



Jacek Jurkowski

KORELACJE NIEKLASYCZNE

Kwantowe splątanie i dyskord



Wydawnictwo Naukowe
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika

JACEK JURKOWSKI

**Korelacje nieklasyczne
Kwantowe splątanie i dyskord**



WYDAWNICTWO NAUKOWE
UNIwersYTETU MIKOŁAJA KOPERNIKA

Toruń, 2014

Recenzenci:

dr hab. Andrzej Jamiołkowski, prof. UMK
prof. dr hab. Ryszard Horodecki

Projekt okładki:

Tomasz Jaroszewski

© Copyright by Wydawnictwo Naukowe UMK
Toruń 2014

ISBN 978-83-231-3198-4

Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika

Redakcja: ul. Gagarina 5, 87-100 Toruń

tel. +48 56 611 42 95, fax +48 56 611 47 05

e-mail: wydawnictwo@umk.pl

Dystrybucja: ul. Reja 25, 87-100 Toruń

tel. +48 56 611 42 38, e-mail: books@umk.pl

www.wydawnictwoumk.pl

Druk: Drukarnia Wydawnictwa Naukowego UMK

Ul. Gagarina 5, 87-100 Toruń, tel. +48 56 611 22 15

Spis treści

Wstęp	7
Rozdział 1. Elementy formalizmu matematycznego	11
1.1. Przestrzeń Hilberta układu złożonego	11
1.1.1. Reprezentacja Fano-Blocha stanów układu dwóch kubitów i jej uogólnienia	13
1.1.2. Pomiar von Neumanna i jego uogólnienia	15
1.2. Informacja i entropia	16
1.3. Entropie Shannona i von Neumanna	17
1.3.1. Entropia Shannona i wielkości pokrewne	17
1.3.2. Entropia von Neumanna i wielkości pokrewne	21
1.4. Uogólnione funkcje entropowe	25
1.4.1. Entropia Tsallisa i wielkości pokrewne	26
1.5. Odwzorowania dodatnie	28
1.5.1. Klasy odwzorowań dodatnich	28
Odwzorowanie redukcji i jego uogólnienia	29
Odwzorowanie Choi i jego uogólnienia	30
Inne przykłady	31
1.5.2. Izomorfizm Choi-Jamiołkowskiego	31
1.6. Zakres numeryczny operatora	33
1.6.1. Lokalny zakres numeryczny dla operatora samosprzężonego	34
1.6.2. Lokalny zakres numeryczny dla operatora cyklicznego	35
1.6.3. Lokalny zakres numeryczny operatora cyklicznego dla $d = 2$	42
Rozdział 2. Korelacje w układach fizycznych	47
2.1. Korelacje nieklasyczne	49
2.2. Korelacje nielokalne i nierówności Bella	51
2.2.1. EPR-sterowalność	54
2.3. Geometryczne miary korelacji	55
2.3.1. Przegląd geometrycznych miar korelacji	57
2.4. Entropowe miary korelacji	58
2.4.1. Kwantowy dyskord i wielkości pokrewne	58
2.4.2. Utrata informacji przy pomiarze	61
2.5. Dynamika korelacji	64

Rozdział 3. Splątanie	67
3.1. Separowalność i splątanie	68
3.1.1. Stany czyste	68
3.1.2. Stany mieszane	69
3.1.3. Jednoznaczność rozkładu stanu separowalnego	70
3.1.4. Stany PPT	71
3.1.5. Destylacja splątania i splątanie związane	72
3.2. Ogólne metody wykrywania splątania	73
3.2.1. Uogólniony rozkład Schmidta	74
3.2.2. Nieuporządkowanie stanów. Kryteria majoryzacji i entropowe	75
3.2.3. Wykorzystanie funkcji entropowych	76
3.2.4. Permutacje elementów macierzowych. Kryterium Peresa-Horodeckiego i reorganizacji	79
3.2.5. Uogólnienia kryterium reorganizacji	81
3.2.6. Kryterium obrazu	82
3.2.7. Kryterium oparte na odwzorowaniach dodatnich	86
3.2.8. Wykrywanie splątania przy pomocy świadków	86
3.2.9. Kryterium redukcji i jego uogólnienia	89
3.2.10. Kryteria oparte o macierz kowariancji	91
3.3. Badanie splątania szczególnych rodzin stanów	94
3.3.1. Stany niezmiennicze ze względu na lokalne operacje unitarne	94
Stany Wernera	95
Stany izotropowe	97
Stany ortogonalnie niezmiennicze	99
Stany TT -niezmiennicze	101
3.3.2. Splątane stany PPT	103
3.3.3. Stany SPPT	104
Konstrukcja klasy stanów PPT układu $2 \otimes d$	104
Rodzina stanów SPPT układu $2 \otimes d$	106
Konstrukcja stanów SPPT układu $d_A \otimes d_B$	109
Własności stanów SPPT	111
3.3.4. Stany cykliczne	117
3.4. Miary splątania	121
3.4.1. Operacje LOCC	122
3.4.2. Miary splątania oparte o protokoły LOCC	124
3.4.3. Aksjomatyczna definicja miar splątania	125
3.4.4. Przegląd różnych miar splątania	128
Entropia splątania	129
Zgodność	132
Ujemność i logarytmiczna ujemność	136
3.4.5. Miary oparte na odległości od zbioru stanów kwantowych	138
Względna entropia splątania	140
Geometryczna miara splątania	141
3.5. Oszacowania zgodności	143
3.5.1. Oszacowania algebraiczne	145
3.5.2. Oszacowania przy użyciu norm	147
3.5.3. Oszacowania z wykorzystaniem świadków splątania	149
3.5.4. Oszacowania z wykorzystaniem przekształceń dodatnich	155

3.6. Dynamika splątania	157
Rozdział 4. Kwantowy dyskord	161
4.1. Własności kwantowego dyskordu	163
4.2. Kwantowy dyskord dla dwóch kubitów	166
4.2.1. Diagonalne stany Bella	169
4.2.2. Kwantowy dyskord dla stanów X	171
4.3. Geometryczny dyskord	174
4.3.1. Geometryczny dyskord dla dwóch kubitów	176
4.3.2. Oszacowania geometrycznego dyskordu	178
4.4. Dyskord oparty o entropię Tsallisa	180
4.5. Dynamika kwantowego dyskordu	187
4.5.1. Ewolucja układów otwartych a korelacje w stanie początkowym	189
Bibliografia	191

Wstęp

Motywacją do powstania tego opracowania była chęć przybliżenia gronu akademickiemu i zainteresowanemu czytelnikowi pewnych wybranych zagadnień dotyczących tematyki korelacji w układach fizycznych. Brak jest na polskim rynku tego typu opracowania, które uzupełniałoby literaturę prężnie rozwijającej się optyki kwantowej [115, 177] o bardziej teoretyczne aspekty spokrewnione z badaniem korelacji kwantowych lub, ogólniej, nieklasycznych. Różnorodność metod badawczych, teoretycznych i eksperymentalnych stosowanych przy klasyfikacji i opisie korelacji, a także różne aspekty ich wykorzystania, czynią tę tematykę niesłychanie obszerną i praktycznie niemożliwą do objęcia z wszystkimi jej aspektami. Usprawiedliwia to częściowo skupienie się w tym opracowaniu na dwóch głównych rodzajach korelacji kwantowych: splątaniu i dyskordzie. Innym, równie ważnym, powodem zawężenia tematyki są zainteresowania i wiedza autora, które to skupiają się wokół teoretycznych zagadnień związanych z szacowaniem i ilościową oceną stopnia skorelowania stanów kwantowych. Dlatego wiele zagadnień omówiono znacznie szerzej niż by na to zasługiwały w tym opracowaniu, a inne doczekały się tylko niewielu zdań komentarza i wskazania źródła szerszego ich omówienia [20, 50, 93, 96]. Niewątpliwie wiele ważkich zagadnień zostało też całkowicie pominiętych [27, 40].

Opracowanie, skupione na ostatnim ćwierćwieczu badań, omawia teoretyczne metody badania i klasyfikowania splątania — pewnej formy korelacji rozpoznanej już przez E. Schrödingera u samego zarania mechaniki kwantowej — oraz kwantowego dyskordu, z naciskiem na problemy związane z ich ilościową oceną. Szczególną uwagę w tym kontekście poświęcono wykorzystaniu uogólnionych funkcji entropowych, takich jak entropia Renyi’ego i Tsallisa, które dowiodły swej użyteczności nie tylko w fizyce statystycznej, ale także w zagadnieniu pomiaru wielkości korelacji.

Aspekty teoretyczne uzupełnione są o liczne przykłady, w których pokazano, jak ogólne procedury sprawdzają się na grupie modelowych stanów, w szczególności na stanach o wysokiej symetrii (Wernera, izotropowych) oraz na pewnych rodzinach stanów cyklicznych. Wyniki obliczeń są na ogół przedstawiane na rysunkach.

Opracowanie zostało podzielone na cztery zasadnicze części. W rozdziale 1 omówiono pewne wybrane elementy formalizmu matematycznego, niezbędnego i użytecznego, zdaniem autora, przy lekturze dalszych rozdziałów. Znalazły się tu podstawowe definicje i oznaczenia wielkości związanych z konstrukcją przestrzeni Hilberta układu złożonego, omówiono własności entropii Shannona, von Neumanna i ich uogólnień, a także przedstawiono szereg rodzin odwzorowań dodatnich i pochodzących od nich świadków splątania, które to obiekty zostały później wykorzystane przy detekcji i ilościowej ocenie splątania. Zarysowano

także problemy wyznaczania zakresów numerycznych operatorów, skupiając się przede wszystkim na szczególnej klasie operatorów cyklicznych. Uzupełnienie i szersze omówienie prezentowanego materiału można znaleźć w [209, 35, 124, 216].

Krótkie omówienie i wprowadzenie do problemów związanych z klasyfikacją korelacji znalazły się w rozdziale 2. W tym miejscu warto zwrócić uwagę, że tematyka historycznych aspektów badania korelacji nieklasycznych, sięgająca czasów pracy Einsteina, Podolskiego i Rosena z 1935 roku o kompletności mechaniki kwantowej, została potraktowana bardzo skrótowo. Dyskusje, jakie wywołała, gdy już zdano sobie sprawę z konsekwencji, jakie niesie myślowy eksperyment EPR, uwieńczone pracami Bella z roku 1964, doczekały się tak wielu opracowań, że ich powielanie wydało się autorowi niecelowe (por. [278, 4, 51]). Niemniej ich rola jest niepodważalna. Dały one motywację do dalszych badań korelacji nieklasycznych prowadzonych z różnym natężeniem do dnia dzisiejszego [163, 39]. Owocem tego nurtu jest między innymi wprowadzenie różnego rodzaju miar korelacji opartych na funkcjach entropowych albo na geometrycznej odległości od zbioru stanów o zadanych korelacjach. Zagadnienia te znalazły swoje miejsce w rozdziale 2.3 oraz 2.4.

W rozdziale 2.5 bardzo skrótowo, wręcz informacyjnie, potraktowano zagadnienia dynamiki korelacji w czasie. Problem ten, niesłychanie ważny z punktu widzenia zachowania skorelowania stanu w trakcie ewolucji tak, aby nie tracił on użytecznych własności, jest szeroko dyskutowany w ostatnim dziesięcioleciu. Wyniki pozwalają wskazać, w rozdziale 3.6 i rozdziale 4.5, na pewne typowe zachowania się miar korelacji, takich jak zgodność i kwantowy dyskord, oraz wskazać na różnice w ich zachowaniu się w czasie.

Najszerzej przedstawiono zagadnienia związane z kwantowym splątaniem [162, 133, 39, 163]. W rozdziale 3.2 znajduje się omówienie ogólnych metod wykrywania splątania wraz z licznymi przykładami ich zastosowania do wybranych rodzin stanów. W szczególności przedstawiono kryteria splątania wraz z porównaniem ich skuteczności w wykrywaniu splątania przykładowych rodzin stanów kwantowych. W dalszej części rozdziału dyskutowane są miary splątania: geometryczne — oparte o odległość pomiędzy stanami — i entropowe, zdefiniowane przez różne postacie funkcji entropii, ze szczególnym uwypukleniem entropii splątania i zgodności. Z racji trudności przy ścisłym obliczaniu miar splątania ważnym problemem są sposoby ich estymacji. Zagadnieniom tym poświęcono rozdział 3.5, w którym omówiono metody szacowania zgodności i przedstawiono ich zastosowania na konkretnych przykładach. W rozdziale 3.3.3 scharakteryzowano pewną ciekawą rodzinę stanów, nazwaną SPPT, której własności sytuują ją „blisko” stanów separowalnych. Część tej rodziny to stany separowalne; podano dla nich nawet separowalny rozkład, ale wśród pozostałych są splątane.

Ostatni rozdział 4 poświęcony jest kwantowemu dyskordowi — mierze kwantowych korelacji, która przyjmuje niezerowe wartości na o wiele szerszej klasie stanów niż tylko splątane [206]. Stany te zachowują przy tym użyteczność z punktu widzenia potrzeb informatyki kwantowej [47]. W rozdziale tym omówiono własności dyskordu i sposoby jego obliczenia dla układu dwóch kubitów, a także przedstawiono geometryczną miarę korelacji opartą o zbiór stanów o zerowym dyskordzie. Rozdział 4 uzupełnia omówienie typowego zachowania się dyskordu podczas ewolucji układu kwantowego.

Wiele problemów przy opracowywaniu najnowszych osiągnięć stwarza terminologia, tzn. tłumaczenie nowo wprowadzonych pojęć na język polski, w wielu przypadkach bowiem nie ma jeszcze ogólnie akceptowanych, polskich odpowiedników oryginalnych anglojęzycznych określeń. W poniższym opracowaniu autor starał się w jak największym stopniu używać polskich nazw, ryzykując, że tłumaczenie będzie nietrafne lub niezrozumiałe. Dlatego w takich przypadkach, przy pierwszym wystąpieniu danego terminu, pojawia się jego angielski odpowiednik. Tak powstały nazwy: *zgodność* (ang. concurrence), *jakość* (ang. fidelity), czy kryterium *reorganizacji* (ang. realignment). Z obco brzmiących słów pozostało w zasadzie tylko określenie *dyskord* (ang. discord) oznaczające *niedopasowanie* dwóch wielkości do siebie.

Na zakończenie tego wstępu autor pragnie podziękować wszystkim pracownikom i doktorantom Zakładu Fizyki Matematycznej UMK i wszystkim tym, którzy poprzez rozmowy, debaty i wspólną pracę przyczynili się do powstania tego opracowania. Dziękuję także recenzentom za wnikliwe uwagi i sugestie poprawiające jakość prezentowanego materiału, w szczególności w zakresie doboru literatury. Praca jest częściowo finansowana ze środków Narodowego Centrum Nauki, projekt DEC-2011/03/B/ST2/00136.

Rozdział 1

Elementy formalizmu matematycznego

1.1. Przestrzeń Hilberta układu złożonego

Do matematycznego opisu układów fizyka kwantowa używa zupełnej i ośrodkowej przestrzeni wektorowej nad ciałem liczb zespolonych \mathbb{C} wyposażonej w iloczyn skalarny. Taka struktura, nazywana przestrzenią Hilberta, umożliwia wprowadzenie zarówno pojęcia stanu układu (czystego i mieszanego), charakteryzującą podobieństwa stanów i ich ewolucji, jak i określenie wielkości mierzalnych (obserwabi) wraz z opisem samego pomiaru [124, 209, 35, 151].

Stany czyste układu kwantowego określone są przez klasy unormowanych do 1 wektorów przestrzeni Hilberta \mathcal{H} , oznaczanych w notacji Diraca jako $|\psi\rangle$ i utożsamionych ze względu na relację przesunięcia fazy: $|\psi\rangle \sim e^{i\varphi}|\psi\rangle$. Iloczyn skalarny oznaczamy będziemy przez $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Ilość liniowo niezależnych wektorów w przestrzeni \mathcal{H} określa wymiar przestrzeni Hilberta $d = \dim \mathcal{H}$. W tej pracy rozważać będziemy tylko przypadki skończenie wymiarowe, gdy $d < +\infty$. Wówczas przestrzeń \mathcal{H} można utożsamiać z przestrzenią \mathbb{C}^d (d -wymiarową przestrzenią liczb zespolonych) wyposażoną w półtoraliniowy iloczyn skalarny (liniowy w drugim argumencie i antyliniowy w pierwszym). Bazę w \mathcal{H} oznaczamy będziemy zwykle jako zbiór $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^d$, ze szczególnym oznaczeniem dla bazy zero-jedynkowej: $\{|i\rangle\}_{i=1}^d$. Wybór bazy pozwala reprezentować stan czysty przy pomocy jego współrzędnych w tej bazie, $|a\rangle = [a_1, \dots, a_d]$.

Obserwable, czyli mierzalne wielkości fizyczne, są reprezentowane przez liniowe, samosprężone, ograniczone operatory $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Zbiór tych operatorów oznacza się zwykle jako $B(\mathcal{H})$. W ustalonej bazie $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^d$, obserwabli A odpowiada zatem samosprężona macierz $[a_{ij}]$ wymiaru $d \times d$. Zbiór wszystkich macierzy wymiaru $d \times d$ o współczynnikach zespolonych oznaczamy będziemy przez M_d . Mamy zatem naturalne utożsamienie $B(\mathcal{H}) \simeq M_d$.

Szczególną rolę wśród obserwabli odgrywają 1-wymiarowe operatory rzutu spełniające warunek $\Pi^2 = \Pi$. Pozostają one w jedno-jednoznacznej odpowiedniości ze stanami czystymi, tj. dla każdego $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$,

$$\Pi_\psi |\phi\rangle := |\psi\rangle \langle \psi | \phi \rangle \iff |\psi\rangle \in \mathcal{H}.$$

Powyższa relacja uzasadniania notację Diraca dla operatorów rzutu postaci $\Pi_\psi = |\psi\rangle \langle \psi|$.

Stanom mieszanym układu kwantowego, które są wypukłymi kombinacjami stanów czystych reprezentowanych przez 1-wymiarowe projektory,

$$\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|, \quad p_k > 0, \quad \sum_k p_k = 1,$$

odpowiadają liniowe, dodatnio półokreślone operatory o śladzie równym 1. Nazywa się je operatorami (lub macierzami) gęstości. Ich zbiór oznaczają będziemy przez \mathcal{S} .

W bazie $\{|e_i\rangle\langle e_j|\}_{i,j=1}^d$ przestrzeni $B(\mathcal{H})$ stany mieszane są reprezentowane przez macierz $[\rho_{ij}]$ jako

$$\rho = \sum_{i,j=1}^d \rho_{ij} |e_i\rangle\langle e_j|.$$

Macierz współczynników $[\rho_{ij}]$ jest dodatnio półokreślona $[\rho_{ij}] \geq 0$, samosprzężona $\rho_{ij} = \rho_{ji}^*$ i ma jednostkowy ślad $\sum_{i=1}^d \rho_{ii} = 1$.

Na zbiorze operatorów (niekoniecznie samosprzężonych) wprowadza się często iloczyn skalarny $(A, B) = \text{tr}(A^\dagger B)$ oraz dwie normy:

- śladową: $|A|_1 = \text{tr} |A| = \text{tr} \sqrt{A^\dagger A}$,
- Hilberta-Schmidta: $|A|_2 = \sqrt{(A, A)} = \sqrt{\text{tr}(A^\dagger A)}$.

Oczywiście, w skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta powyższe wielkości są skończone. W szczególności dla stanów mieszanych mamy $|\rho|_1 = 1$ oraz $|\rho|_2^2 = \text{tr}(\rho^2)$ jest czystością stanu mieszanego. Dla stanów czystych $\rho^2 = \rho$, zatem $|\rho|_2 = 1$.

Specyfiką formalizmu matematycznego stosowanego do opisu układu złożonego składającego się z podukładów A i B (nazywanych w żargonie optyków kwantowych układami Alicji i Boba) jest wykorzystanie przy konstrukcji przestrzeni stanów całego układu odpowiednich przestrzeni stanów podukładów. W pracy tej zajmować się będziemy tylko przypadkiem, gdy podział na podukłady Boba i Alicji jest ustalony. Nie będziemy dyskutować zatem własności związanych na przykład z konsekwencjami różnych podziałów układu złożonego na podukłady. Ograniczymy się również do sytuacji, gdy układ złożony składa się z dwóch części, choć uogólnienie bardzo wielu z omawianych w dalszym ciągu konstrukcji jest możliwe, lub wręcz naturalne, także w przypadku wieloskładnikowym.

W rezultacie postuluje się, że przestrzeń Hilberta układu złożonego z dwóch podukładów ma postać

$$\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

Zatem jest ona iloczynem tensorowym \otimes przestrzeni podukładów, odpowiednio \mathcal{H}_A i \mathcal{H}_B . Zbiór \mathcal{H}_{AB} , oprócz własności przestrzeni Hilberta przypomnianych powyżej, ma dodatkowe cechy wynikające ze sposobu jego konstrukcji. Jeśli przez d_A oraz d_B oznaczymy wymiary przestrzeni Hilberta podukładów, odpowiednio \mathcal{H}_A oraz \mathcal{H}_B , to $\dim \mathcal{H}_{AB} = d_A d_B = D$. W skrócie układy złożone opisywane formalizmem przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ nazywać będziemy układami $d_A \otimes d_B$.

Szczególną rodzinę stanów czystych stanowią stany produktowe mające postać $|\psi_{AB}\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$, które określa się także jako separowalne stany czyste