Krystyna Mruczek-Nasieniewska

Równościowe i zdaniowe logiki P-zgodne

WYDAWNICTWO NAUKOWE
UNIWERSYTETU MIKOŁAJA KOPERNIKA

Krystyna Mruczek-Nasieniewska

Równościowe i zdaniowe logiki P-zgodne

WYDAWNICTWO NAUKOWE
UNIWERSYTETU MIKOŁAJA KOPERNIKA

Toruń 2013

Recenzenci

Janusz Czelakowski
Andrzej Pietruszczak

Projekt okładki

Anna Pietruszczak

Printed in Poland

ISBN 978-83-231-3082-6

Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika

Redakcja: ul. Gagarina 5, 87-100 Toruń
tel. 56 611 42 95, fax 56 611 47 05
e-mail: wydawnictwo@umk.pl
http://www.wydawnictwoumk.pl

Dystrybucja: ul. Reja 25, 87-100 Toruń
tel./fax 56 611 42 38
e-mail: books@umk.pl

Druk: WN UMK
ul. Gagarina 5, 87-100 Toruń, tel. 56 611 22 15

Spis treści

Słowo wstępne

Analizując wyrażenia języka naturalnego lub formuły języka sztucznego zwykle posługujemy się *stricte* wypowiedzianymi regułami syntaktycznymi budowy wyrażeń tego języka bądź pewnymi quasi-regułami dotyczącymi pewnych umów. Najczęściej analizujemy najbardziej zewnętrzne funktory występujące w analizowanych wyrażeniach. Postępując analogicznie rozpatrujemy coraz bardziej wewnętrzne operatory. W szczególności czynności te przeprowadzamy gdy analizujemy formuły równoważnościowe, które wyrażają związki między funktorami.

Celem pracy jest omówienie pewnych klas logik równościowych wyrażonych zarówno w języku teorii modeli jak i ujętych aksjomatycznie.

W niniejszej pracy wskażemy pewne ogólne związki zachodzące między wybranym klasami logik a odpowiadającymi im podlogikami generowanymi przez tzw. równości, czy szerzej formuły P-zgodne. Wybierając ze zbioru formuł tylko te formuły, które mają pewną określoną strukturę (i domykając ten zbiór ze względu na określony operator konsekwencji) otrzymujemy podsystem logiki wyjściowej. Klasa modeli otrzymanej logiki jest większa w sensie inkluzji od klasy modeli odpowiadającej wyjściowej logice. Takie podejście daje pewien szerszy wgląd w istotę logik. Prowadząc takie badania możemy ‘patrzeć’ na dany system z pewnej ‘odległości’. Mając taką perspektywę możemy rozważać istotne aspekty każdego systemu i pytać o skończoną bazowalność, algebry wolno-generowane, modele podprosto-nierozkładalne (i inne) oraz badać, na ile są one powiązane (odpowiednio) z bazą rówościową, algebrami wolno-generowanymi, modelami podprosto-nierozkładalnymi wyjściowego systemu. W niniejszej pracy będziemy ‘patrzeć’ z szerszej perspektywy na klasę modeli związaną z logiką klasyczną, logiką wielkowartościową i kwantową.

Przypadek logik równościowo definiowalnych jest w literaturze szeroko znany. Omówimy wyniki dotyczące tego przypadku by nie uchybić kompletności rozważań. Natomiast przypadek logik zdaniowych w kontekście procedury P-zgodności jest — jak mniemamy — zagadnieniem nowym.

Rozważmy więc logikę zdaniową $\mathbf{L}$ — czyli zbiór domknięty na podstawianie i regułę odrywania, w której języku występuje implikacja. Ponadto, niech dany będzie podział zbioru funktorów rozpatrywanego języka. Elementy podziału zwać będziemy partycjami.

DEFINICJA 0.0.1. Niech dana będzie logika zdaniowa **L** oraz partycja P zbioru stałych $Const$. Mówimy, że formuła A jest tezą P-zgodną logiki **L** wtw

1. A jest tezą logiki **L** oraz
2. A jest albo formułą o postaci $\sim B$, dla pewnego B, albo A jest albo formułą o postaci $B \S C$, gdzie $B, C \in$ For przy czym istnieje $\pi \in P$, takie że zarówno funktor główny formuły B jak i funktor główny formuły C należą do π.

Łatwo widać, że:

TWIERDZENIE 0.0.1. *Jeśli dana będzie dowolna logika zdaniowa* **L** *w języku ze stałymi logicznymi* $Const = \{\sim, \wedge, \vee, \rightarrow\}$*, taka że*

1. *tezą* **L** *jest prawo tożsamości,*
2. **L** *jest domknięta na regułę przechodniości implikacji.*

FAKT 0.0.1. *Jeśli dana jest dowolna logika zdaniowa* **L** *w języku ze stałymi logicznymi* $Const$ *oraz podział* $P = \{Const\}$*, to zbiór wszystkich tez* P*-zgodnych logiki* **L** *stanowi maksymalny pod względem inkluzji podzbiór zbioru* **L** *zawierający* P*-zgodne tezy logiki* **L**.

Rozdział 1

Podstawowe pojęcia

Pojęcie rozmaitości algebr wprowadził Garret Birkhoff w latach trzydziestych ubiegłego wieku. Od tamtego czasu powstało wiele prac związanych z tą tematyką. Badaniami dotyczącymi rozmaitości algebr zajmowali się między innymi: A. Tarski, B. Jónsson, R. Dedekind, J. von Neuman, G. Gräter, R. McKenzie. Jednym z kluczowych wyników uzyskanych w zakresie tej problematyki jest twierdzenie (zwane twierdzeniem Tarskiego-Birkhoffa), które mówi, że klasa algebr ustalonego typu jest rozmaitością wtedy i tylko wtedy, gdy jest klasą równościowo definiowalną. Z jednej strony mamy więc klasę domkniętą na obrazy homomorficzne, podalgebry i produkty algebr, z drugiej strony klasę, którą można scharakteryzować za pomocą pewnego układu równości. Jednym z najbardziej znanych przykładów rozmaitości jest klasa wszystkich algebr Boole'a. Czasami wygodnie jest patrzeć na klasę algebr Boole'a jak na klasę, którą wyznacza pewien znany zbiór równości. W pewnych zaś sytuacjach jak na klasę, która ma tę cechę, że obraz homomorficzny, podalgebra i produkt dowolnej rodziny algebr Boole'a jest algebrą Boole'a. Tej własności nie ma np. klasa ciał. I czy powiemy, że klasa ciał nie jest równościowo definiowalna, czy zauważymy, że produkt dwóch ciał nie zawsze jest ciałem, to tak naprawdę stwierdzimy, że klasa ciał nie jest rozmaitością. Twierdzenie Tarskiego-Birkhoffa w naturalny więc sposób łączy algebrę z logiką matematyczną. To z kolei przyczyniło się do szybkiego rozwoju badań nad klasami algebr. Mając pojęcie rozmaitości algebr nasuwa się pytanie o podklasy wyjściowej klasy, które są domknięte na te same operatory co wyjściowa klasa algebr. W ten sposób — bardzo naturalny w algebrze — pojawia się pojęcie podrozmaitości danej rozmaitości. Wiadomo też, że wszystkie podrozmaitości danej rozmaitości z relacją inkluzji tworzą kratę. Krata ta jest dualnie izomorficzna z kratą teorii równościowych, które rozszerzają teorię definiującą wyjściową rozmaitość. Zatem to, co da się udowodnić w odniesieniu do kraty teorii równościowych, można wyrazić w języku rozmaitości. Trudność polega jednak na tym, że niewiele można powiedzieć na ten temat w ogólnym przypadku ([54, 58, 67, 80]). Kraty rozmaitości bądź teorii równościowych dla klasycznych klas algebr były i są nadal szeroko badane ([59, 68, 77, 91, 92]).

Wiadomo, że krata podrozmaitości takich rozmaitości jako jedną z klas zawiera wyjściową rozmaitość. Jeśli przykładowo ze zbioru równości definiujących daną rozmaitość wybierzemy tylko tzw. formuły P-zgodne (definicję tego pojęcia podajemy na s. 19), to otrzymamy mniejszą w sensie inkluzji teorię równościową i tym samym większą klasę modeli. Dla tej większej klasy modeli znalezienie kraty jej podrozmaitości (w przypadku ogólnym) wydaje się bardzo trudne. Potwierdzeniem prawdziwości powyższego zdania mogą być liczne przykłady nieregularnych i często zaskakujących krat rozmaitości wyznaczonych przez tzw. równości P-zgodne czy inne typy równości o szczególnej strukturze.

Ujmijmy to w sposób bardziej formalny. Niech Σ będzie zbiorem równości typu τ[1] i niech $\mathbf{Mod}(\Sigma)$ będzie klasą wszystkich algebr spełniających Σ. Klasę algebr K nazwiemy równościowo definiowalną, jeśli istnieje zbiór równości Σ typu τ, taki że $K = \mathbf{Mod}(\Sigma)$.

Zacytujmy teraz znane twierdzenie:

TWIERDZENIE 1.0.2 (G. Birkhoff [7], A. Tarski [116]). *Klasa algebr jest klasą równościowo definiowalną wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozmaitością.*

Jeśli Σ jest zbiorem równości ustalonego typu, to $\mathsf{Cn}(\Sigma)$ oznacza domknięcie zbioru Σ na reguły Birkhoffa.

Zauważmy, że dla każdego zbioru Σ równości typu τ spełniony jest warunek:

$$\mathsf{Cn}(\Sigma) = \mathsf{Cn}(\mathsf{Cn}(\Sigma)). \tag{1.0.1}$$

Zbiór Σ równości typu τ nazywamy teorią równościową, gdy

$$\mathsf{Cn}(\Sigma) = \Sigma.$$

Ponadto, jeśli dane są dwie teorie równościowe Σ_1 i Σ_2, to $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ jest największą teorią równościową zawartą w Σ_1 i Σ_2, natomiast $\mathsf{Cn}(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ jest najmniejszą teorią równościową zawierającą Σ_1 oraz Σ_2. Oznaczmy zbiór wszystkich równości typu τ przez $Id(\tau)$. Znanym faktem jest, że

[1] Podstawowe pojęcia podano w Dodatku na s. 116

rodzina $\{\Sigma \subseteq Id(\tau) : \Sigma = \mathsf{Cn}(\Sigma)\}$, uporządkowana relacją inkluzji, tworzy kratę. Każdej teorii równościowej Σ odpowiada rozmaitość $\mathbf{Mod}(\Sigma)$ i odpowiedniość ta jest wzajemnie jednoznaczna. A zatem zbiór wszystkich rozmaitości typu τ, uporządkowany relacją inkluzji, tworzy kratę, która jest dualnie izomorficzna z kratą teorii równościowych typu τ, przy czym

$$\boldsymbol{Mod}(\Sigma_1) \vee \boldsymbol{Mod}(\Sigma_2) = \boldsymbol{Mod}(\Sigma_1 \cap \Sigma_2), \tag{1.0.2}$$

$$\boldsymbol{Mod}(\Sigma_1) \cap \boldsymbol{Mod}(\Sigma_2) = \boldsymbol{Mod}(\mathsf{Cn}(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)). \tag{1.0.3}$$

Jeśli K jest klasą algebr, to $Id(K)$ oznacza zbiór wszystkich równości spełnionych w klasie K. Przywołajmy łatwy w dowodzie, należący do folkloru fakt:

Fakt 1.0.2. 1. *Jeśli dane sa klasy algebr K_1 i K_2 oraz każda algebra z klasy K_1, jest również algebrą klasy K_2, to $Id(K_2) \subseteq Id(K_2)$.*
2. *Jeśli $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, to $\boldsymbol{Mod}(\Sigma_2) \subseteq \boldsymbol{Mod}(\Sigma_1)$.*

1.1. Struktury krat teorii równościowych

Odwołamy się do wyniku pochodzącego z [67].

Rozważmy klasę $\mathbf{Mod}(\Sigma)$ wszystkich algebr spełniających wszystkie równości ze zbioru Σ. Niech dana będzie rozmaitość V oraz niech $\mathcal{L}(V)$ będzie kratą wszystkich podrozmaitości rozmaitości V. Niech $\mathcal{L}(\Sigma)$ oznacza kratę wszystkich rozszerzeń teorii Σ. Dla każdej kraty $\mathcal{L}$ rozmaitości, niech $\mathcal{L}^\delta$ będzie kratą teorii, dualną do kraty $\mathcal{L}$. Jak już wspomnieliśmy:

Fakt 1.1.1. 1. *Kraty $\mathcal{L}(\boldsymbol{Mod}(\Sigma))$ i $\mathcal{L}(\Sigma)^\delta$ są izomorficzne.*
2. *Kraty $\mathcal{L}(Id(V))^\delta$ i $\mathcal{L}(V)$ są izomorficzne.*

Doniosłą rolę w wyznaczaniu związków między algebrą a logiką odegrał Malcev [73]. Postawił on między innymi problem charakteryzacji kraty $L(V)$.

Mamy znany:

Fakt 1.1.2. *Każda skończona krata dystrybutywna jest izomorficzna z kratą $\mathcal{L}(\Sigma)$, dla pewnej teorii Σ.*

Jeśli dana jest krata L, to $L+1$ oznacza kratę z dodanym elementem największym 1.

Fakt 1.1.3 ([97]). *Dla każdej kraty algebraicznej L, krata $L+1$ jest izomorficzna z kratą teorii równościowych rozszerzających pewną teorię Σ.*

Przypomnijmy standardowe pojęcia użyte w kolejnym lemacie.

Definicja 1.1.1. Niech dana będzie algebra $\mathfrak{A} = \langle A, \{f_i\}_{i\in I}\rangle$, dwuargumentowa operacja termowa f oraz $a, b \in A$.

1. Mówimy, że a jest lewym zerem względem operacji termowej f wtw dla dowolnego $x \in A$, zachodzi: $f(a,x) = a$.
2. Mówimy, że b jest lewą jedynką względem operacji termowej f wtw dla dowolnego $y \in A$, zachodzi: $f(b,y) = y$.
3. Mówimy, że operacja f ma lewą jedynkę w algebrze $\mathfrak{A}$ wtw istnieje lewa jedynka względem operacji f.

Lemat 1.1.1 (McKenzie, [78, 67]). *Jeśli Σ jest teorią równościową, to $\mathcal{L}(\Sigma)$ jest izomorficzna z kratą kongruencji $Con\,\mathfrak{A}$ pewnej algebry $\mathfrak{A}$ mającej binarną termową operację b, przy czym $\mathfrak{A}$ ma lewe zero i lewą jedynkę.*

Niech M_k będzie kratą o k atomach, mającą 0 i 1. Zatem M_3 jest kratą przedstawioną na Diagramie 1.[2]

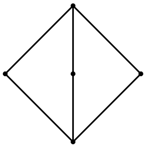

Diagram 1. Krata M_3

Znane jest twierdzenie Dedekinda stanowiące, że krata L nie jest modularna wtedy i tylko wtedy, gdy krata N_5 (przedstawiona na diagramie 2) może być zanurzona izomorficznie w kratę L. Z kolei G. Birhoff pokazał, że krata L nie jest dystrybutywna wtedy i tylko wtedy, gdy krata M_5 lub krata N_5 mogą być zanurzone w kratę L. Interesujące wydaje się pytanie, czy jest jakiś związek krat M_5 oraz N_5, czyli krat, które są istotne dla problemów — nazwijmy to — dystrybutywności i modularności z kratami teorii równościowych. Okazuje się, że prawdziwe są dwa poniższe twierdzenia:

[2] Zwykle oznaczaną przez 'M_5'.