktować program filozofii naukowej.

Owocem przyjęcia opisanej zasady oddzielenia i niemieszania kwestii filozoficznych i kwestii ściśle naukowych związanych z matematyką i logiką był znakomity rozwój polskiej matematyki i logiki matematycznej w okresie dwudziestolecia międzywojennego.

Biogramy

Ajdukiewicz Kazimierz urodził się 12 grudnia 1890 roku w Tarnopolu. Studiował filozofię, fizykę i matematykę na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie. W roku 1912 uzyskał stopień naukowy doktora – promotorem rozprawy doktorskiej był Kazimierz Twardowski. W 1913 zdał egzamin państwowy na nauczyciela matematyki w szkole średniej. W latach 1913–1914 kontynuował studia na uniwersytecie w Getyndze, gdzie słuchał wykładów Edmunda Husserla, Leonarda Nelsona i Davida Hilberta. Poglądy tego ostatniego wywarły znaczny wpływ na Ajdukiewicza, co ujawniło się m.in. w jego rozprawie habilitacyjnej. Z chwilą wybuchu I wojny światowej został powołany do armii austriackiej, a w 1915 wysłany na front włoski. W październiku 1918 objął w Krakowie w imieniu Wojska Polskiego dowództwo baterii, a potem – pociągu pancernego. Do września 1919 uczestniczył w walkach w okolicach Lwowa. W roku 1920 brał udział w wojnie polsko-rosyjskiej. W latach 1919–1922 pracował jako nauczyciel w gimnazjum lwowskim, a jednocześnie prowadził badania naukowe. W roku 1921 habilitował się na Wydziale Filozoficznym Uniwersytetu Warszawskiego. W latach 1922–1925 wykładał jako docent prywatny na uniwersytecie we Lwowie oraz uczył w lwowskich szkołach średnich. W roku 1925 został profesorem Uniwersytetu Warszawskiego, a od 1928 był profesorem uniwersytetu we Lwowie. W latach 1940–1941 wykładał psychologię we Lwowskim Państwowym Instytucie Medycznym. W czasie okupacji niemieckiej pracował jako księgowy, a jednocześnie był czynny w tajnym nauczaniu. W latach 1944–1945 kierował Katedrą Fizyki Uniwersytetu Iwana Franki we Lwowie. W roku 1945 objął Katedrę Teorii i Metodologii Nauk w Uniwersytecie Poznańskim, gdzie też w latach 1948–1952 piastował stanowisko rektora. W roku 1954 przeniósł się na Uniwersytet Warszawski. Zmarł 12 kwietnia 1963 roku w Warszawie.

Ajdukiewicz pracował naukowo przede wszystkim w zakresie semiotyki, epistemologii i ogólnej metodologii nauk. Bliski był mu zawsze antyirracjonalizm i empiryzm. Był autorem ważnych i cenionych podręczników.

Chwistek Leon[1] urodził się 13 czerwca 1884 roku w Krakowie. Studiował filozofię i matematykę na Uniwersytecie Jagiellońskim oraz (jako wolny słuchacz) na krakowskiej Akademii Sztuk Pięknych u Józefa Mehoffera. W roku 1906 doktoryzował się na uniwersytecie krakowskim na podstawie rozprawy „O aksjomatach". Od roku 1906, przez dwadzieścia lat z przerwami, nauczał matematyki w III Gimnazjum im. J. Sobieskiego (którego sam był absolwentem). W latach 1908–1909 kontynuował studia filozoficzne w Getyndze (gdzie słuchał m.in. wykładów Hilberta), w 1910 przebywał w Wiedniu – tam zafascynowało go weneckie malarstwo renesansowe, a w latach 1913–1914 studiował rysunek w Paryżu. W okresie od 1914 do 1916 był w szeregach Pierwszej Brygady Legionów. Od 1922 roku prowadził wykłady zlecone z matematyki dla przyrodników na Uniwersytecie Jagiellońskim. Habilitował się w roku 1928 w Krakowie, a w 1930 otrzymał Katedrę Logiki Matematycznej na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym. W czerwcu 1941 roku opuścił Lwów wraz z armią radziecką. Osiadł w Tyflisie (dziś Tbilisi), gdzie nauczał analizy matematycznej. Od roku 1943 mieszkał w Moskwie. Działał w Związku Patriotów Polskich. Zmarł 21 sierpnia 1944 roku w Moskwie (inne źródła podają, że 27 sierpnia 1944 roku w Barwiszach koło Moskwy).

Chwistek zajmował się wieloma dziedzinami: logiką formalną, teorią sztuki, był też twórczym malarzem. Jest autorem dwóch powieści: *Kardynał Paniflet* (napisana w 1906 roku i zniszczona w rękopisie w 1917) oraz *Pałace Boga* (napisana w latach 1932–1933, drukowana częściowo w odcinkach w latach 1934 i 1939, po wojnie w Państwowym Instytucie Wydawniczym w latach 1968 oraz 1979 ukazała się rekonstrukcja tej powieści).

Dickstein Samuel urodził się w Warszawie 12 maja 1851 roku. Po ukończeniu gimnazjum w latach 1866–1869 studiował w Szkole Głównej, a po jej zamknięciu, i przemianowaniu na uniwersytet carski, na Uniwersytecie Warszawskim (1869–1870), gdzie w roku 1876 uzyskał tytuł magistra matematyki. Od 1870 pracował w gimnazjach i w Szkole Handlowej Kronenberga jako nauczyciel matematyki. W latach 1888–1898 prowadził własną szkołę realną. Po rozpoczęciu w roku 1915 działalności (polskiego) Uniwersytetu Warszawskiego otrzymał nominację na profesora zwyczajnego matematyki. W roku 1919 został profesorem honorowym matematyki i historii na-

[1] Wiele szczegółowych informacji biograficznych na temat Chwistka można znaleźć w książce K. Estreichera *Leon Chwistek. Biografia artysty* (*1884–1944*) (1971).

uki. Wykładał do 1937 roku, prowadząc zajęcia głównie z algebry i historii nauki. Zmarł 29 września 1939 roku w Warszawie.

Hoene-Wroński Józef Maria urodził się (jako Józef Stefan Hoene) 23 sierpnia 1776 roku[2] w Wolsztynie. W latach 1786–1790 uczęszczał do Szkoły Wydziałowej w Poznaniu. W roku 1792 wstąpił do wojska, zmieniając nazwisko na Wroński. Wzięty do niewoli w bitwie pod Maciejowicami wstąpił do armii rosyjskiej. W 1796 roku zrezygnował z kariery wojskowej i podjął studia na uniwersytetach w Halle i Getyndze. W 1800 wyjechał do Anglii, a następnie do Francji, gdzie zamierzał wstąpić do Legionów Generała Dąbrowskiego. 15 sierpnia 1803 roku doznał – jak twierdził – iluminacji. Na pamiątkę tego wydarzenia przybrał imię Maria. Przez całe życie był uczonym prywatnym. Zamierzał stworzyć nową filozofię – „filozofię achrematyczną" (od greckiego *chrema* – rzecz) oraz dokonać gruntownej rekonstrukcji systemu nauki. Był także konstruktorem przyrządów matematycznych oraz reformatorem lokomocji. Angażował się też, przez swą działalność publicystyczną, w życie polityczne. Zaliczany do nurtu filozofii mesjanistycznej. Autor kilkuset prac z różnych dziedzin, z których wiele pozostało w rękopisach (por. Dickstein 1896b).

Zmarł 10 sierpnia 1853 roku. Na jego nagrobku wyryto m.in. słowa: „L'acte de chercher la Verité accuse le pouvoir de la trouver" (Akt poszukiwania Prawdy świadczy o możności jej znalezienia).

Janiszewski Zygmunt urodził się 12 lipca 1888 roku w Warszawie. Ukończył w 1907 roku gimnazjum we Lwowie, a następnie studiował matematykę i filozofię w Zurychu, Monachium, Getyndze i Paryżu. W roku 1911 doktoryzował się w zakresie topologii w Paryżu pod kierunkiem Henriego Lebesgue'a (w skład komisji wchodzili Henri Poincaré i Maurice Fréchet). Od 1911 roku wykładał na wyższych latach Towarzystwa Kursów Naukowych w Warszawie (była to namiastka polskiego uniwersytetu, w zaborze rosyjskim istniał jedynie uniwersytet rosyjski w Warszawie). W roku 1913 habilitował się na uniwersytecie we Lwowie. Do wybuchu I wojny światowej wykładał tam teorię funkcji analitycznych i rachunek funkcyjny. Jako jeden z pierwszych wstąpił do Legionów i odbył – jako prosty żołnierz artylerii – kampanię zimową 1914/1915 w Karpatach. W roku 1916 – odmó-

[2] Jest to data najbardziej prawdopodobna. Sam Wroński w notce biograficznej dla policji z 1801 roku podał 20 sierpnia 1776 roku jako datę urodzin, na jego płycie nagrobnej zaś wyryto datę 24 sierpnia 1776 roku.

wiwszy złożenia przysięgi rządowi austriackiemu – schronił się pod fałszywym nazwiskiem Zygmunta Wicherkiewicza w radomskiem (w Boiskach koło Zwolenia). Stamtąd przeniósł się do Ewina koło Włoszczowej, gdzie do końca wojny opiekował się bezdomnymi dziećmi w ochronce, którą stworzył i prowadził. W roku 1918 został powołany na otwarty w 1915 roku polski Uniwersytet Warszawski. Prowadził tu ożywioną działalność naukową, dydaktyczną i wydawniczą. Zmarł (po trzydniowej chorobie) 3 stycznia 1920 roku na hiszpankę.

Prace Janiszewskiego dotyczyły głównie topologii, stąd też uważany jest za jednego z twórców warszawskiej szkoły topologii. Był autorem programu rozwoju polskiej matematyki (który stał się podstawą powstania polskiej szkoły matematycznej). Był współtwórcą pierwszego w świecie wyspecjalizowanego czasopisma matematycznego *Fundamenta Mathematicae*.

Kotarbiński Tadeusz urodził się 31 marca 1886 roku w Warszawie. Uczęszczał do V Gimnazjum Rządowego (z rosyjskim jako językiem wykładowym). Za udział w strajku szkolnym w 1905 roku został tuż przed maturą relegowany. Wyjechał do Krakowa, gdzie przez rok studiował jako wolny słuchacz – głównie matematykę i fizykę. Maturę zdał w roku 1906 w prywatnym Gimnazjum Chrzanowskiego (z polskim językiem wykładowym). Udał się do Lwowa, a następnie do Darmstadtu, aby studiować tam architekturę. Jednak świadectwo dojrzałości z prywatnego gimnazjum nie było uznawane przez władze. Wyjechał więc do Parnawy (Estonia), gdzie w roku 1907 uzyskał rządowe świadectwo maturalne. Następnie studiował filozofię we Lwowie pod kierunkiem Kazimierza Twardowskiego. W roku 1912 uzyskał doktorat. Wrócił do Warszawy, gdzie zdał egzamin kwalifikacyjny i podjął pracę jako nauczyciel greki i łaciny w Gimnazjum im. Mikołaja Reja. W 1918 rozpoczął wykłady filozofii na Uniwersytecie Warszawskim. W 1919 został profesorem nadzwyczajnym, a w 1929 – profesorem zwyczajnym. W latach 30. przyjął zdecydowaną postawę sprzeciwiającą się antysemityzmowi i tzw. gettu ławkowemu. W czasie okupacji brał udział w tajnym nauczaniu. Po zakończeniu wojny pracował na Uniwersytecie Warszawskim oraz w Łodzi, gdzie organizował uniwersytet. Został jego pierwszym rektorem. Jednocześnie uczestniczył w pracach nad reaktywowaniem działalności Uniwersytetu Warszawskiego. Kierował katedrą filozofii, a od roku 1951 – katedrą logiki tegoż uniwersytetu. W latach 1957–1962 był prezesem Polskiej Akademii Nauk. Zajmował się filozofią, logiką, etyką, prakseologią. Zmarł w Warszawie 3 października 1981 roku.

Leśniewski Stanisław urodził się 30 marca 1886 roku (18 marca 1886 roku według kalendarza juliańskiego) w Sierpuchowie na wschód od Moskwy. Po ukończeniu gimnazjum w Irkucku studiował w Niemczech (m.in. w Monachium, pewne źródła mówią też o studiach w Zurychu, Heidelbergu i Lipsku). W roku 1912 uzyskał doktorat pod kierunkiem Kazimierza Twardowskiego na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie. Następnie przebywał we Francji, Włoszech i w Petersburgu. W latach 1913–1915 mieszkał w Warszawie (był członkiem SDKPiL, do partii przyjmował go Feliks Dzierżyński). W latach 1915–1918 uczył matematyki w polskich szkołach średnich w Moskwie i wykładał na tzw. Wyższym Kursie. W Moskwie poznał Wacława Sierpińskiego, który wprowadził go do grupy Mikołaja N. Łuzina zainteresowanej teorią mnogości. W roku 1918 wrócił do Warszawy, gdzie w 1919 objął katedrę filozofii matematyki na Uniwersytecie Warszawskim. Zmienił swe poglądy społeczno-polityczne, stając się konserwatystą, a także antysemitą (trzeba jednak podkreślić, że nie brał udziału w antysemickich ekscesach lat 30.). Wraz z Janem Łukasiewiczem był twórcą warszawskiej szkoły logicznej. Zajmował się logiką i podstawami matematyki. Próbując ugruntować matematykę i wyeliminować antynomie, stworzył własne systemy logiczne: rachunku zdań (prototetyka), rachunku nazw (ontologia), teorii zbiorów w sensie kolektywnym (mereologia). Zmarł w Warszawie 13 maja 1939 roku.

Łukasiewicz Jan urodził się 21 grudnia 1879 roku we Lwowie. Studiował filozofię pod kierunkiem Kazimierza Twardowskiego na uniwersytecie we Lwowie. Doktorat uzyskał w roku 1902, po czym wyjechał na dalsze studia za granicę, m.in. do Niemiec i Belgii. W 1906 roku habilitował się we Lwowie i został docentem Uniwersytetu Jana Kazimierza, a w 1911 roku mianowany profesorem nadzwyczajnym. W roku 1915 został zaproszony do objęcia jednej z katedr reaktywowanego Uniwersytetu Warszawskiego, którego profesorem był do 1944 roku. W roku 1920 objął katedrę filozofii na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym. W latach 1918–1920 pracował na stanowisku dyrektora Departamentu Szkół Wyższych w Ministerstwie Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego, a w roku 1919 objął kierownictwo tego ministerstwa w gabinecie Ignacego Jana Paderewskiego. Dwukrotnie, w latach 1922–1923 i 1931–1932 pełnił funkcję rektora Uniwersytetu Warszawskiego. W czasie II wojny światowej pracował w magistracie oraz brał udział w tajnym nauczaniu. W roku 1944 dzięki pomocy Heinricha Scholza, profesora uniwersytetu w Münster, wyjechał z Polski. Celem była Szwajcaria. Bombardowania Niemiec wymusiły jednak zmianę planów – po pobycie w Münster, udał się do Belgii. W roku 1946 objął katedrę logiki w Królewskiej Akademii Nauk w Dublinie, którą kierował do końca życia. Zmarł 13 lutego 1956 roku.

Łukasiewicz zajmował się filozofią (zwłaszcza w początkowym okresie twórczości, tzn. w latach 1902–1918) oraz logiką (głównie w okresie 1918–1956). Był jednym z pierwszych uczonych polskich zajmujących się profesjonalnie logiką matematyczną. Był też pierwszym polskim wykładowcą logiki matematycznej jako odrębnego przedmiotu akademickiego. Wraz ze Stanisławem Leśniewskim tworzył warszawską szkołę logiczną.

Mazurkiewicz Stefan urodził się 25 września 1888 roku w Warszawie. Po ukończeniu w roku 1906 szkoły średniej studiował w Krakowie, Monachium, Getyndze i Lwowie. W roku 1913 doktoryzował się we Lwowie pod kierunkiem Wacława Sierpińskiego. Po otwarciu Uniwersytetu Warszawskiego w roku 1915 prowadził tam wykłady. W roku 1919 habilitował się na Uniwersytecie Jagiellońskim. W tym też roku został powołany na stanowisko profesora Uniwersytetu Warszawskiego. Pełnił funkcję prorektora, kilkakrotnie był też dziekanem Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego. Należał do grona współtwórców polskiej szkoły matematycznej. Razem z Sierpińskim i Janiszewskim był założycielem czasopisma *Fundamenta Mathematicae*. Zajmował się topologią, analizą matematyczną i rachunkiem prawdopodobieństwa, a także kryptologią. W latach 1920–1939 współpracował z Biurem Szyfrów. Złamał szyfr używany przez armię radziecką, co umożliwiło polskiemu sztabowi generalnemu przechwytywanie rozkazów sztabu Tuchaczewskiego i przyczyniło się do zwycięstwa w Bitwie Warszawskiej[3]. Zmarł 19 czerwca 1945 roku w Grodzisku Mazowieckim.

Mehlberg Henryk urodził się 7 października 1904 roku w Kopyczyńcach koło Lwowa. Studiował na Uniwersytecie Jan Kazimierza we Lwowie, następnie we Fryburgu oraz na Sorbonie i w Collège de France. Jako stypendysta przebywał na stażu u Moritza Schlicka w Wiedniu. Zaliczany do drugiej generacji szkoły lwowsko-warszawskiej. W czasie okupacji posługiwał się – ze względu na żydowskie pochodzenie – dokumentami na nazwisko Suchodolski. Po II wojnie światowej pracował na Uniwersytecie Warszawskim i na Uniwersytecie Łódzkim. Po wyemigrowaniu do Kanady był profesorem na uniwersytecie w Toronto. Po przeniesieniu się do

[3] Por. Nowik (2004), s. 25, 232 oraz 925. Dodajmy, że z Biurem Szyfrów współpracowali także W. Sierpiński i S. Leśniewski.

USA pracował na uniwersytetach w Princeton, Chicago oraz Gainsville. Zajmował się filozofią nauk formalnych, pozaformalnych oraz problemami związków pomiędzy nauką i filozofią. Zmarł 10 grudnia 1979 roku w Gainville (Floryda, USA).

Mostowski Andrzej urodził się 1 listopada 1913 roku we Lwowie. W latach 1923–1931 uczęszczał do Gimnazjum im. Stefana Batorego w Warszawie. W roku 1931 rozpoczął studia matematyczne na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Uniwersytetu Warszawskiego. Największy wpływ wywarli tu na niego Alfred Tarski i Adolf Lindenbaum. Studia ukończył w roku 1936. W roku akademickim 1936/1937 przebywał w Wiedniu, a w roku 1937/1938 w Zurychu, gdzie słuchał m.in. wykładów Kurta Gödla, Hermanna Weyla oraz Wolfganga Pauliego. Po powrocie do Warszawy obronił w lutym 1939 roku rozprawę doktorską, której promotorem był Kazimierz Kuratowski (funkcji tej nie mógł pełnić Tarski, faktyczny opiekun naukowy Mostowskiego, ponieważ nie był wtedy profesorem). W styczniu 1939 roku podjął pracę w Państwowym Instytucie Meteorologicznym w Warszawie. W czasie wojny pracował jako księgowy. W latach 1942–1944 uczył na tajnym Uniwersytecie Warszawskim. Habilitował się w 1945 na Uniwersytecie Jagiellońskim. Od 1946 aż do śmierci pracował na Uniwersytecie Warszawskim, od 1947 jako profesor nadzwyczajny, a od 1951 jako profesor zwyczajny. Zmarł 22 sierpnia 1975 roku w Vancouver (Kanada).

Mostowski zajmował się logiką matematyczną i podstawami matematyki, w szczególności teorią mnogości, teorią rekursji, teorią modeli, rachunkami logicznymi i teorią dowodu.

Sierpiński Wacław urodził się 14 marca 1882 roku w Warszawie. Po ukończeniu gimnazjum klasycznego w latach 1900–1904 studiował na Wydziale Fizyko-Matematycznym Cesarskiego Uniwersytetu Warszawskiego. Po ukończeniu studiów i uzyskaniu stopnia kandydata nauk (oraz złotego medalu za pracę z teorii liczb) podjął pracę jako nauczyciel matematyki i fizyki w gimnazjum żeńskim. W latach 1905–1906 studiował na Wydziale Filozoficznym Uniwersytetu Jagiellońskiego, gdzie w roku 1906 uzyskał stopień doktora filozofii. Po powrocie do Warszawy uczył w polskich szkołach prywatnych. W roku 1907 wyjechał na kilkumiesięczne studia do Getyngi, gdzie zetknął się z Constantinem Caratheodorym. W roku 1908 habilitował się na uniwersytecie we Lwowie. W 1909 Sierpiński rozpoczął we Lwowie wykłady – m.in. z teorii mnogości[4]. W roku 1910 otrzymał nominację na profesora nadzwyczajnego. Kierował jedną z dwóch katedr matematyki (drugą zarządzał Józef Puzyna). Na początku I wojny światowej został – jako poddany austriacki – internowany (w Wiatce) przez władze rosyjskie[5]. Dzięki staraniom swoich rosyjskich kolegów znalazł się w Moskwie. Współpracował tam z Mikołajem N. Łuzinem i zetknął się z tworzoną i rozwijaną właśnie teorią zbiorów analitycznych. W przyszłości Sierpiński miał okazać się jedną z najważniejszych postaci w dalszym rozwijaniu tego działu teorii mnogości, a mianowicie deskryptywnej teorii mnogości. W roku 1918 wrócił do Polski. Wykładał najpierw (przez jeden semestr) na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie, a od jesieni 1918 roku był profesorem Uniwersytetu Warszawskiego (od roku 1919 – profesorem zwyczajnym). W czasie II wojny światowej wykazywał aktywność w nauczaniu podziemnym. W roku 1945 znalazł się w Krakowie, gdzie przez semestr wykładał na Uniwersytecie Jagiellońskim. Jesienią podjął na nowo pracę na Uniwersytecie Warszawskim. Od roku 1948 pracował także w Państwowym Instytucie Matematycznym, późniejszym Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk. W roku 1960 przeszedł na emeryturę. Zmarł 21 października 1969 roku.

Sierpiński zajmował się teorią liczb, teorią mnogości, analizą matematyczną, ogólną i deskryptywną teorią mnogości, topologią teoriomnogościową, teorią miary i kategorii, teorią funkcji zmiennej rzeczywistej.

Sleszyński Jan urodził się 23 (11 według starego stylu) lipca 1854 roku w miasteczku Lisianka na Kijowszczyźnie. W latach 1871–1875 studiował na Wydziale Matematycznym Uniwersytetu w Odessie. W roku 1880 uzyskał magisterium z matematyki czystej i otrzymawszy stypendium wyjechał na dwa lata do Berlina, gdzie słuchał wykładów Kummera, Kroneckera i Weierstrassa. Po powrocie habilitował się w roku 1882 i został docentem prywatnym na Uniwersytecie w Odessie. Pracował też jako nauczyciel matematyki w Seminarium Duchownym i w gimnazjach. W roku 1893 otrzymał doktorat (rosyjski odpowiednik habilitacji) z matematyki czystej i został profesorem nadzwyczajnym, a następnie profesorem zwyczajnym (1898)

4 Głoszona czasami opinia, że były to pierwsze na świecie wykłady z tej nowej dziedziny, jest błędna. Wcześniej wykłady z teorii mnogości prowadzili E. Zermelo (Getynga, 1900–1901), F. Hausdorff (Lipsk, 1901) oraz E. Landau (Berlin 1902–1903, 1904–1905).

5 Wybuch wojny zastał Sierpińskiego na wakacjach w Rosji.

i tzw. profesorem zasłużonym (1908). W 1909 roku przeszedł na emeryturę. W 1911 przybył do Krakowa, gdzie został docentem prywatnym (z tytułem profesora zwyczajnego) na nowo utworzonej katedrze na Wydziale Filozoficznym Uniwersytetu Jagiellońskiego. Katedrę tę objął w roku 1919 (po odejściu do Warszawy Kazimierza Żorawskiego) i został mianowany profesorem zwyczajnym matematyki i logiki. Katedra Sleszyńskiego była pierwszą katedrą logiki matematycznej na Uniwersytecie Jagiellońskim, co więcej, była to pierwsza katedra o tej nazwie na świecie. W roku 1924 został przeniesiony – na własne żądanie – w stan spoczynku, a w roku 1925 otrzymał tytuł honorowego profesora Uniwersytetu Jagiellońskiego. Sleszyński zmarł 9 marca 1931 roku.

Stamm Edward urodził się 10 marca 1886 roku w Tarnowie. Do szkół uczęszczał w Tarnowie, Nowym Targu i Krakowie. Studiował w Zurychu, Innsbrucku i Wiedniu, gdzie w roku 1909 uzyskał dyplom na Wydziale Filozoficznym. W roku 1914 został powołany do wojska austriackiego i służył w piechocie i w wojskach radiotelegraficznych. Po wojnie aż do demobilizacji był komendantem stacji radiotelegraficznej w Krakowie. Przez całe życie uczył w szkołach średnich na prowincji, m.in. w Surochowie koło Jarosławia, Ciechanowie, Lubowidzu (powiat Żuromin), Toruniu, Przemyślu, Strzyżowie nad Wisłokiem i w Wieliczce. Zmarł z wycieńczenia i wyczerpania po powrocie z kampanii wrześniowej 21 listopada 1940 roku w Wieliczce.

Steinhaus Hugo urodził się 14 stycznia 1887 roku w Jaśle. Po uzyskaniu matury w roku 1905 w gimnazjum klasycznym w Jaśle podjął studia matematyczne i filozoficzne na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie. W latach 1906–1911 studiował na uniwersytecie w Getyndze pod kierunkiem Davida Hilberta i Feliksa Kleina. W roku 1911 uzyskał tam stopień doktora filozofii. W latach 1911–1914 przebywał w Jaśle, w roku 1915 uczestniczył w I wojnie światowej. W roku 1917 habilitował się we Lwowie. W 1920 został profesorem nadzwyczajnym matematyki Uniwersytetu Jana Kazimierza, a w roku 1923 – profesorem zwyczajnym. Skupił wokół siebie (wraz ze Stefanem Banachem) grono wybitnych matematyków, tworząc silny ośrodek naukowy zwany lwowską szkołą matematyczną. Zajmowano się w niej głównie analizą funkcjonalną. W czasie II wojny światowej ukrywał się pod nazwiskiem Grzegorz Krochmalny. Po wojnie współorganizował wrocławskie środowisko naukowe. Był profesorem Uniwersytetu Wrocławskiego i Instytutu Matematycznego Polskiej Akademii Nauk. Zmarł 25 lutego 1972 roku we Wrocławiu.

Zajmował się głównie szeregami trygonometrycznymi i ortogonalnymi oraz zagadnieniami sumowalności. Wiele jego prac okazało się istotne dla ścisłego sformułowania podstaw rachunku prawdopodobieństwa na podstawie teorii miary i teorii mnogości. Zajmował się także zastosowaniami matematyki w różnych dziedzinach, w szczególności w biologii, medycynie i statystyce. Był również popularyzatorem matematyki oraz znanym aforystą.

Śniadecki Jan urodził się 29 sierpnia 1756 roku w Żninie. Uczęszczał do Gimnazjum w Trzemesznie. Studiował na Akademii Lubrańskiego w Poznaniu i na Akademii Krakowskiej, gdzie w roku 1775 uzyskał stopień doktora filozofii. W 1778 wyjechał na studia zagraniczne – nauki pobierał w Getyndze, Lejdzie i Paryżu. W roku 1781 został profesorem matematyki i astronomii w Krakowie. W 1807 przybył do Wilna, gdzie objął stanowisko profesora astronomii i jednocześnie został rektorem tamtejszego uniwersytetu. Stanowisko to piastował do roku 1815. Ostatni okres życia (od roku 1825) spędził w Jaszunach koło Wilna. W 1812 został członkiem utworzonej przez cesarza Napoleona I Bonapartego Komisji Rządu Tymczasowego Wielkiego Księstwa Litewskiego. Zmarł 9 listopada 1830 roku w Jaszunach koło Wilna.

Zajmował się matematyką, astronomią, filozofią, geografią, zagadnieniami pedagogiki i językoznawstwem. Był zwolennikiem empiryzmu, wrogiem metafizyki i romantyzmu. W 1782 roku wystąpił z projektem zbudowania obserwatorium astronomicznego w Krakowie. W roku 1784 skonstruował (wraz z Janem Jaśkiewiczem) pierwszy w Polsce balon. Zasłużony dla organizacji nauki i nauczania. Przyczynił się do upowszechnienia polskiej terminologii matematycznej. Na jego cześć jedna z planetoid została nazwana 1262 Sniadeckia, a jeden z kraterów na Księżycu – Śniadecki.

Tarski Alfred urodził się – jako Alfred Tajtelbaum – 14 stycznia 1901 roku w Warszawie. W roku 1923 zmienił nazwisko na Tarski. W roku 1918 podjął studia biologiczne na Uniwersytecie Warszawskim. Pod wpływem Leśniewskiego porzucił je na rzecz matematyki i filozofii. Wśród jego nauczycieli byli Kotarbiński, Leśniewski, Łukasiewicz, Mazurkiewicz i Sierpiński. W roku 1924 doktoryzował się pod kierunkiem Leśniewskiego na podstawie rozprawy „O wyrazie pierwotnym logistyki", a rok później habilitował się. W latach 1925–1939 uczył w Liceum im. Stefana Żeromskiego w Warszawie i jednocześnie prowadził jako docent zajęcia zlecone na Uniwersytecie Warszawskim. W sierpniu 1939 roku wyjechał do USA, by wziąć udział w 5th International Congress for the Unity of Science. Tam zastała go wojna. Pozostał w USA do końca życia (w roku 1946 Uniwersytet Warszawski zaproponował mu stanowisko docenta, którą to propozycję odrzucił). Był wykładowcą na uniwersytecie Harvarda (1939–1941), profesorem wizytującym w City College of New York (1940–1941), członkiem Institute for Advanced Study w Princeton (1941–1942), wykładowcą na University of California at Berkeley, gdzie też w roku 1946 został profesorem. Stworzył tam silny ośrodek badań w zakresie logiki i podstaw matematyki. Zmarł 26 października 1983 roku w Berkeley (Kalifornia, USA).

Tarski zajmował się wieloma dziedzinami matematyki, w szczególności teorią mnogości, algebrą, metamatematyką i logiką. Był jednym z najwybitniejszych logików XX wieku. Do jego najbardziej znanych osiągnięć należy definicja pojęcia prawdy. Zapoczątkował nowy dział podstaw matematyki – teorię modeli. Prowadził też badania w zakresie teorii mnogości oraz algebry uniwersalnej. Zainicjował program algebraizacji i topologizacji logiki matematycznej. Prace Tarskiego wywarły istotny wpływ na rozwój logiki matematycznej i podstaw matematyki. W roku 2000 Komisja Nazewnictwa Międzynarodowej Unii Astronomicznej nadała imię Alfreda Tarskiego odkrytej w roku 1997 planetoidzie nr 13672.

Wilkosz Witold urodził się 14 sierpnia 1891 roku w Krakowie. Po ukończeniu gimnazjum (uczęszczał do jednej klasy ze Stefanem Banachem) rozpoczął studia matematyczne na Wydziale Filozoficznym Uniwersytetu Jagiellońskiego. Rok 1912 spędził na uniwersytecie w Turynie, gdzie studiował pod kierunkiem Giuseppe Peana. W latach 1914–1915 służył w Legionach, a następnie kontynuował studia na Wydziale Filozoficznym Uniwersytetu Jagiellońskiego, które ukończył w roku 1917, a w 1918 uzyskał stopień doktora filozofii na podstawie pracy poświęconej teorii funkcji absolutnie ciągłych i całki Lebesgue'a. W okresie 1917–1920 pracował jako nauczyciel w prywatnych gimnazjach w Zawierciu i Częstochowie, a jednocześnie uczęszczał na wykłady z prawa kościelnego i historii prawa na krakowskiej uczelni. W roku 1920 tam też habilitował się na podstawie rozprawy o funkcjach ściśle mierzalnych i podjął wykłady jako docent prywatny. W roku 1922 został profesorem nadzwyczajnym, a w 1935 profesorem zwyczajnym tegoż Uniwersytetu. W listopadzie 1939 roku aresztowany wraz z grupą profesorów krakowskich, następnie został zwolniony ze względu na zły stan zdrowia. W latach 1940–1941 pracował w Szkole Handlowej w Krakowie. Zmarł 31 marca 1941 roku w Krakowie.

Obok prac ściśle naukowych opublikował sześć podręczników z zakresu teorii mnogości, arytmetyki, algebry i teorii liczb (por. 1932, 1933, 1934). Na uwagę zasługuje oryginalna aksjomatyka arytmetyki liczb naturalnych (1932) równoważna aksjomatyce Peana (1889). Był też autorem prac popularnych – jedną z ważniejszych jest wielokrotnie wznawiana książeczka *Liczę i myślę. Jak powstała liczba* (1938). Wiele jego prac pozostało w rękopisach. Należy też dodać, że Wilkosz był zaangażowanym popularyzatorem wiedzy – wygłaszał liczne pogadanki radiowe, m.in. o tematyce matematycznej, a także na kursach organizowanych przez Ministerstwo Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego. Uczestniczył też aktywnie w rozwoju radiotechniki i radiofonii.

Zaremba Stanisław urodził się 3 października 1863 roku w Romanówce na Ukrainie. Po ukończeniu w roku 1881 szkoły realnej w Petersburgu rozpoczął studia techniczne w Petersburskim Instytucie Technologicznym. Po uzyskaniu w roku 1886 dyplomu inżyniera technologa wyjechał do Paryża, gdzie studiował matematykę. Tu w roku 1889 uzyskał na Sorbonie stopień doktora nauk matematycznych. W latach 1892–1900 pracował jako nauczyciel w liceach w Digne, Nîmes i Cahors. W roku 1900 został powołany na stanowisko profesora nadzwyczajnego matematyki na Uniwersytecie Jagiellońskim. W 1905 został profesorem zwyczajnym. Po przejściu na emeryturę w 1935 został mianowany profesorem honorowym Uniwersytetu Jagiellońskiego. Zmarł 22 listopada 1942 roku w Krakowie.

Był jednym z pionierów nowoczesnej matematyki w Polsce. Zajmował się głównie analizą matematyczną i zastosowaniami matematyki, zwłaszcza w fizyce, w szczególności fizyką matematyczną. W związku z tym głównym przedmiotem jego badań były równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego wszystkich trzech typów stanowiące podstawowe narzędzie matematyczne fizyki i techniki. Interesował się także logiką oraz filozofią i metodologią matematyki.

Zawirski Zygmunt urodził się 29 września 1882 roku w Berezowicy Małej k. Zbaraża (Galicja Wschodnia). Studia w zakresie matematyki, fizyki i filozofii odbył na uniwersytetach we Lwowie (1901–1906) oraz w Berlinie (1909) i Paryżu (1910). Doktoryzował się pod kierunkiem Kazimierza Twardowskiego w 1910 roku. Następnie uczył matematyki i propedeutyki filozofii w gimnazjach lwowskich. Habilitował się w roku 1924 na Uniwersytecie Jagiellońskim w Krakowie na podstawie rozprawy o metodzie aksjomatycznej w przyrodoznawstwie. W latach 1924–1928 wykładał filozofię na Wydziale Ogólnym Politechniki Lwowskiej. W roku 1928 objął Katedrę Teorii i Metodologii Nauk w Uniwersytecie Poznańskim, a w roku 1937 przeniósł się na Uniwersytet Jagielloński. W czasie II wojny światowej brał udział w tajnym nauczaniu. Zmarł 2 kwietnia 1948 roku w Końskich.

Zawirski zajmował się głównie metodologią nauk, a także teorią poznania i ontologią, zwłaszcza w zakresie problematyki związanej z rozwojem fizyki, w szczególności teorii względności i teorii kwantów. Był najwybitniejszym wówczas polskim specjalistą w dziedzinie pogranicza fizyki i filozofii. Interesował się także zastosowaniami logiki matematycznej.

Żyliński Eustachy urodził się 1 października (19 września według kalendarza juliańskiego) 1889 roku w miejscowości Kuna. W latach 1907–1911 studiował na Wydziale Matematyczno-Fizycznym Cesarskiego Uniwersytetu Świętego Włodzimierza w Kijowie. W latach 1912–1913 przebywał na uniwersytetach w Getyndze (u Edmunda Landaua), w Marburgu (u Kurta Hensela) i Cambridge (u Godfrey'a H. Hardy'ego). W roku 1914 uzyskał na uniwersytecie w Kijowie stopień magistra (odpowiadający dzisiejszemu stopniowi doktora). W okresie 1917–1919 pracował na stanowisku docenta matematyki w Polskim Kolegium Uniwersyteckim w Kijowie. Odrzuciwszy propozycję objęcia Katedry Matematyki na Ukraińskim Uniwersytecie Państwowym w Kamieniu Podolskim, został profesorem nadzwyczajnym na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie, gdzie objął (po zmarłym Józefie Puzynie) Katedrę Matematyki na Wydziale Filozoficznym. W roku 1922 został profesorem zwyczajnym. W latach 1939–1941 był profesorem Uniwersytetu Państwowego im. Iwana Franko we Lwowie. W okresie 1941–1944 pracował jako statystyk w prywatnym biurze transportowym we Lwowie, uczestnicząc jednocześnie w tajnym nauczaniu. W 1946 roku opuścił wraz rodziną Lwów i zamieszkał w Łodzi. W latach 1946–1947 pracował w Ministerstwie Spraw Zagranicznych. W okresie od 1946 (faktycznie od 1947 roku) do 1951 był profesorem zwyczajnym na Wydziale Inżynieryjno-Budowlanym Politechniki Śląskiej w Gliwicach. Zmarł 4 lipca 1954 roku w Łodzi.

Żyliński zajmował się głównie teorią liczb. Po roku 1919 zajął się algebrą, logiką i podstawami matematyki. Wiele uwagi poświęcał problemom nauczania matematyki. Opublikował wiele podręczników.

Bibliografia

Ajdukiewicz, K. (1921). *Z metodologii nauk dedukcyjnych*. Nakładem Polskiego Towarzystwa Filozoficznego, Lwów. Przekład angielski: From the Methodology of the Deductive Sciences, *Studia Logica* 19 (1966), 9–45.

Ajdukiewicz, K. (1923). *Główne kierunki filozofii w wyjątkach z dzieł ich klasycznych przedstawicieli. (Teoria poznania – logika – metafizyka)*. Nakładem K.S. Jakubowskiego, Lwów. Wydanie drugie rozszerzone, opracował J. Jadacki, Wydawnicwo Naukowe Semper, Warszawa 2011.

Ajdukiewicz, K. (1928). *Główne zasady metodologii nauk i logiki formalnej*. (Wykłady wygłoszone na Uniwersytecie Warszawskim w roku akademickim 1927/1928. Skrypt autoryzowany zredagował M. Presburger). Wydawnictwa Koła Matematyczno-Fizycznego Słuchaczów Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa.

Ajdukiewicz, K. (1934a). W sprawie „uniwersaliów". *Przegląd Filozoficzny* 37, 219–234. Przedruk w: Ajdukiewicz (1960a), 196–210.

Ajdukiewicz, K. (1934b). *Logiczne podstawy nauczania.* (Odbitka z *Encyklopedji Wychowania*). Nakładem „Naszej Księgarni" Sp. Akc. Związku Nauczycielstwa Polskiego, Warszawa. Przedruk fragmentów (§§ 45––65) w: Ajdukiewicz (1960a), 287–313.

Ajdukiewicz, K. (1937). Problemat transcendentalnego idealizmu w sformułowaniu semantycznym. *Przegląd Filozoficzny* 40, 271–287. Przedruk w: Ajdukiewicz (1960a), 264–277.

Ajdukiewicz, K. (1947). Logika a doświadczenie, *Przegląd Filozoficzny* 43, 3–21. Przedruk w: Ajdukiewicz (1965a), 45–60.

Ajdukiewicz, K. (1958). Le problème du fondement des propositions analytiques, *Studia Logica* 8, 259–281. Przekład polski: Zagadnienie uzasadnienia zdań analitycznych, w: Ajdukiewicz (1965a), 308–321.

Ajdukiewicz, K. (1960a). *Język i poznanie*, t. 1: *Wybór pism z lat 1920––1939*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa. Wydanie drugie: Warszawa 1985.

Ajdukiewicz, K. (1960b). The Axiomatic Systems From the Methodological Point of View. *Studia Logica* 9, 205–218. Przekład polski: Systemy aksjomatyczne z metodologicznego punktu widzenia, w: Ajdukiewicz (1965a), 332–343.

Ajdukiewicz, K. (1964). Zagadnienie empiryzmu a koncepcja znaczenia. *Studia Filozoficzne* 1 (36), 3–16. Przedruk w: Ajdukiewicz (1965a), 388–400.

Ajdukiewicz, K. (1965a). *Język i poznanie*, t. 2: *Wybór pism z lat 1945––1963*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa. Wydanie drugie: Warszawa 1985.

Ajdukiewicz, K. (1965b). *Logika pragmatyczna*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Banach, S., A. Tarski (1924). Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fundamenta Mathematicae* 6, 244–277.

Batóg, T. (1971). Stanisław Piątkiewicz – pionier logiki matematycznej w Polsce. *Kwartalnik Historii Nauki i Techniki* 16, 553–563.

Batóg, T. (1973). Stanisław Piątkiewicz – pionier logiki matematycznej w Polsce. *Z Dziejów Kultury i Literatury Ziemi Przemyskiej* II, 325–330.

Batóg, T. (1984). Twórczość Ajdukiewicza a rozwój logiki formalnej. *Studia Filozoficzne* 5 (222), 135–147.

Batóg, T., R. Murawski (1996). Stanisław Piątkiewicz and the Beginnings of Mathematical Logic in Poland. *Historia Mathematica* 23, 68–73.

Church, A. (1962). Mathematics and Logic. W: E. Nagel, P. Suppes, A. Tarski (eds.), *Logic, Methodology, and Philosophy of Science. Proceedings of the 1960 International Congress.* Stanford University Press, Stanford, California, 181–186.

Chwistek, L. (1917). Trzy odczyty odnoszące się do pojęcia istnienia. *Przegląd Filozoficzny* 20, 122–151. Przedruk w: Chwistek (1961), 3–29.

Chwistek, L. (1919). W kwestii zdań „pozbawionych treści". (Z powodu polemiki o definicję wielkości). *Przegląd Filozoficzny* 22, 110–111.

Chwistek, L. (1921a). Antynomie logiki formalnej. *Przegląd Filozoficzny* 24, 164–171. Przedruk w: Chwistek (1963), 249–255.

Chwistek, L. (1921b). *Wielość rzeczywistości*. Kraków. Przedruk w: Chwistek (1961), 30–105.

Chwistek, L. (1922a). Zasady czystej teorii typów. *Przegląd Filozoficzny* 25, 359–391. Przedruk w: Chwistek (1963), 256–285.

Chwistek, L. (1922b). Über die Antinomien der Prinzipien der Mathematik. *Mathematische Zeitschrif* 14, 236–243.

Chwistek, L. (1923). Zastosowanie metody konstrukcyjnej do teorii poznania. *Przegląd Filozoficzny* 26, 175–187.

Chwistek, L. (1924). The Theory of Constructive Types (Principles of Logic and Mathematics). Part I: General Principles of Logic: Theory of Classes and Relations. *Annales de la Société Polonaise de Mathématique* 2, 9–48.

Chwistek, L. (1925). The Theory of Constructive Types (Principles of Logic and Mathematics). Part II: Cardinal Arithmetic. *Annales de la Société Polonaise de Mathématique* 3, 92–141.

Chwistek, L. (1933). *Zagadnienia kultury duchowej w Polsce.* Warszawa. Przedruk w: Chwistek (1961), 149–277.

Chwistek, L. (1935). *Granice nauki. Zarys logiki i metodologii nauk ścisłych*, Książnica-Atlas, Lwów–Warszawa. Przedruk w: Chwistek (1963), 1–232.

Chwistek, L. (1948). *The Limits of Science. Outline of Logic and of the Methodology of the Exact Sciences*. Translated by H.Ch. Brodie and A.P. Coleman. Kegan Paul, Trench Trubner & Co Ltd., New York–London. Reprinted by Routledge, London 2000.

Chwistek, L. (1961). *Pisma filozoficzne i logiczne.* T. 1. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Chwistek, L. (1963). *Pisma filozoficzne i logiczne.* T. 2. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Chwistek, L. (1988). *The Theory of Constructive Types (Principles of Logic and Mathematics)*. University of Michigan, University Library, Ann Arbor.

Czeżowski, T. (1918). O zdaniach bez treści. *Przegląd Filozoficzny* 21, 110–120.

Dickstein, S. (1891). *Pojęcia i metody matematyki.* T. 1, cz. 1: *Teoria działań.* Nakładem „Prac Matematyczno-Fizycznych", Warszawa.

Dickstein, S. (1893). Matematyka i rzeczywistość. Szkic. *Niwa* 22, nr 6, 232–235; nr 7; 274–276; nr 8, 319–321; nr 9–10, 362–365. Także: Wydawnictwo Redakcyi „Prac Matematyczno-Fizycznych", Warszawa 1893, s. 40.

Dickstein, S. (1896a). *Hoene Wroński. Jego życie i prace.* Nakładem Akademii Umiejętności, Kraków.

Dickstein, S. (1896b). *Katalog dzieł i rękopisów Hoene-Wrońskiego. Catalogue des oeuvres imprimées et manuscriptes de Hoëne Wroński.* Nakładem Akademii Umiejętności, Kraków. Także w: Dickstein (1896a), 239–351.

Estreicher, K. (1971). *Leon Chwistek. Biografia artysty (1884–1944)*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Kraków.

Fourier, J. (1888). *Œuvres de Fourier*, publiée par G. Darboux. Gauthier-Villars et Fils, Paris.

Feferman, A.B., S. Feferman (2004). *Alfred Tarski. Life and Logic*. Cambridge University Press, Cambridge. Przekład polski: *Alfred Tarski. Życie i logika*. WAiP – Wydawnictwa Akademickie i Profesjonalne, Warszawa 2009.

Gosiewski, W. (1904). O zasadach prawdopodobieństwa. *Przegląd Filozoficzny* 7, 270–293.

Gosiewski, W. (1906). *Zasady rachunku prawdopodobieństwa*. Warszawa.

Gosiewski, W. (1909a). O analogii, indukcji i dedukcji z punktu widzenia teorii prawdopodobieństwa. *Przegląd Filozoficzny* 12, 373–377.

Gosiewski, W. (1909b). O uogólnianiu z punktu widzenia teorii prawdopodobieństwa. *Przegląd Filozoficzny* 12, 377–38.

Grzegorczyk, A., W. Marek (1979). Zarys dorobku naukowego Andrzeja Mostowskiego. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego*. Seria II*: Wiadomości Matematyczne* 22, 47–52.

Haller, R. (1992). Alfred Tarski. Drei Briefe an Otto Neurath. *Grazer Philosophische Studien* 43, 1–32.

Henkin, L. (1962). Nominalistic Analysis of Mathematical Language. W: E. Nagel (ed.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science*. Stanford University Press, Stanford, California, 187–188.

Hoborski, A. (1934). Jan Sleszyński. (Wspomnienie pośmiertne). *Wiadomości Matematyczne* 36, 71–76.

Hoene-Wroński, J.M. (1811). *Introduction à philosophie des mathématiques et technie d'algorithmie.* Paris. Przekład polski: *Wstęp do filozofii matematyki oraz technia algorytmii.* Tłumaczył z francuskiego P. Chomicz. Instytut Wydawniczy „Biblioteka Polska", Warszawa 1937.

Hoene-Wroński, J.M. (1821). *A Course of Mathematics. Introduction Determining the General State of the Mathematics*. Samuel Bagster, London. Przekład polski: *Wstęp do wykładu matematyki przez H. Wrońskiego.* Tłumaczył A. Bukaty z rękopisu francuskiego. Biblioteka Polska, Paryż oraz w Poznaniu u Żupańskiego 1880.

Hosiasson, J. *et al.* (1934). *Fragmenty Filozoficzne. Księga pamiątkowa ku uczczeniu piętnastolecia pracy nauczycielskiej w Uniwersytecie Warszawskim Profesora Tadeusza Kotarbińskiego. Nakładem Uczniów*, Warszawa.

Jadacki, J.J. (1980). Bibliografia logiki polskiej. Część 1: *Studia Filozoficzne* 1 (170) (1980), 161–176. Część 2: *Studia Filozoficzne* 2 (171) (1980), 151––175. Tłumaczenie angielskie: Bibliography of the Polish Logic From the Second Half of the 14th Century to the First Half of the 20th Century. w: J.J. Jadacki, *Polish Analytical Philosophy*. Wydawnictwo Naukowe Semper, Warszawa 2009, 341–371.

Jadacki, J.J. (1986). Leon Chwistek – Bertrand Russell's Scientific Correspondence. *Dialectics and Humanism* 13, 239–263.

Jadacki, J.J. (1998). Jan Sleszyński. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego*. Seria II: *Wiadomości Matematyczne* 34, 83–97.

Jadczak, R. (1993). Stanisław Leśniewski a Szkoła Lwowsko-Warszawska. *Analecta* II, z. 2, 29–38.

Janiszewski, Z. (1915a). Logistyka. W: *Poradnik dla samouków. Wskazówki metodyczne dla studjujących poszczególne nauki.* Wydanie nowe, t. 1. Wydawnictwo A. Heflera i St. Michalskiego, Warszawa, 449–461.

Janiszewski, Z. (1915b). Zagadnienia filozoficzne matematyki. W: *Poradnik dla samouków. Wskazówki metodyczne dla studjujących poszczególne nauki.* Wydanie nowe, t. 1. Wydawnictwo A. Heflera i St. Michalskiego, Warszawa, 462–489.

Janiszewski, Z. (1916). O realizmie i idealizmie w matematyce, *Przegląd Filozoficzny* 19, 161–170. Przekład francuski: Sur le réalisme et l'idéalisme en mathématique, w: Z. Janiszewski, *Œuvres choisies*, rédigées par K. Borsuk *et al.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1962, 309–317.

Janiszewski, Z. (1917). *O potrzebach matematyki w Polsce.* W: *Nauka polska, jej potrzeby, organizacja i rozwój 1*, 11–18. Przedruk: *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego*, Seria II: *Wiadomości Matematyczne* 7 (1963), 3–8.

Jaśkowski, S. (1947). *Elementy logiki matematycznej i metodologii nauk ścisłych: skrypt z wykładów*. Akademicka Księgarnia Spółdzielcza, Toruń.

Jedynak, A. (2003). *Ajdukiewicz*. Wiedza Powszechna, Warszawa.

Jordan, Z. (1937). *O matematycznych podstawach systemu Platona. Z historii racjonalizmu*. Poznańskie Towarzystwo Przyjaciół Nauk, Poznań.

Knaster, B. (1960). Zygmunt Janiszewski (w 40-lecie śmierci). *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego.* Seria II: *Wiadomości Matematyczne* 4, 1–9.

Kokoszyńska, M. (1936). W sprawie względności i bezwzględności prawdy. *Przegląd Filozoficzny* 39, 424–425.

Kotarbińska, J. (1984). Głos w dyskusji. *Studia Filozoficzne* 5.

Kotarbiński, T. (1913). Zagadnienie istnienia przyszłości. *Przegląd Filozoficzny* 16, 74–92. Przedruk w: Kotarbiński (1957c), 116–143.

Kotarbiński, T. (1920). Sprawa istnienia przedmiotów idealnych. *Przegląd Filozoficzny* 23, 149–170.

Kotarbiński, T. (1926). *Elementy logiki formalnej, teorji poznania i metodologji*, skrypt autoryzowany, opracowała D. Steinberżanka. Wydawnictwo Koła Filozoficznego S.U.W. i Koła Przyrodników S.U.W, Warszawa.

Kotarbiński, T. (1929). *Elementy teorji poznania, logiki formalnej i metodologji nauk*. Zakład Naukowy im. Ossolińskich, Lwów.

Kotarbiński, T. (1934). W sprawie pojęcia prawdy. *Przegląd Filozoficzny* 37, 85–91.

Kotarbiński, T. (1935). Zasadnicze myśli pansomatyzmu. *Przegląd Filozoficzny* 38, 283–294. Przekład angielski: The Fundamental Ideas of Pansomatism. *Mind*, new series, 64, 488–500 and 65 (1956), 288. Przedruk w: Tarski (1986b), vol. 3, 577–591.

Kotarbiński, T. (1951). *Kurs logiki dla prawników*. Gebethner i Wolff, Warszawa. Wydanie drugie: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1953. Wydanie ósme: Warszawa 1975.

Kotarbiński, T. (1957a). Filozof. *Studia Filozoficzne* 1 (1), 4–16. Przedruk w: Kotarbiński (1961), 595–606.

Kotarbiński, T. (1957b). *Wykłady z dziejów logiki*. Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław. Wydanie drugie: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1985.

Kotarbiński, T. (1957c). *Wybór pism.* T. 1. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Kotarbiński, T. (1961). *Elementy logiki, teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*. Wydanie drugie. Ossolineum, Wrocław–Warszawa–Kraków 1961. Wydanie trzecie: Ossolineum, Warszawa 1986. Przekład angielski: *Gnosiology: The Scientific Approach to the Theory of Knowledge*. Pergamon, Oxford–Warszawa 1966.

Krajewski, S., M. Srebrny (1979). O życiu i działalności Andrzeja Mostowskiego. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego*. Seria II: *Wiadomości Matematyczne* 22, 53–64.

Kuratowski, K. (1917). O definicji wielkości. (W związku z dyskusją między prof. S. Zarembą i prof. J. Łukasiewiczem). *Przegląd Filozoficzny* 20, 288–306.

Kuratowski, K. (1918). Odpowiedź na artykuł prof. Zaremby. *Przegląd Filozoficzny* 21, 128–132.

Kuratowski, K. (1973). *Pół wieku matematyki polskiej 1920–1970. Wspomnienia i refleksje*. Wiedza Powszechna, Warszawa.

Kuratowski, K. (1981). *Zapiski do autobiografii*. Czytelnik, Warszawa.

Kuratowski K., A. Mostowski (1952). *Teoria mnogości*. Nakładem Polskiego Towarzystwa Matematycznego z subwencji Ministerstwa Szkolnictwa

Wyższego, Warszawa–Wrocław (wydanie pierwsze); Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1966 (wydanie drugie), Warszawa 1978 (wydanie trzecie).

Kuratowski K., A. Mostowski (1969). *Set Theory*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe (Polish Scientific Publishers), Warszawa, and North-Holand Publ. Comp., Amsterdam. (2nd edition – 1976).

Lebesgue, H. (1922). A propos d'une nouvelle revue mathématique: *Fundamenta Mathematicae. Bulletin des Sciences Mathématiques* 46.

Leśniewski, S. (1913a). Próba dowodu ontologicznej zasady sprzeczności. *Przegląd Filozoficzny* 15, 202–226. Przedruk w: *Filozofia Nauki* 2(6) (1994), 117–147 [zawiera także zmiany wprowadzone przez Leśniewskiego do wydania rosyjskiego w jego książce *Logičeskije rassuždienija*, Sankt-Petersburg 1913]. Przekład angielski: An Attempt at a Proof of the Ontological Principle of Contradiction, w: Leśniewski (1992a), 20–46.

Leśniewski, S. (1913b). Czy prawda jest tylko wieczna czy też wieczna i odwieczna? *Nowe Tory* 18, 493–528. Przedruk (z pewnymi opuszczeniami), w: *Co istnieje?*, J.J. Jadacki, T. Bigaj i A. Lissowska (red.), t. 2, PETIT, Warszawa 1996, 133–150. Przekład angielski: Is Truth only Eternal or Both Eternal and Sempiternal, w: *Polish Review* 8 (1963), 23–43. Także jako: Is All Truth Only True Eternally os Is It Also True Without a Beginning, w: Leśniewski (1992a), 86–114.

Leśniewski, S. (1913c). Krytyka logicznej zasady wyłączonego środka. *Przegląd Filozoficzny* 16, 315–352. Przedruk (z pewnymi opuszczeniami), w: *Co istnieje?*, J.J. Jadacki, T. Bigaj i A. Lissowska (red.), t. 1, PETIT, Warszawa 1996, 143–167. Przekład angielski: The Critique of the Logical Principle of the Excluded Middle, w: Leśniewski (1992a), 47–85.

Leśniewski, S. (1914). Teoria mnogości na podstawach filozoficznych Benedykta Bornsteina. *Przegląd Filozoficzny* 17, 488–507. Przedruk: O podstawach filozoficznych teorii mnogości. *Filozofia Nauki* 2(22), 1998, 123–139.

Leśniewski, S. (1916). *Podstawy ogólnej teorii mnogości. I.* Prace Polskiego Koła Naukowego w Moskwie. Sekcya matematyczno-przyrodnicza, Moskwa. Przekład angielski: Foundations of the General Theory of Sets, w: Leśniewski (1992a), 129–173.

Leśniewski, S. (1927). O podstawach matematyki. Wstęp oraz §§ 1–3. *Przegląd Filozoficzny* 30, 164–206.

Leśniewski, S. (1928). O podstawach matematyki. § 4. *Przegląd Filozoficzny* 31, 261–291.

Leśniewski, S. (1929a). Grundzüge eines neuen System der Grundlagen der Mathematik. *Fundamenta Mathematicae* 14, 1–81. Przekład angielski: Fundamentals of a New System of the Foundations of Mathematics, w: Leśniewski (1992a), 410–605.

Leśniewski, S. (1929b). O podstawach matematyki. § 5. *Przegląd Filozoficzny* 32, 60–101.

Leśniewski, S. (1930). O podstawach matematyki. §§ 6–9. *Przegląd Filozoficzny* 33, 77–105 oraz 142–170.

Leśniewski, S. (1992a). *Collected Works.* Edited by S.J. Surma, J.T. Srzednicki, D.I. Barnett, V.F. Rickey, PWN – Polish Scientific Publishers and Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London.

Leśniewski, S. (1992b). On the Foundations of Mathematics, w: Leśniewski (1992a), 174–382. [Jest to przekład angielski „O podstawach matematyki", czyli pozycji: Leśniewski (1927, 1928, 1929b i 1930)].

Leśniewski, S. *et al.* (1939). Dyskusja wokół „Genezy logiki trójwartościowej" (1938). *Nauka Polska* 24, 219–223. Przedruk w: *Filozofia Nauki* 3–4 (7–8) (1994), 235–240.

Lindenbaum, A. (1930). Remarques sur une question de la methode axiomatique. *Fundamenta Mathematicae* 15, 313–321.

Lindenbaum, A. (1931). Bemerkungen zu den vorhergehenden Bemerkungen des Herrn J. v. Neumann. *Fundamenta Mathematicae* 17, 335–336.

Lindenbaum, A. (1936). Sur la simplicité formelle des notions. *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique* 7, 29–38.

Łukasiewicz, J. (1907). Logika a psychologia. *Przegląd Filozoficzny* 10, 489–491. Przedruk w: Łukasiewicz (1961), 63–65.

Łukasiewicz, J. (1910). *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa. Studium krytyczne.* Akademia Umiejętności, Kraków. Wydanie drugie: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1987.

Łukasiewicz, J. (1912a). O twórczości w nauce. W: *Księga pamiątkowa ku uczczeniu 250-tej rocznicy założenia Uniwersytetu Lwowskiego przez Króla Jana Kazimierza r. 1661*. Uniwersytet Lwowski, Lwów, t. 1, 1–15. Wydanie drugie zmienione i rozszerzone w: *Poradnik dla samouków. Wskazówki metodyczne dla studjujących poszczególne nauki.* Wydanie nowe, t, 1. Wydawnictwo A. Heflera i St. Michalskiego, Warszawa, 15–39. Przedruk w: Łukasiewicz (1961), 66–75.

Łukasiewicz, J. (1912b). W. Biegański, *Czym jest logika?* [recenzja]. *Ruch Filozoficzny* 2, nr 8, 149a–b.

Łukasiewicz, J. (1916). O pojęciu wielkości. (Z powodu dzieła Stanisława Zaremby). *Przegląd Filozoficzny* 19, 1–70. Przedruk w: Łukasiewicz (1998), 267–322.

Łukasiewicz, J. (1922). O determinizmie. W: Łukasiewicz (1961), 114–126. Tłumaczenie angielskie: On Determinism, w: Łukasiewicz (1970), 110–128.

Łukasiewicz, J. (1929a). *Elementy logiki matematycznej*, oprac. M. Presburger. Komisja Wydawnicza Koła Matematyczno-Fizycznego Słuchaczów Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa. Reprint: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 2008.

Łukasiewicz, J. (1929b). O znaczeniu i potrzebach logiki matematycznej. *Nauka Polska* 10, 604–620. Przedruk w: Łukasiewicz (1998), 424–436.

Łukasiewicz, J. (1930). Philosophische Bemerkungen zur mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls. *Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Cl. III, 23, 51–77. Przekład polski: O wielowartościowych systemach rachunku zdań, w: Łukasiewicz (1961), 144–163.

Łukasiewicz, J. (1936). Logistyka a filozofia. *Przegląd Filozoficzny* 39, 115–131. Przedruk w: Łukasiewicz (1961), 195–209. Tłumaczenie angielskie: Logistic and Philosophy, w: Łukasiewicz (1970), 218–235.

Łukasiewicz, J. (1937a). W obronie logistyki. W: *Myśl katolicka wobec logiki współczesnej. Studia Gnesnensia* 15, 12–26, 159–165. Przedruk w: Łukasiewicz (1961), 210–219. Tłumaczenie angielskie: In Defence of Logistic, w: Łukasiewicz (1970), 236–249.

Łukasiewicz, J. (1937b). *En défense de la logistique*. W: *La pensée catholoque et la logique moderne. Compte rendu de la session spéciale tenue le 26.IX.1936 pendant le III^{ème} Congrès Polonais de Philosophie*. Wydawnictwa Wydziału Teologicznego UJ, Kraków, 7–13.

Łukasiewicz, J. (1939). Geneza logiki trójwartościowej [streszczenie referatu wygłoszonego 26 stycznia 1938 na posiedzeniu Koła Naukoznawczego]. *Nauka Polska* 24, 215–218. Przedruk w: *Filozofia Nauki* 3–4 (7–8) (1994), 232–235.

Łukasiewicz, J. (1941). Die Logik und das Grundlagenproblem. W: F. Gonseth (ed.), *Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques 6–9.XII.1938*. Editeurs S.A. Leemann freres & Cie, Zürich, 82–100. Przekład polski: Logika i problem podstaw matematyki, w: *Filozofia Nauki* 5 (1997), 147–162.

Łukasiewicz, J. (1951). *Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic*, Clarendon Press, Oxford. Wydanie drugie (zawierające rozdział o sylogistyce zdań modalnych): Clarendon Press, Oxford 1957. Przekład polski: *Sylogistyka Arystotelesa z punktu widzenia współczesnej logiki formalnej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1988.

Łukasiewicz, J. (1952). On the Intuitionistic Theory of Deduction. *Indagationes Mathematicae* 14, 202–212. Przedruk w: Łukasiewicz (1970), 325–340. Przekład polski: O intuicjonistycznym rachuku zdań, w: Łukasiewicz (1961), 261–274.

Łukasiewicz, J. (1961). *Z zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Łukasiewicz, J. (1970). *Selected Works*. Edited by L. Borkowski. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam–London and PWN (Polish Scientific Publishers), Warszawa.

Łukasiewicz, J. (1998). *Logika i metafizyka. Miscellanea*. Pod redakcją J.J. Jadackiego. Wydział Filozofii i Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa.

Łuzin, M.N. (1983). List do Arnauda Denjoy z 1926 r. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego*. Seria II: *Wiadomości Matematyczne* 25, 65–68.

Maligranda, L. (2009). Eustachy Żyliński (1889–1954). *Antiquitates Mathematicae* 3, 171–211.

Mancosu, P. (2005). Harvard 1940–1941: Tarski, Carnap and Quine on a Finitistic Language of Mathematics for Science. *History and Philosophy of Logic* 26, 327–357.

Mancosu, P. (2009). Tarski's Engagement with Philosophy. W: S. Lapointe, J. Woleński, M. Marion and W. Miskiewicz (eds.), *The Golden Age of Polish Philosophy. Kazimierz Twardowski's Philosophical Legacy*. Springer Verlag, Dordrecht–Heidelberg–London–New York, 131–153.

Marczewski, E. (1948). *Rozwój matematyki w Polsce*. Nakładem Polskiej Akademii Umiejętności z zasiłku Prezydium Rady Ministrów. Skład Główny w Księgarni Gebethnera i Wolffa, Warszawa–Kraków–Łódź–Poznań–Zakopane.

Mazur, S. (1963). Computable Analysis. *Rozprawy Matematyczne* 33, 111 pp. [edited by A. Grzegorczyk and H. Rasiowa].

Mazurkiewicz, S. (1923). Teoria mnogości w stosunku do innych działów matematyki. W: *Poradnik dla samouków*, T. 3: *Matematyka. Uzupełnienia do tomu pierwszego*. Wydawnictwo A. Heflera i St. Michalskiego, Warszawa, 89–98.

Mehlberg, H. (1962). The Present Situation in the Philosophy of Mathematics. W: *Logic and Language. Studies Dedicated to Professor Rudolf Carnap on the Occasion of His Seventieth Birthday.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 69–103.

Mostowski, A. (1946). O zdaniach nierozstrzygalnych w sformalizowanych systemach matematyki. *Kwartalnik Filozoficzny* 16, 223–277.

Mostowski, A. (1948). *Logika matematyczna. Kurs uniwersytecki*. Monografie Matematyczne, Warszawa–Wrocław.

Mostowski, A. (1949). La vie et l'œuvre de Samuel Dickstein. *Prace Matematyczno-Fizyczne* 47, VII–XII.

Mostowski, A. (1949–1950). A Classification of Logical Systems. *Studia Philosophica* 4, 237–274 (opublikowane w 1951). Przedruk w: Mostowski (1979), vol. 2, 154–191.

Mostowski, A. (1953). O tzw. konstruktywnych poglądach w dziedzinie podstaw matematyki. *Myśl Filozoficzna* 1 (7), 230–241.

Mostowski, A. (1954). Podstawy matematyki na VIII Zjeździe Matematyków Polskich. *Myśl Filozoficzna* 2 (12), 328–330.

Mostowski, A. (1955a). The Present State of Investigations of the Foundations of Mathematics. *Rozprawy Matematyczne* 9, 1–48 [in collaboration with: A. Grzegorczyk, S. Jaśkowski, J. Łoś, S. Mazur, H. Rasiowa and R. Sikorski].

Mostowski, A. (1955b). Współczesny stan badań nad podstawami matematyki. *Prace Matematyczne* 1, 13–55.

Mostowski, A. (1957). *Sentences Undecidable in Formalized Arithmetic. An Exposition of the Theory of Kurt Gödel*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Mostowski, A. (1959). On Various Degrees of Constructivism. W: *Constructivity in Mathematics. Proceedings of the Colloquium held in Amsterdam, 1957*, ed. by A. Heyting. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 178–194. Przedruk w: Mostowski (1979), vol. 2, 359–375.

Mostowski, A. (1964). Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese. *Elemente der Mathematik* 19, 121–125.

Mostowski, A. (1965). *Thirty Years of Foundational Studies. Lectures on the Development of Mathematical Logic and the Study of the Foundations of Mathematics in 1930–1964.* Societas Philosophical Fennica, Helsinki. Przedruk w: Mostowski (1979), vol. 1, 1–76.

Mostowski, A. (1967a). Recent Results in Set Theory. W: *Problems in the Philosophy of Mathematics*, ed. by I. Lakatos. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 82–96 and 105–108.

Mostowski, A. (1967b). O niektórych nowych wynikach metamatematycznych dotyczących teorii mnogości. *Studia Logica* 20, 99–116.

Mostowski, A. (1967c). Tarski Alfred, w: *The Encyclopedia of Philosophy*, ed. P. Edwards, Vol. 8. The Macmillan Comp. & the Free Press, New York, Collie-Macmillan Ltd. London, 77–81.

Mostowski, A. (1968). Niesprzeczność i niezależność hipotezy kontinuum. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego*, Seria II: *Wiadomości Matematyczne* 10, 175–182.

Mostowski, A. (1969). *Constructible Sets with Applications*. PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa–North-Holland Publ. Comp., Amsterdam.

Mostowski, A. (1972a). Matematyka a logika. Refleksje przy lekturze książki A. Grzegorczyka „Zarys arytmetyki teoretycznej" wraz z próbą recenzji. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego*, Seria II: *Wiadomości Matematyczne* 15, 79–89.

Mostowski, A. (1972b). *Sets.* W: *Scientific Thought. Some Underlying Concepts, Methods and Procedures*. Mouton/Unesco, The Hague, 1–34.

Mostowski, A. (1975). Travaux de W. Sierpiński sur la théorie des ensembles et ses applications. W: W. Sierpiński, *Œuvres choisies*. T. 2, PWN – Éditions Scientifiques de Pologne, Warszawa 1975, 9–13.

Mostowski, A. (1979). *Foundational Studies. Selected Works*. Vols. 1–2. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Mostowski, A. (1980). Życie i dzieło Samuela Dicksteina. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego*. Seria II: *Wiadomości Matematyczne* 22, 284–290. [Jest to tłumaczenie artykułu Mostowskiego (1949)].

Murawski, R. (1995). *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa; wydanie 2: Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001; wydanie 3: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 2008.

Murawski, R. (1998). Józef Maria Hoene-Wroński – filozof i matematyk. W: *Matematycy polskiego pochodzenia na obczyźnie*, red. S. Fudali. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin, 29–46.

Murawski, R. (2002). Zwischen Mathematik und Philosophie. Zum Leben und Werk von Józef Maria Hoene Wroński. W: *Wege zu Adam Ries. Tagung zur Geschichte der Mathematik, Erfurt 2002, Algorismus*, Heft 43, H. Roloff und M. Weidauer (Hrsg.). Dr. Erwin Rauner Verlag, Augsburg, 295–305.

Murawski, R. (2005). Genius or Madman? On the Life and Work of J.M. Hoene-Wroński. W: *European Mathematics in the Last Centuries*, ed. W. Więsław. Stefan Banach International Mathematical Center/ /Institute of Mathematics, Wrocław University, Wrocław, 77–86.

Murawski, R. (2006). The Philosophy of Hoene-Wroński. *Organon* 35, 143– –150.

Murawski, R. (2008). System filozoficzny Hoene-Wrońskiego. W: *Hoene- -Wroński. Życie, matematyka i filozofia*, P. Pragacz (red.). Instytut Matematyczny PAN, Warszawa, 27–37.

Murawski, R., K. Świrydowicz (2006). *Podstawy logiki i teorii mnogości*. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań.

Murawski, R., J. Woleński (2008a). Andrzej Mostowski on the Foundations and Philosophy of Mathematics. W: A. Ehrenfeucht, V.W. Marek and M. Srebrny (eds.), *Andrzej Mostowski and Foundational Studies*. IOS Press, Amsterdam/Berlin/Oxford/Tokyo/Washington, DC, 324–337.

Murawski, R., J. Woleński (2008b). Tarski and His Polish Predecessors on Truth. W: D. Patterson (ed.), *New Essays on Tarski and Philosophy*. Oxford University Press, Oxford, 21–43

Myhill, J.R. (1950). A Complete Theory of Natural, Rational and Real Numbers. *The Journal of Symbolic Logic* 15, 185–196.

Myhill, J.R. (1951a). Report on Investigations Concerning the Consistency of the Axiom of Reducibility. *The Journal of Symbolic Logic* 16, 35–42.

Myhill, J.R. (1951b). Towards a Consistent Set Theory. *The Journal of Symbolic Logic* 16, 130–136.

Nowik, G. (2004). *Zanim złamano „Enigmę". Polski radiowywiad podczas wojny z bolszewicką Rosją 1918–1920*. Oficyna Wydawnicza Rytm, Warszawa.

Pabich, B. (2004). Dr Edward Stamm (1886–1940). Zapomniany polski uczony i wychowawca. W: W. Więsław (red.), *Matematyka abelowa – w dwóchsetlecie urodzin Nielsa Henrika Abela (1802–1829). XVII Ogólnopolska Szkoła Historii Matematyki, Nowy Sącz, 9–13 czerwca 2003 roku*. Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa, Nowy Sącz, 157–170.

Peano, G. (1889). *Arithmetices principia nova methodo exposita*. Bocca, Torino.

Poincaré, H. (1902). *La Science et l'hypothese*. Flammarion, Paris. Przekład polski: *Nauka i hipoteza*, tłum. M.H. Horowitz, Warszawa 1908.

Poincaré, H. (1908). *Science et méthode*. Flammarion, Paris. Przekład polski: *Nauka i metoda*, tłum. M.H. Horowitz, Warszawa 1911.

Russell, B. (1903). *The Principles of Mathematics*. At the University Press, Cambridge.

Russell, B. (1919). *Introduction to Mathematical Philosophy*. George Allen & Unwin, London.

Sierpiński, W. (1909). Pojęcie odpowiedniości w matematyce. *Przegląd Filozoficzny* 12, 8–19.

Sierpiński, W. (1912). *Zarys teorii mnogości*. Skład Główny w Księgarni E. Wendego i S-ki, Warszawa.

Sierpiński, W. (1915). Teoria mnogości. W: *Poradnik dla samouków. Wskazówki metodyczne dla studjujących poszczególne nauki*. Wydanie nowe, t. 1. Wydawnictwo A. Heflera i St. Michalskiego, Warszawa, 215–224.

Sierpiński, W. (1923). *Zarys teorii mnogości*. Wydawnictwo Kasy im. J. Mianowskiego, Warszawa.

Sierpiński, W. (1965). *Cardinal and Ordinal Numbers*. Polish Scientific Publishers, Warszawa.

Sinaceur, H. (2000). Address at the Princeton University Bicentennial Conference on Problems of Mathematics (December 17–19, 1946), by Alfred Tarski. Edited with Additional Material and an Introduction. *Bulletin of Symbolic Logic* 6, 1–44.

Sleszyński, J. (1893). Logičeskaja mašina Dževonsa. *Vestnik Opytnoj Fiziki i Élementarnoj Matematiki* [Odessa] sem. XV, nr 7 (175), 145–154.

Sleszyński, J. (1912). Pojęcie dowodu w matematyce [autoreferat]. *Ruch Filozoficzny* 2, nr 6, 119a–119b.

Sleszyński, J. (1913). O ideografii Peana [autoreferat]. *Ruch Filozoficzny* 3, nr 1, 22b–23a.

Sleszyński, J. (1914). Filozofia Vaihingera (fałszu i złudy) w stosunku do matematyki [autoreferat]. *Ruch Filozoficzny* 4, nr 7, 198b–199b.

Sleszyński, J. (1921a). O logice tradycyjnej. Towarzystwo Filozoficzne, Kraków.

Sleszyński, J. (1921b). Sur le raisonnement dans les sciences déductives. *Rozprawy Polskiego Towarzystwa Matematycznego* 1, 102–109.

Sleszyński, J. (1923). O znaczeniu logiki dla matematyki. W: *Poradnik dla samouków*, t. 3. Wydawnictwo A. Heflicha i St. Michalskiego, Warszawa, 39–52.

Sleszyński, J. (1925–1929). *Teorja dowodu*. [Wykłady uniwersyteckie oprac. S.K. Zaremba]. Kółko Matematyczno-Fizyczne Uczniów Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków, t. 1: 1925, t. 2: 1929.

Stamm, E. (1909). O aprjoryczności matematyki. *Przegląd Filozoficzny* 12, 504–514.

Sobociński, B. (1956). In Memoriam Jan Łukasiewicz (1878–1956). *Philosophical Studies* (Maynoorth, Irland) 6, 3–49.

Stamm, E. (1910). Czem jest i czem będzie Matematyka? *Wiadomości Matematyczne* XIV, 181–196.

Stamm, E. (1911a). Logiczne podstawy nauk matematycznych. *Przegląd Filozoficzny* 14, 251–274.

Stamm, E. (1911b). Genetyczne ujęcie logiki ogólnej. *Przegląd Filozoficzny* 14, 437–466.

Stamm, E. (1911c). Zasady algebry logiki. *Wiadomości Matematyczne* XV, 1–87.

Stamm, E. (1912). Zasady algebry logiki. *Wiadomości Matematyczne* XVI, 1–31.

Stamm, E. (1913a). O przedmiotach urojonych. *Przegląd Filozoficzny* 16, 443–483.

Stamm, E. (1913b). „Characteristica geometrica" Leibniza i jej znaczenie w Matematyce. *Wiadomości Matematyczne* XVII, 43–90.

Stamm, E. (1927–1928). O algebrze logiki. (Próba syntezy). *Wiadomości Matematyczne* 30, 1–49.

Stamm, E. (1935). *Historia matematyki XVII wieku w Polsce*. Warszawa. Także w: *Wiadomości Matematyczne* 40 (1936), 1–216.

Steinhaus, H. (1921). Zygmunt Janiszewski – wspomnienie pośmiertne. *Przegląd Filozoficzny* 22, 113–117.

Steinhaus, H. (1923). *Czem jest a czem nie jest matematyka*. Księgarnia Nakładowa H. Altenberga, Lwów.

Steinhaus, H. (1949). Drogi matematyki stosowanej. *Matematyka* 3 (5), 8–19. Przedruk w: Steinhaus (2000), 108–120.

Steinhaus, H. (1958). O ścisłości matematycznej. *Matematyka* 3 (53), 26–47. Przedruk w: Steinhaus (2000), 49–59.

Steinhaus, H. (1980). *Słownik racjonalny*. Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław–Warszawa–Kraków–Gdańsk. Wydanie drugie uzupełnione: Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław–Warszawa–Kraków 1993.

Steinhaus, H. (2000). *Między duchem a materią pośredniczy matematyka*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa–Wrocław.

Suchoń, W. (1980). Jan Sleszyński – pionier logiki matematycznej w ośrodku krakowskim. W: E. Żarnecka-Biały (red.), *Logika i jej naucza-*

nie w dziejach Uniwersytetu Jagiellońskiego. Nakładem Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków, 27–39.

Suppes, P. (1998). Philosophical Implications of Tarski's Work. *Journal of Symbolic Logic* 53, 80–91.

Suszko R. (1968). Review of Andrzej Mostowski's *Thirty Years of Foundational Studies. Lectures Notes on the Development of Mathematical Logic and the Study of the Foundations of Mathematics in 1930–1964*, Helsinki 1965 – *Studia Logica* 22, 169–170.

Sylvan, R. (1997). *Transcendental Metaphysics*. The White House Press, Cambridge.

Szarski, J. (1962). Stanisław Zaremba (1863–1942). *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego.* Seria II: *Wiadomości Matematyczne* 5, 15–28.

Szumilewicz-Lachman, I. (1994). *Zygmunt Zawirski: His Life and Work. With Selected Writings on Time, Logic & the Methodology of Science*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Śniadecki, J. (1781). *Rozprawa o nauk matematycznych początku, znaczeniu i wpływie na oświecenie powszechne przy otwarciu poruczonej autorowi katedry matematyki wyższej przez Komisję Edukacyjną w Uniwersytecie Krakowskim, czytana publicznie dnia 9 listopada roku 1781*. Przedruk w: Śniadecki (1837–1839), t. 3, 164–182 oraz Śniadecki (1958), t. 1, 9–26.

Śniadecki, J. (1808). *Podział nauk matematycznych i katedry tych umiejętności*. Przedruk w: Śniadecki (1814–1822), t. 2, 289–299, Śniadecki (1837–1839), t. 3, 183–193 oraz Śniadecki (1958), t. I, 27–36.

Śniadecki, J. (1813). *O języku narodowym w matematyce.* Przedruk w: Śniadecki (1814–1822), t. 2, 306–312, Śniadecki (1837–1839), t. 3, 194–210 oraz Śniadecki (1958), t. 1, 37–52.

Śniadecki, J. (1818). O rozumowaniu rachunkowym. *Dziennik Wileński*, t. 1. Przedruk w: Śniadecki (1814–1822), t. 3, 360–426, Śniadecki (1837–1839), t. 4, 226–252 oraz Śniadecki (1958), t. 1, 117–140.

Śniadecki, J. (1814–1822). *Pisma rozmaite.* Nakładem i drukiem Józefa Zawadzkiego Typografa, Wilno.

Śniadecki, J. (1837–1839). *Dzieła Jana Śniadeckiego. Wydanie nowe Michała Balińskiego*. Nakładem Augusta Emmanuela Glücksberga, Warszawa.

Śniadecki, J. (1958). *Pisma filozoficzne.* T. 1–2. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Tarski, A. (1930). Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften. I, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 37, 361–404. Przekład angielski: Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences, w: Tarski (1956) i (1983), 60–109. Przekład polski: Podstawowe pojęcia metodologii nauk dedukcyjnych, w: Tarski (2001), 31–92.

Tarski, A. (1933). *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych.* Towarzystwo Naukowe Warszawskie, Wydział III Nauk Matematyczno-Fizycznych, Vol. 34, Warszawa. Przedruk w: Tarski (1995), 131–172. Przekład angielski: *The Concept of Truth in Formalized Languages* w: Tarski (1956) i (1983), 152–278.

Tarski, A. (1936). O pojęciu wynikania logicznego. *Przegląd Filozoficzny* 39, 58–68. Przedruk w: Tarski (1995), 186–202. Wersja niemiecka: Über den Begriff der logischen Folgerung, *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique* 7 (1936), 111. Wersja angielska: On the Concept of Logical Consequence, w: Tarski (1956), 409–420. Przekład angielski tekstu polskiego uwzględniający tekst niemiecki: On the Concept of Following Logically, *History and Philosophy of Logic* 23 (2002), 155–196.

Tarski, A. (1944). The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics. *Philosophy and Phenomenological Research* 4, 341–375. Przekład polski: Semantyczna koncepcja prawdy i podstawy semantyki, w: Tarski (1995), 228–282.

Tarski, A. (1954). Contribution to the Discussion of P. Bernays 'Zur Beurteilung der Situation in der beweistheoretischen Forschung'. *Revue Internationale de Philosophie* 8, 16–20.

Tarski, A. (1956). *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers From 1923 to 1938*. Clarendon Press, Oxford.

Tarski, A. (1969). Truth and Proof. *Scientific American* 220, no. 6, 63–77. Przekład polski: Prawda i dowód, w: Tarski (1995), 292–332.

Tarski, A. (1983). *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers From 1923 To 1938*, second edition edited and introduced by J. Corcoran. Hackett Publishing Co., Indianapolis, Indiana.

Tarski, A. (1986a). What Are Logical Notions? *History and Philosophy of Logic* 7, 143–154. Przekład polski: Czym są pojęcia logiczne?, w: Tarski (2001), 446–466.

Tarski, A. (1986b). *Collected Papers*, vols. 1–4, eds. S.R. Givant and R.N. McKenzie. Birkhauser, Basel–Boston–Stuttgart.

Tarski, A. (1987). A Philosophical Letter of Alfred Tarski. With a Prefactory Note by Morton White. *Journal of Philosophy* 84, 28–32. Przekład polski: List filozoficzny Alfreda Tarskiego do Mortona White'a, w: Tarski (1995), 282–291.

Tarski, A. (1995). *Pisma logiczno-filozoficzne.* T. 1: *Prawda.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Tarski, A. (2001). *Pisma logiczno-filozoficzne.* T. 2: *Metalogika.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Twardowski, K. (1927). Symbolomania i pragmatofobia. W: *Rozprawy i artykuły filozoficzne,* Lwów, s. 394–406. Przedruk w: *Wybrane pisma filozoficzne.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1965, 354–363.

Twardowski, K. (1997). *Dzienniki.* T. 1: 1915–1927, t. 2: 1928–1936. Do druku przygotował, wprowadzeniem i przypisami opatrzył R. Jadczak. Wydawnictwo Adam Marszałek, Warszawa–Toruń.

Wachułka, A. (1980). Edward Stamm (1886–1940). W: E. Żarnecka-Biały (red.), *Logika i jej nauczanie w dziejach Uniwersytetu Jagiellońskiego.* Nakładem Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków, 79–81.

Whitehead, A.N., B. Russell (1910–1913). *Principia Mathematica*, Vol. 1–3. The University Press, Cambridge.

Whitehead, A.N., B. Russell (1925–1927). *Principia Mathematica*, second edition, vol. 1–3, The University Press, Cambridge.

Wilkosz, W. (1932). *Arytmetyka liczb całkowitych.* Nakładem Kółka Matematyczno-Fizycznego Uczniów Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.

Wilkosz, W. (1933). *Teoria mnogości punktowych.* Część I: *Mnogości liniowe, teoria opisowa, miara Lebesgue'a.* Nakładem Kółka Matematyczno-Fizycznego Uczniów Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.

Wilkosz, W. (1934). *Zarys algebry w ujęciu klasycznym.* Część 1. Nakładem Kółka Matematyczno-Fizycznego Uczniów Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.

Wilkosz, W. (1936a). Znaczenie logiki matematycznej dla matematyki i innych nauk ścisłych. *Przegląd Filozoficzny* 39, 343–346.

Wilkosz, W. (1936b). *Podstawy teoretyczne arytmetyk klasycznych*. Kraków.

Wilkosz, W. (1938a). *Liczę i myślę. Jak powstała liczba*. Księgarnia Powszechna, Kraków. Wydanie drugie: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1951.

Wilkosz, W. (1938b). O definicji przez abstrakcję. *Kwartalnik Filozoficzny* 14, 1–13.

Wilkosz, W. (1946). *Człowiek stwarza naukę*. Spółdzielnia Księgarska „Czytelnik", Kraków.

Woleński, J. (1985). *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Woleński, J. (1989). *Logic and Philosophy in the Lvov–Warsaw School.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London.

Woleński, J. (1990). *Kotarbiński.* Wiedza Powszechna, Warszawa.

Woleński, J. (1992). Filozofia logiki i matematyki w warszawskiej szkole logicznej. W: *Matematyka przełomu XIX i XX wieku. Nurt mnogościowy. Materiały III Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki. Jaworze, maj 1988*. Uniwersytet Śląski, Katowice, 16–25.

Woleński, J. (1993). Tarski as a Philosopher. W: F Coniglione, R. Poli and J. Woleński (eds.), *Polish Scientific Philosophy: The Lvov–Warsaw School.* Editions Rodopi, Amsterdam–New York, 319–338.

Woleński, J. (1995a). Podstawy matematyki i logika w Polsce w latach 1851–1950. W: S. Fudali (red.), *Matematyka polska w stuleciu 1851–1950.* Uniwersytet Szczeciński. Materiały, Konferencje, Nr 16, Szczecin, 193–220.

Woleński, J. (1995b). On Tarski's Background. W: J. Hintikka (ed.), *From Dedekind to Gödel. Essays on the Development of the Foundations of Mathematics.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 331–341.

Woleński, J. (1996). Filozoficzne problemy logiki. W: *Historia nauki polskiej. Wiek XX.* Polska Akademia Nauk, Instytut Historii Nauki oraz Fundacja im. W. Świętosławskiego, Warszawa.

Woleński, J. (1997). *Szkoła Lwowsko-Warszawska w polemikach*. Wydawnictwo Naukowe Scholar. Warszawa.

Woleński, J. (1999). Koncepcje logiki w Szkole Lwowsko-Warszawskiej. W: W. Tyburski i R. Wiśniewski (red.), *Polska filozofia analityczna. W kręgu Szkoły Lwowsko-Warszawskiej*. Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń, 57–73.

Woleński, J. (2009). Logic and the Foundations of Mathematics in Lvov (1900–1939). In: *Lvov Mathematical School in the Period 1915–1945 As Seen Today*. Banach Center Publications, Vol. 87, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warszawa.

Zaremba, S. (1907). *Zarys pierwszych zasad teorii liczb całkowitych*. Polska Akademia Umiejętności, Kraków.

Zaremba, S. (1911). Pogląd na te kierunki w badaniach matematycznych, które mają znaczenie teoretyczno-poznawcze. *Wiadmości Matematyczne* 15, 217–223.

Zaremba, S. (1912). *Arytmetyka teoretyczna*. Polska Akademia Umiejętności, Kraków.

Zaremba, S. (1915). *Wstęp do analizy*. Gebethner i Wollf, Warszawa.

Zaremba, S. (1917). O niektórych poglądach p. Łukasiewicza na metodykę nauk dedukcyjnych. *Przegląd Filozoficzny* 20, 62–80.

Zaremba, S. (1918a). Z powodu artykułu p. Kuratowskiego „O definicji wielkości". *Przegląd Filozoficzny* 21, 121–127.

Zaremba, S. (1918b). Odpowiedź na powyższe wywody p. Kuratowskiego. *Przegląd Filozoficzny* 21, 132.

Zaremba, S. (1923). O stosunku wzajemnym fizyki i matematyki. W: *Poradnik dla samouków*. T. 3: *Matematyka. Uzupełnienia do tomu pierwszego.* Wydawnictwo A. Heflera i St. Michalskiego, Warszawa, 131––167.

Zaremba, S. (1926). *La logique des mathématiques*. Mémorial des Sciences Mathématiques, Fascicule XV, Gauthier-Villars, Paris.

Zaremba, S. (1938). Uwagi o metodzie w matematyce i fizyce. *Przegląd Filozoficzny* 41, 31–36.

Zawirski, Z. (1923–24). Metoda aksjomatyczna a przyrodoznawstwo. *Kwartalnik Filozoficzny* 1, 508–555; *Kwartalnik Filozoficzny* 2, 1–58 oraz 129–157.

Zawirski, Z. (1927a). Stosunek logiki do matematyki w świetle badań współczesnych. W: *Księga pamiątkowa ku czci Profesora W. Heinricha*. Skład Główny: Księgarnia Jagiellońska, Kraków, 171–206.

Zawirski, Z. (1927b). Próby aksjomatyzacji fizyki i ich znaczenie filozoficzne. *Przegląd Filozoficzny* 30, 289–290.

Zawirski, Z. (1931). *Próby stosowania logiki wielowartościowej do współczesnego przyrodoznawstwa*. Sprawozdania Poznańskiego Towarzystwa Przyjaciół Nauk, Poznań.

Zawirski, Z. (1932a). *Logika trójwartościowa Jana Łukasiewicza. O logice L.E.J. Brouwera. Próby stosowania logiki wielowartościowej do współczesnego przyrodoznawstwa*. Poznańskie Towarzystwo Przyjaciół Nauk, Poznań.

Zawirski, Z. (1932b). Les logiques nouvelles et le champ de leur application. *Revue de Métaphysique et de Morale* 39, 503–519.

Zawirski, Z. (1934a). *Znaczenie logiki wielowartościowej dla poznania i związek jej z rachunkiem prawdopodobieństwa*. Warszawa.

Zawirski, Z. (1934b). *Stosunek logiki wielowartościowej do rachunku prawdopodobieństwa*. Poznańskie Towarzystwo Przyjaciół Nauk, Poznań.

Zawirski, Z. (1935). Über das Verhältniss der mehrwertigen Logik zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Studia Philosophica* 1, 407–442.

Zawirski, Z. (1936a). *L'Evolution de la notion du temps*. Academie Polonaise des Sciences et des Lettres, Cracovie.

Zawirski, Z. (1936b). Bedeutung der mehrwertigen Logik für die Erkenntnis und ihr Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Actes du Huitième Congrès International de Philosophie*, Prague, 175–180.

Zawirski, Z. (1936c). Les rapports de la logique polyvalente avec le calcul des probabilités. *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique*, Vol. IV, Hermann & C[le], Paris, 40–45.

Zawirski, Z. (1936–37). Über die Anwendung der mehrwertigen Logik in der empirischen Wissenschaft. *Erkenntnis* 6, 430–435.

Zawirski, Z. (1938a). Doniosłość badań logicznych i semantycznych dla fizyki współczesnej. *Przegląd Filozoficzny* 41, 25–30.

Zawirski, Z. (1938b). *Logika teoretyczna*, skrypt. Kraków.

Zawirski, Z. (1946). Geneza i rozwój logiki intuicjonistycznej. *Kwartalnik Filozoficzny* 16, 165–222.

Zawirski, Z. (1948). Uwagi o metodzie nauk przyrodniczych. *Przegląd Filozoficzny* 44, 315–318.

Zawirski, Z. (1995). Nauka i metafizyka (I). *Filozofia Nauki* 3(11), 104–135.

Zawirski, Z. (1996). Nauka i metafizyka (II). *Filozofia Nauki* 1(13), 131–143.

Zawirski, Z. (2003). *O stosunku metafizyki do nauk*. Edycję krytyczną rękopisu przygotował Michał Sepioło, pod red. Andrzeja Bednarczyka. Wydział Filozofii i Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa.

Zwinogrodzki, Z. (1966). Z historii nominalizmu w filozofii matematyki. Systemy L. Chwistka–J.R.Myhilla. W: *Rozprawy filozoficzne. Księga pamiątkowa ku czci T. Czeżowskiego*. Toruń, 449–474.

Żyliński, E. (1918). O zasadach logiki i matematyki. *Sprawozdania Polskiego Towarzystwa Naukowego w Kijowie*, 31–32.

Żyliński, E. (1921–1922). O przedmiocie i metodach matematyki współczesnej. *Ruch Filozoficzny* 6, 71a–71b [autoreferat].

Żyliński, E. *et al.* (1924). *Memoriał profesorów: E. Żylińskiego, H. Steinhausa, St. Ruziewicza i S. Banacha w sprawie studjum matematycznego na Wydziale Filozoficznym Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie* adresowany do Departamentu Nauki i Szkół Wyższych Ministerstwa Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego, Lwów, 14 kwietnia 1924 r. Archiwum Instytutu Matematycznego Polskiej Akademii Nauk w Sopocie.

Żyliński, E. (1925). Some Remarks Concerning the Theory of Deduction. *Fundamenta Mathematicae* 7, 203–209.

Żyliński, E. (1927). O przedstawialności funkcyj prawdziwościowych jednych przez drugie. *Przegląd Filozoficzny* 30, z. 4, 290.

Żyliński, E. (1928). Z zagadnień matematyki. II. O podstawach matematyki. *Kosmos*, Seria B 53, 42–53.

Żyliński, E. (1935). *Formalizm Hilberta*. Część 1: *Formalizm* H_1. Nakładem Towarzystwa Naukowego, Lwów.

Summary
The Philosophy of Mathematics and Logic in the 1920s and 1930s in Poland

The aim of this book is to present and analyze a number of philosophical concepts concerning mathematics and logic as formulated by Polish logicians, mathematicians and philosophers in the 1920s and 1930s. It was a remarkable period in the history of Polish science, in particular in the history of Polish logic and mathematics. At that time the Lvov-Warsaw School of Philosophy and Warsaw School of Logic were developed as well as the Polish School of Mathematics – they determined the further development of mathematics and logic as well as philosophy (in particular, analytic philosophy) in Poland and the results obtained then were most important in their appropriate domains. Therefore, it is justified to ask whether and to what extent the development of logic and mathematics was accompanied by a philosophical reflection. In particular one can ask the following questions: (1) was the research in mathematics and logic undertaken in Poland at that time connected with certain philosophical, methodological or epistemological concepts concerning those domains, (2) if not, then what were the "private" philosophical views and sympathies of these logicians and mathematicians and why did these views not influence their investigations in logic and mathematics, (3) if these logical and mathematical investigations were based on certain philosophical assumptions then what those assumptions were, (4) were the results obtained in mathematics and logic the starting point of formulating some philosophical concepts, (5) were there any original philosophical ideas concerning logic and mathematics formulated in Poland, (6) what was the attitude of Polish logicians and mathematicians towards main philosophical concepts in the philosophy of mathematics which had been formulated in the first half of the twentieth century, i.e., logicism, intuitionism and formalism.

We try to answer those questions by analyzing the works of Polish logicians and mathematicians who have a philosophical temperament as well as their research practice.

In Chapter 2, we consider representatives of Polish School of Mathematics: Wacław Sierpiński, Zygmunt Janiszewski, Stefan Mazurkiewicz, Stefan Banach Hugo Steinhaus, Eustachy Żyliński and Leon Chwistek.

Chapter 3 is devoted to an analysis of the philosophical views of the representatives of the Lvov-Warsaw School of Philosophy: Jan Łukasiewicz, Zygmunt Zawirski, Stanisław Leśniewski, Tadeusz Kotarbiński, Kazimierz Ajdukiewicz, Alfred Tarski, Andrzej Mostowski and Henryk Mehlberg.

In Chapter 4 the representatives of Cracow centre of science are considered: Jan Sleszyński, Stanisław Zaremba and Witold Wilkosz.

To indicate the background of scientists being active in the 1920s and 1930s we consider in Chapter 1 some predecessors, in particular: Jan Śniadecki, Józef Maria Hoene-Wroński, Samuel Dickstein and Edward Stamm.

The analysis leads to the conclusion that Polish logicians and mathematicians in the 1920s and 1930s were interested in the philosophical issues concerning logic and mathematics. They were well-informed and knew the current tendencies and doctrines formulated in the philosophy of logic and mathematics quite well. They formulated various commentaries on logicism, intuitionism and formalism. They also formulated their own concepts but – and this is characteristic for them – they were convinced that mathematical and logical investigations should be independent of any *a priori* formulated philosophical assumptions. Mathematics and logic should be autonomous and neutral with respect to philosophy. Therefore, the commentaries on the philosophical issues were rather fragmentary and incomplete, mostly they concerned particular problems connected with actual technical investigations. Polish logicians and mathematicians did not attempt to formulate general philosophical concepts concerning logic and mathematics. Indeed, their philosophical remarks were usually formulated as comments about concrete technical results in logic and the foundations of mathematics. Sometimes these ideas were not quite consistent with research practice – for example, Tarski was a nominalist but in his investigations he used various infinitistic methods inconsistent with nominalism. In this way the philosophical views did not restrict the methods which were accepted and used in technical research. In fact, these philosophical views were treated by Polish logicians and mathematicians as private views that should not influence the technical work. When certain views were formulated, then various possibilities were considered and definite declarations avoided. A good illustration of this attitude is the problem of the controversial axiom of choice. There was no ideology and no definite philosophical concept that would form a basis for the development of logic and mathematics in Poland in the 1920s and 1930s.

In the Polish School of Mathematics a set-theoretical trend had been developed but it has a methodological and not a strictly philosophical character. In the Warsaw School of Logic, philosophy played an important role – in particular certain concrete logical investigations were philosophically motivated, e.g., Łukasiewicz's many-valued logic or Tarski's semantic definition of truth. Nevertheless, when a logical problem was formulated then the philosophical motivation stopped playing any role and only technical logical research and the results obtained by any correct methods were important.

One should add that there were two exceptions to this pattern, namely L. Chwistek and S. Leśniewski – they were interested only in those logical problems, which were implied by their own philosophical views of the foundations of mathematics. Their philosophical views generated their interest in particular problems of logic or mathematics.

What were the sources of the described attitude of Polish logicians and mathematicians towards philosophy? They can be seen in the distinction between the research practice and the philosophical discussions concerning the foundations of mathematics and logic and also in the principle (postulated by K. Twardowski and Lvov-Warsaw School of Philosophy) of distinguishing between science and *Weltanschauung*. According to the latter, when one is engaged in research in a particular discipline then the philosophical issues connected with it become something like *Weltanschauung* and when a concrete philosophical problem is investigated then this should be done by scientific methods.

Trans. by Beata and Rob Trapnell

Zusammenfassung
Philosophie der Mathematik und Logik in Polen zwischen den beiden Weltkriegen

Das Ziel dieses Buches ist, die philosophischen Ansichten der polnischen Logiker, Mathematiker und Philosophen über die Mathematik und Logik, die in den Jahren zwischen den beiden Weltkriegen formuliert wurden, zu präsentieren und zu analysieren.

Warum geht es gerade um diese Periode? Es war eine bemerkenswerte Epoche in der Geschichte der polnischen Wissenschaften, insbesondere in der Geschichte der polnischen Logik und der Mathematik. In dieser Zeit entstanden die philosophische Lemberg-Warschauer Schule und die Warschauer Schule der Logik als auch die Polnische Mathematische Schule. Sie haben die weitere Entwicklung der Mathematik und Logik sowie auch der Philosophie (insbesondere der analytischen Philosophie) in Polen bestimmt. Die Resultate, die damals erzielt wurden, gehöhren zu den wichtigsten Resultaten auf diesen Gebieten. Darum liegt es nahe zu fragen, ob und wie diese Entwicklung der Logik und Mathematik von einer philosophischen Reflexion begleitet wurde. Insbesondere folgende Fragen können gestellt werden: (1) Waren die mathematischen und logischen Untersuchungen in Polen zu dieser Zeit mit irgendwelchen philosophischen (insbesondere methodologischen oder epistemologischen) Konzepten, die Logik und Mathematik betreffen, verbunden? (2) War das nicht der Fall, wie sahen dann die persönlichen philosophischen Ansichten und Neigungen der Logiker und Mathematiker aus und warum haben sie ihre logische und mathematische Untersuchungen nicht beeinflusst? (3) Wenn die logischen und mathematischen Untersuchungen auf philosophischen Voraussetzungen basierten, welches waren diese Voraussetzungen? (4) Waren umgekehrt die Resultate der Logik und der Mathematik der Ausgangspunkt für spezielle philosophische Konzeptionen? (5) Wurden in Polen Ansichten über Logik und Mathematik formuliert? (6) Wie standen die polnischen Logiker und Mathematiker zu den Hauptkonzeptionen in der Philosophie der Mathematik und Logik, die in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts formuliert wurden, d.h. zum Logizismus, Intuitionismus und Formalismus.

Um diese Fragen zu beantworten, analysieren wir die Werke und die Forschungspraxis der polnischen Logiker und Mathematiker. Im Kapitel 2 betrachten wir die Vertreter der Polnischen Mathematischen Schule: Wacław Sierpiński, Zygmunt Janiszewski, Stefan Mazurkiewicz, Stefan Banach, Hugo Steinhaus, Eustachy Żyliński und Leon Chwistek. Kapitel 3 ist der Analyse der philosophischen Ansichten der Vertreter der philosophischen Lemberg-Warschauer Schule gewidmet. Dort werden die Ansichten von Jan Łukasiewicz, Zygmunt Zawirski, Stanisław Leśniewski, Tadeusz Kotarbiński, Kazimierz Ajdukiewicz, Alfred Tarski, Andrzej Mostowski und Henryk Mehlberg untersucht. Im Kapitel 4 geht es um die Vertreter des wissenschaftlichen Zentrums in Krakau, d.h. um Jan Sleszyński, Stanisław Zaremba und Witold Wilkosz. Um einige der Vorgänger und ihre philosophische Haltung zur Logik und Mathematik kennenzulernen, haben wir zuvor im Kapitel 1 Jan Śniadecki, Józef Maria Hoene-Wroński, Samuel Dickstein und Edward Stamm vorgestellt.

Die Analysen führen zu dem Ergebnis, dass polnische Logiker und Mathematiker in den Jahren zwischen den beiden Weltkriegen sich sehr für philosophische Probleme der Logik und Mathematik interessierten. Sie waren gut informiert und wussten viel über die gegenwärtigen Strömungen und Theorien in der Philosophie der Logik und Mathematik. Sie haben in unterschiedlicher Weise den Logizismus, Intuitionismus und Formalismus kommentiert. Sie formulierten zudem ihre eigenen philosophischen Ansichten, aber – und das war typisch für sie – sie waren davon überzeugt, dass mathematische und logische Untersuchungen frei und unabhängig sein müssten von irgendwelchen *a priori* formulierten philosophischen Voraussetzungen. Mathematik und Logik sollten gegenüber der Philosophie autonom und neutral sein. Deswegen waren philosophische Kommentare und Bemerkungen eher selten und oft unvollständig. Wir finden sie überwiegend im direkten Zusammenhang mit formal-technischen Untersuchungen in Logik und der Mathematik. Polnische Logiker und Mathematiker haben selbst keine allgemeinen Konzeptionen oder Theorien in der Philosophie der Logik und Mathematik formuliert. Mehr noch, ihre Beiträge waren zumeist nur Kommentare zu konkreten Resultaten in der Logik und den Grundlagen der Mathematik. Es gab Fälle, in denen diese Kommentare der eigenen Forschungspraxis widersprachen – Tarski z.B. war Nominalist, aber in seinen Untersuchungen benutzte er infinitistische Methoden, die ein Nominalist nie hätte zulassen dürfen. Dies zeigt, dass philosophische Ansichten die Methoden in den Untersuchungen nicht einschränken mussten. In der Tat sah man die philosophischen Ansichten der polnischen Logiker und Mathematiker als Privatsache – ohne Einfluss auf die wissenschaftliche Arbeit. Wenn überhaupt Konzeptionen formuliert wurden, dann versuchte man, verschiedene Alternativen einzubeziehen und keinesfalls eine endgültige Haltung einzunehmen. Ein gutes Beispiel liefert die Position zum kontroversen Auswahlaxiom: Folgerungen dieses Axioms wurden intensiv untersucht und seine Rolle in der Mathematik diskutiert, ohne aber zu entscheiden, ob man es akzeptieren oder ablehnen sollte. Es gab keine Ideologie und keine besondere philosophische Konzeption, die die Basis der Entwicklung der Logik und der Mathematik in Polen in den Jahren zwischen den beiden Weltkriegen bildete.

In der Polnischen Mathematischen Schule folgte man der allgemeinen Tendenz der Mengentheoretisierung. Dies hatte aber eher methodologische als philosophische (ontologische oder epistemologische) Bedeutung. In der Warschauer Schule der Logik hingegen spielte Philosophie eine wichtige Rolle. Einige logische Untersuchungen wurden durch philosophische Ideen angeregt, z.B. mehrwertige Logiken bei Łukasiewicz oder die semantische Definition der Wahrheit von Tarski. Immer aber, wenn das logische Problem formuliert war, dann trat die philosophische Motivation in den Hintergrund, und es ging allein um die technischen Untersuchungen und Resultate, die mit beliebigen, als richtig akzeptierten Methoden gewonnen werden konnten.

Wir betonen jedoch, dass es zwei Ausnahmen gab, L. Chwistek und S. Leśniewski. Sie interessierten sich allein für diejenigen Probleme der Logik und den Grundlagen der Mathematik, die mit ihren eigenen philosophischen Konzeptionen zusammenhingen. Ihre Interessen für Logik und Grundlagen der Mathematik waren eine Konsequenz ihrer philosophischen Untersuchungen und Konzeptionen.

Woher kamen die beschriebenen Auffassungen polnischer Logiker und Mathematiker über Philosophie. Eine Grundlage war die immer präsente Unterscheidung zwischen der Forschungspraxis und den philosophischen Diskussionen über die Grundlagen der Mathematik und Logik. Eine andere Quelle war wohl das von K. Twardowski und der philosophischen Lemberg-Warschauer Schule formulierte Prinzip der Unterscheidung zwischen Wissenschaft und Weltanschauung. D.h., führt man Untersuchungen in einer bestimmten Disziplin, dann sind die damit verbundenen philosophischen Überlegungen etwas wie Weltanschauung. Studiert man hingegen ein bestimmtes philosophisches Problem, dann sollten wissenschaftliche Methoden benutzt werden.

Übersetzt von Roman Murawski

Indeks

PROGRAM
MONOGRAFIE FUNDACJI NA RZECZ NAUKI POLSKIEJ

W 1994 roku Fundacja na rzecz Nauki Polskiej zainaugurowała publikację serii Monografie FNP, obejmującej swoim zakresem nauki humanistyczne i społeczne.
W serii są wydawane niepublikowane wcześniej prace polskich naukowców, wyłaniane w drodze konkursu.

Nadsyłane na konkurs prace powinny charakteryzować się:
- wysokim poziomem naukowym,
- odkrywczością założeń i wagą wyników,
- oryginalnością ujęcia,
- integralnością tematyki i formy,
- interesującym przedstawieniem tematu, dostępnym dla szerszego grona czytelników.

Fundacja zapewnia Laureatom pokrycie kosztów wydania książki w serii Monografie FNP oraz honorarium.
Konkurs odbywa się w trybie ciągłym. Prace należy składać w Fundacji w dwóch egzemplarzach (wydruk oraz wersja elektroniczna), wraz z wypełnionym wnioskiem.

Od 2011 roku wydawcą serii Monografie FNP jest Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu. Oprócz wersji papierowych książki będą dostępne również w formie e-book. Ponadto tytuły wydane w poprzednich latach będą zamieszczane na stronie internetowej www.fnp.org.pl/monografie w formule Open Access.

Dodatkowe informacje znajdą Państwo na stronach
www.fnp.org.pl
www.fnp.org.pl/monografie

FNP

DOTYCHCZAS W SERII
MONOGRAFIE FNP
UKAZAŁY SIĘ NASTĘPUJĄCE TYTUŁY

1995

Jerzy Michalski, *Sarmacki republikanizm w oczach Francuza. Mably i konfederaci barscy*

Magdalena Micińska, *Między Królem Duchem a mieszczaninem. Obraz bohatera narodowego w piśmiennictwie polskim przełomu XIX i XX wieku (1890–1914)*

Dariusz Słapek, *Gladiatorzy i polityka. Igrzyska w okresie późnej Republiki Rzymskiej*

Maciej Soin, *Filozofia Stanisława Ignacego Witkiewicza*

Wojciech Wrzosek, *Historia – Kultura – Metafora. Powstanie nieklasycznej historiografii*

1996

Jerzy Bobryk, *Akty świadomości i procesy poznawcze*

Teresa Kostkiewiczowa, *Oda w poezji polskiej. Dzieje gatunku*

Józef Maciuszek, *Obraz człowieka w dziele Kępińskiego*

Janusz Ruszkowski, *Adam Mickiewicz i ostatnia krucjata. Studium romantycznego millenaryzmu*

Teresa Rysiewska, *Struktura rodowa w społecznościach pradziejowych*

Katarzyna Stemplewska-Żakowicz, *Osobiste doświadczenie a przekaz społeczny. O dwóch czynnikach rozwoju poznawczego*

Andrzej Szahaj, *Ironia i miłość. Neopragmatyzm Richarda Rorty'ego w kontekście sporu o postmodernizm*

FNP

1997

Zbigniew Bokszański, *Stereotypy a kultura*

Andrzej Dziubiński, *Na szlakach Orientu. Handel między Polską a Imperium Osmańskim w XVI–XVIII wieku*

Jan Hartman, *Heurystyka filozoficzna*

Jacek Leociak, *Tekst wobec Zagłady (O relacjach z getta warszawskiego)*

Sławomir Mazurek, *Wątki katastroficzne w myśli rosyjskiej i polskiej 1917–1950*

Jacek Migasiński, *W stronę metafizyki. Nowe tendencje metafizyczne w filozofii francuskiej połowy XX wieku*

Tomasz Mikocki, *Zgodna, pobożna, płodna, skromna, piękna... Propaganda cnót żeńskich w sztuce rzymskiej*

Ryszard Nycz, *Język modernizmu. Prolegomena historycznoliterackie*

Łucja Okulicz-Kozaryn, *Dzieje Prusów*

Józef Piórczyński, *Mistrz Eckhart. Mistyka jako filozofia*

Lucylla Pszczołowska, *Wiersz polski. Zarys historyczny*

Joanna Tokarska-Bakir, *Wyzwolenie przez zmysły. Tybetańskie koncepcje soteriologiczne*

Szymon Wróbel, *Odkrycie nieświadomości. Czy destrukcja kartezjańskiego pojęcia podmiotu poznającego?*

1998

Jacek Banaszkiewicz, *Polskie dzieje bajeczne Mistrza Wincentego Kadłubka*

Jan Doktór, *Śladami Mesjasza-Apostaty*

Alina Motycka, *Nauka a nieświadomość. Filozofia nauki wobec kontekstu tworzenia*

Cezary Wodziński, *Światłocienie zła*

Ryszard Zajączkowski, *„Głos prawdy i sumienie". Kościół w pismach Cypriana Norwida*

Piotr Żbikowski, *„...bólem śmiertelnym ściśnione mam serce..." Rozpacz oświeconych u źródeł przełomu w poezji polskiej w latach 1793–1805*

1999

Łukasz Chimiak, *Gubernatorzy rosyjscy w Królestwie Polskim 1863–1915. Szkic do portretu zbiorowego*

Henryk Domański, *Prestiż*

Marcin Kula, *Anatomia rewolucji narodowej (Boliwia w XX wieku)*

Wojciech Tomasik, *„Inżynieria dusz". Literatura realizmu socjalistycznego w planie „propagandy monumentalnej"*

Michał Tymowski, *Państwa Afryki przedkolonialnej*

Andrzej Wierzbicki, *Historiografia polska doby romantyzmu*

Grzegorz Wołowiec, *Nowocześni w PRL. Przyboś i Sandauer*

2000

Hanna Bojar, *Mniejszości społeczne w państwie i społeczeństwie III Rzeczypospolitej Polskiej*

Bogusława Budrowska, *Macierzyństwo jako punkt zwrotny w życiu kobiety*

Katarzyna Cieślak, *Między Rzymem, Wittenbergą a Genewą. Sztuka Gdańska jako miasta podzielonego wyznaniowo*

Anna Engelking, *Klątwa. Rzecz o ludowej magii słowa*

Agnieszka Fulińska, *Naśladowanie i twórczość. Renesansowe teorie imitacji, emulacji i przekładu*

Grzegorz Grochowski, *Tekstowe hybrydy*

Andrzej Hejmej, *Muzyczność dzieła literackiego*

Gerard Labuda, *Święty Wojciech.*
Biskup-męczennik, patron Polski, Czech i Węgier

Lech Leciejewicz, *Nowa postać świata.*
Narodziny średniowiecznej cywilizacji europejskiej

Paweł Rodak, *Wizje kultury pokolenia wojennego*

Wojciech Sady, *Spór o racjonalność naukową.*
Od Poincarégo do Laudana

Danuta Sosnowska, *Seweryn Goszczyński: biografia duchowa*

Tomasz Stryjek, *Ukraińska idea narodowa*
okresu międzywojennego

Przemysław Urbańczyk, *Władza i polityka*
we wczesnym średniowieczu

Magdalena Zowczak, *Biblia ludowa.*
Interpretacje wątków biblijnych w kulturze ludowej

2001

Andrzej Dąbrówka, *Teatr i sacrum w średniowieczu*

Iwona Massaka, *Eurazjatyzm. Z dziejów rosyjskiego misjonizmu*

Maciej Soin, *Gramatyka i metafizyka. Problem Wittgensteina*

Wojciech Szczerba, *Koncepcja wiecznego powrotu w myśli*
wczesnochrześcijańskiej

2002

Henryk Domański, *Polska klasa średnia*

Magdalena Heydel, *Obecność T.S. Eliota w literaturze polskiej*

Kazimierz Kondrat, *Racjonalność i konflikt wierzeń religijnych*

Teresa Kostkiewiczowa, *Polski wiek świateł. Obszary swoistości*

Krzysztof Lewalski, *Kościoły chrześcijańskie w Królestwie Polskim wobec Żydów w latach 1855–1915*

Stanisław Łojek, *Hegel i Nietzsche wobec problemu polityczności*

Tomasz Małyszek, *Romans Freuda i Gradivy. Rozważania o psychoanalizie*

Marek Nalepa, *„Takie życie dziś nasze, gdy Polska ustaje..." Pisarze stanisławowscy a upadek Rzeczypospolitej*

Zbigniew Nerczuk, *Sztuka a prawda. Problem sztuki w dyskusji między Gorgiaszem a Platonem*

Ewa Nowak-Juchacz, *Autonomia jako zasada etyczności. Kant, Fichte, Hegel*

Wawrzyniec Rymkiewicz, *Ktoś i Nikt. Wprowadzenie do lektury Heideggera*

Barbara Szmigielska, *Marzenia senne dzieci*

2003

Wojciech Brojer, *Diabeł w wyobraźni średniowiecznej. Trzynastowieczne exempla kaznodziejskie*

Małgorzata Czarnocka, *Podmiot poznania a nauka*

Adam Fitas, *Głos z labiryntu. O pismach Karola Ludwika Konińskiego*

Maciej Gołąb, *Spór o granice poznania dzieła muzycznego*

Jan Krasicki, *Bóg, człowiek i zło. Studium filozofii Włodzimierza Sołowjowa*

Antoni Mączak, *Nierówna przyjaźń. Układy klientalne w perspektywie historycznej*

2004

Jan Doktór, *Początki chasydyzmu polskiego*

Przemysław Gut, *Leibniz. Myśl filozoficzna w XVII wieku*

Alicja Jarzębska, *Spór o piękno muzyki. Wprowadzenie do kultury muzycznej XX wieku*

Agnieszka Kluba, *Autoteliczność – referencyjność – niewyrażalność. O nowoczesnej poezji polskiej (1918–1939)*

Katarzyna Kuczyńska-Koschany, *Rilke poetów polskich*

Franciszek Longchamps de Bérier, *Nadużycie prawa w świetle rzymskiego prawa prywatnego*

Maciej Mycielski, *„Miasto ma mieszkańców, wieś obywateli". Kajetana Koźmiana koncepcje wspólnoty politycznej*

Krzysztof Nawotka, *Aleksander Wielki*

Dorota Pietrzyk-Reeves, *Idea społeczeństwa obywatelskiego. Współczesna debata i jej źródła*

Jan Pisuliński, *Nie tylko Petlura. Kwestia ukraińska w polskiej polityce zagranicznej w latach 1918–1923*

Radosław Sojak, *Paradoks antropologiczny. Socjologia wiedzy jako perspektywa ogólnej teorii społeczeństwa*

Tomasz Szlendak, *Supermarketyzacja. Religia i obyczaje seksualne młodzieży w kulturze konsumpcyjnej*

Przemysław Urbańczyk, *Zdobywcy północnego Atlantyku*

2005

Andrzej Dziubiński, *Stosunki dyplomatyczne polsko-tureckie w latach 1500–1572 w kontekście międzynarodowym*

Magdalena Górska, *Polonia – Respublica – Patria. Personifikacja Polski w sztuce XVI–XVIII wieku*

Roman Michałowski, *Zjazd gnieźnieński. Religijne przesłanki powstania arcybiskupstwa gnieźnieńskiego*

Jerzy Rohoziński, *Święci, biczownicy i czerwoni chanowie. Przemiany religijności muzułmańskiej w radzieckim i poradzieckim Azerbejdżanie*

Krzysztof Skwierczyński, *Recepcja idei gregoriańskich w Polsce do początku XIII wieku*

2006

Nikodem Bończa Tomaszewski, *Źródła narodowości. Powstanie i rozwój polskiej świadomości w II połowie XIX i na początku XX wieku*

Sławomir Buryła, *Opisać Zagładę. Holocaust w twórczości Henryka Grynberga*

Zbigniew Kloch, *Odmiany dyskursu. Semiotyka życia publicznego w Polsce po 1989 roku*

Sebastian Tomasz Kołodziejczyk, *Granice pojęciowe metafizyki*

Rafał Koschany, *Przypadek. Kategoria egzystencjalna i artystyczna w literaturze i filmie*

Józef Piórczyński, *Pierwszy egzystencjalista. Filozofia absolutnej skończoności Fryderyka Jacobiego*

Maciej Płaza, *O poznaniu w twórczości Stanisława Lema*

Małgorzata Puchalska-Wasyl, *Nasze wewnętrzne dialogi. O dialogowości jako sposobie funkcjonowania człowieka*

Justyna Straczuk, *Cmentarz i stół. Pogranicze prawosławno-katolickie w Polsce i na Białorusi*

Stanisław Zapaśnik, *„Walczący islam" w Azji Centralnej. Problem społecznej genezy zjawiska*

2007

Katarzyna Filutowska, *System i opowieść. Filozofia narracyjna w myśli F. W. J. Schellinga w latach 1800–1811*

Jakub Kloc-Konkołowicz, *Rozum praktyczny w filozofii Kanta i Fichtego. Prymat praktyczności w klasycznej myśli niemieckiej*

Barbara Krawcowicz, *William James. Pragmatyzm i religia*

Paweł Majewski, *Między zwierzęciem a maszyną. Utopia technologiczna Stanisława Lema*

Teresa Michałowska, *Średniowieczna teoria literatury w Polsce. Rekonesans*

Małgorzata Mikołajczak, *Pomiędzy końcem i apokalipsą. O wyobraźni poetyckiej Zbigniewa Herberta*

Aneta Pieniądz, *Tradycja i władza. Królestwo Włoch pod panowaniem Karolingów, 774–875*

Wojciech Tomasik, *Ikona nowoczesności. Kolej w literaturze polskiej*

Piotr Żbikowski, *W pierwszych latach narodowej niewoli. Schyłek polskiego Oświecenia i zwiastuny romantyzmu*

2008

Grażyna Jurkowlaniec, *Epoka nowożytna wobec średniowiecza. Pamiątki przeszłości, cudowne wizerunki, dzieła sztuki*

Halina Manikowska, *Jerozolima – Rzym – Compostela. Wielkie pielgrzymowanie u schyłku średniowiecza*

Maciej Potz, *Granice wolności religijnej w państwie demokratycznym. Kwestie wolności sumienia i wyznania oraz stosunek państwa do religii w Stanach Zjednoczonych Ameryki w latach 90. XX wieku*

Beata Śniecikowska, *„Nuż w uhu”? Koncepcje dźwięku w poezji polskiego futuryzmu*

FNP

Przemysław Urbańczyk, *Trudne początki Polski*

2009

Weronika Chańska, *Nieszczęsny dar życia. Filozofia i etyka jakości życia w medycynie współczesnej*

Jacek Gądecki, *Za murami. Krytyczna analiza dyskursu na temat osiedli grodzonych w Polsce*

Maciej Gorczyński, *Prace u podstaw. Polska teoria literatury w latach 1913–1939*

Krzysztof Jaskułowski, *Nacjonalizm bez narodów. Nacjonalizm w koncepcjach anglosaskich nauk społecznych*

Justyna Kowalska-Leder, *Doświadczenie Zagłady z perspektywy dziecka w polskiej literaturze dokumentu osobistego*

Stanisław Łojek, *Megalopsychokracja. O cnocie w polityce i polityce cnoty (Od Homera do Arendt i Straussa)*

Grzegorz Myśliwski, *Wrocław w przestrzeni gospodarczej Europy (XIII–XV wiek). Centrum czy peryferie?*

Robert Poczobut, *Między redukcją a emergencją. Spór o miejsce umysłu w świecie fizycznym*

Artur Przybysławski, *Buddyjska filozofia pustki*

Tadeusz Szubka, *Filozofia analityczna. Koncepcje, metody, ograniczenia*

Tomasz Tiuryn, *Boecjusz i problem uniwersaliów*

Marcin Trzęsiok, *Pieśni drzemią w każdej rzeczy. Muzyka i estetyka wczesnego romantyzmu niemieckiego*

Adam Workowski, *Ontologiczne podstawy posiadania*

Paweł Żmudzki, *Władca i wojownicy. Narracje o wodzach, drużynie i wojnach w najdawniejszej historiografii Polski i Rusi*

FNP

2010

Piotr Celiński, *Interfejsy. Cyfrowe technologie w komunikowaniu*

Anna Dziedzic, *Antropologia filozoficzna Edwarda Abramowskiego*

Piotr Filipkowski, *Historia mówiona i wojna. Doświadczenie obozu koncentracyjnego w perspektywie narracji biograficznych*

Krzysztof Hubaczek, *Bóg a zło. Problematyka teodycealna w filozofii analitycznej*

Monika Małek, *Liberalizm etyczny Johna Stuarta Milla. Współczesne ujęcia u Johna Graya i Petera Singera*

Ireneusz Piekarski, *Z ciemności. O twórczości Juliana Stryjkowskiego*

Marek Słoń, *Miasta podwójne i wielokrotne w średniowiecznej Europie*

Jan Wasiewicz, *Oblicza nicości. Z dziejów nihilizmu europejskiego w XIX wieku*

2011

Wojciech Bałus, *Gotyk bez Boga? W kręgu znaczeń symbolicznych architektury sakralnej XIX wieku*

Natalia Bloch, *Urodzeni uchodźcy. Tożsamość diasporyczna pokolenia młodych Tybetańczyków w Indiach*

Mirosława Buchholtz, *Henry James i sztuka auto/biografii*

Bartosz Kuźniarz, *Goodbye Mr. Postmodernism. Teorie społeczne myślicieli późnej lewicy*

Monika Murawska, *Filozofowanie z zamkniętymi oczami. Fenomenologia ciała Michela Henry'ego*

Andrzej Wypustek, *Bogowie, herosi i wybrańcy: studia nad wizerunkiem zmarłych w greckich epigramatach nagrobnych w epoce hellenistycznej i grecko-rzymskiej*

Radosław Zenderowski, *Religia a tożsamość narodowa i nacjonalizm w Europie Środkowo-Wschodniej. Między etnicyzacją religii a sakralizacją etnosu (narodu)*

Dorota Zygmuntowicz, *Praktyka polityczna. Od* Państwa *do* Praw *Platona*

W PRZYGOTOWANIU

Tamara Brzostowska-Tereszkiewicz, *Ewolucje teorii. Biologizm w modernistycznym literaturoznawstwie rosyjskim*

Anna Engelking, *Kołchoźnicy. Antropologiczne studium tożsamości wsi białoruskiej przełomu XX i XXI wieku*

Paweł Gancarczyk, *Muzyka wobec rewolucji druku. Przemiany w kulturze muzycznej XVI wieku*

Anna Kutaj-Markowska, *Dwa przełomy. Sztuka polska po 1955 i 1989 roku*

Michał Łuczewski, *Wieczny naród. Naród i religia w Żmiącej. Wprowadzenie do integralnej teorii narodu*

Magdalena Rembowska-Płuciennik, *Poetyka intersubiektywności. Kognitywistyczna teoria narracji a proza XX wieku*

Tadeusz Szubka, *Neopragmatyzm*

Paweł Załęski, *Społeczeństwo obywatelskie: projekt neoliberalny*

FNP