Robert Skiba • Patryk Miziuła

ZBIÓR ZADAŃ
Z ANALIZY I ALGEBRY

WYDAWNICTWO NAUKOWE
UNIWERSYTETU MIKOŁAJA KOPERNIKA

Robert Skiba • Patryk Miziuła

ZBIÓR ZADAŃ
Z ANALIZY I ALGEBRY

Toruń 2013

WYDAWNICTWO NAUKOWE
UNIWERSYTETU MIKOŁAJA KOPERNIKA

Recenzenci
prof. dr hab. Grzegorz Graff
prof. dr hab. Artur Michalak

Redaktor
Elżbieta Kossarzecka

Projekt okładki
Jacek Owczarz, Studio Red Krasnal

ISBN 978–83–231–3165–6

Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika
Redakcja: ul. Gagarina 5, 87-100 Toruń
tel. 56 611 42 95, fax 056 611 47 05
e-mail: wydawnictwo@umk.pl
www.wydawnictwoumk.pl
Dystrybucja: ul. Reja 25, 87-100 Toruń
tel. 56 611 42 38, e-mail: books@umk.pl
Druk: Wydawnictwo Naukowe UMK
ul. Gagarina 5, 87-100 Toruń

Spis treści

Wstęp **7**

1. Analiza matematyczna – zadania **9**
1.1. Ciągi i szeregi liczbowe oraz funkcyjne . . . 9
1.2. Ciągi rekurencyjne . . . 11
1.3. Szeregi . . . 14
1.4. Rachunek różniczkowy . . . 16
1.5. Rachunek całkowy . . . 19
1.6. Funkcje analityczne . . . 23
1.7. Własności algebraiczne i topologiczne funkcji . . . 24
1.8. Funkcje wielu zmiennych . . . 26
1.9. Inne zadania z analizy . . . 27

2. Algebra – zadania **31**
2.1. Macierze . . . 31
2.1.1. Wyznaczniki i rzędy . . . 31
2.1.2. Własności macierzy . . . 34
2.1.3. Równania macierzowe . . . 36
2.1.4. Inne zadania o macierzach . . . 37
2.2. Przestrzenie liniowe . . . 40
2.3. Wielomiany . . . 42
2.4. Grupy . . . 43
2.5. Inne zadania z algebry . . . 44

Analiza matematyczna – rozwiązania **47**
1.1. Ciągi i szeregi liczbowe oraz funkcyjne . . . 47
1.2. Ciągi rekurencyjne . . . 58
1.3. Szeregi . . . 68
1.4. Rachunek różniczkowy . . . 76
1.5. Rachunek całkowy . . . 89
1.6. Funkcje analityczne . . . 110
1.7. Własności algebraiczne i topologiczne funkcji . . . 113
1.8. Funkcje wielu zmiennych . . . 121
1.9. Inne zadania z analizy . . . 125

Algebra – rozwiązania **135**
2.1. Macierze 135
2.1.1. Wyznaczniki i rzędy 135
2.1.2. Własności macierzy 146
2.1.3. Równania macierzowe 156
2.1.4. Inne zadania o macierzach 162
2.2. Przestrzenie liniowe 169
2.3. Wielomiany 176
2.4. Grupy 181
2.5. Inne zadania z algebry 187

3. Kompendium **191**
3.1. Analiza 191
3.2. Algebra liniowa 194

Oznaczenia **197**

Bibliografia **199**

Wstęp

Skrypt, który oddajemy do rąk Czytelników, zawiera około 260 zadań opatrzonych w bardzo szczegółowe rozwiązania. Obejmuje materiał poświęcony zarówno analizie matematycznej, jak i algebrze liniowej, który obowiązuje na uniwersytetach i politechnikach. Niniejszy skrypt skierowany jest do osób szczególnie dociekliwych i bardzo zainteresowanych matematyką.

Zbiór zadań składa się z czterech głównych rozdziałów podzielonych na podrozdziały. Rozdział pierwszy poświęcony jest analizie matematycznej i obejmuje następujące zagadnienia: ciągi i szeregi liczbowe, rachunek różniczkowy i całkowy funkcji jednej i wielu zmiennych oraz funkcje analityczne. Natomiast rozdział drugi porusza takie zagadnienia, jak: macierze i wyznaczniki, przestrzenie i przekształcenia liniowe, wielomiany oraz grupy. Z kolei rozdział trzeci oraz czwarty zawierają szczegółowe rozwiązania do zadań z rozdziału pierwszego i drugiego. Ponadto w piątym rozdziale podaliśmy niezbędne definicje i fakty potrzebne do rozwiązania zadań lub zrozumienia ich rozwiązań zawartych w zbiorze. Jednakże główną uwagę skupiliśmy na podaniu mało znanych pojęć i faktów z algebry liniowej, które będą bardzo użyteczne i niezbędne do rozwiązania zadań z tego zbioru.

Zadania zawarte w naszym skrypcie pochodzą z różnych zbiorów zadań i czasopism matematycznych. Wykorzystywaliśmy też listy zadań z międzynarodowych olimpiad matematycznych dla studentów: IMC, VJIMC, WLPMC ([28, 26, 27]). Źródła zostały wymienione szczegółowo na końcu książki. Można tam również znaleźć listę zbiorów zadań, które gorąco polecamy Czytelnikom do dalszej lektury. Wszystkie symbole i definicje występujące w tym zbiorze są standardowe i powszechnie stosowane, ale na wszelki wypadek niektóre z nich zostały zebrane i wyjaśnione w dziale *Oznaczenia*.

Jako autorzy chcielibyśmy podkreślić, że rozwiązania zadań umieszczone w tym zbiorze nie zawsze będą najkrótsze i najelegantsze. Pisząc ten zbiór zadań, a w szczególności rozwiązania, kierowaliśmy się tym, aby zaproponowane rozwiązanie zadania pomogło Czytelnikowi lepiej zrozumieć omawianą tematykę i zauważyć związki pomiędzy różnymi pojęciami, czasami bardzo odległymi. Co więcej, chcemy zwrócić uwagę Czytelnikowi, że autorzy celowo nie umieszczali zadań mających charakter obliczeniowy, a raczej skupili się na zebraniu zadań, których sformułowania są oryginalne i zmuszają do głębszego zrozumienia teorii. Mamy nadzieję, że zadania z tego zbioru przyczynią się do szybszego i głębszego zrozumienia zagadnień poruszanych na wykładach z analizy matematycznej i algebry liniowej.

Zdajemy sobie sprawę z tego, że skrypt nie jest pozbawiony usterek. Dlatego też uprzejmie prosimy Czytelników o przesyłanie uwag o zadaniach zawartych w tym zbiorze oraz informacji o zauważonych błędach na adres: robo@mat.umk.pl lub bua@mat.umk.pl. Dzięki Wam uda nam się go udoskonalić.

Autorzy dziękują studentom Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, którzy byli bardzo krytycznymi recenzentami zadań zamieszczonych w tej książce i znaleźli też sporo błędów. Co więcej, sporo rozwiązań zawartych w tym zbiorze pochodzi właśnie od Nich! Szczególne podziękowania składamy następującym studentom: Bartoszowi Bieganowskiemu, Aureli Bartnickiej, Danielowi Strzeleckiemu, Jakubowi Siemianowskiemu, Sebastianowi Ruszkowskiemu, Mariuszowi Kanieckiemu oraz Januszowi Schmude.

Dziękujemy również swoim Rodzinom: Robert Skiba – żonie Ani i dwóm małym synkom: Jakubowi i Rafałowi, Patryk Miziuła – mamie Bożenie i narzeczonej Judycie. To dzięki ich życzliwemu wsparciu i zrozumieniu udało się doprowadzić do końca projekt napisania tej książki.

Toruń, grudzień 2013

Autorzy

1. Analiza matematyczna – zadania

1.1. Ciągi i szeregi liczbowe oraz funkcyjne

Zadanie 1.1. Niech $x_1, \ldots, x_n \geqslant -1$ i $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = 0$. Udowodnić, że

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \frac{n}{3}.$$

Zadanie 1.2. Niech $f\colon [0,1] \to [0,1]$ będzie funkcją ciągłą oraz niech

$$x_0 \in [0,1], \qquad x_{n+1} = f(x_n) \ \text{ dla } \ n \geqslant 0.$$

Udowodnić, że ciąg (x_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Zadanie 1.3. Niech (x_i) będzie ciągiem malejącym o wyrazach dodatnich.

(a) Udowodnić, że

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}}.$$

(b) Pokazać, że istnieje taka stała $C \in \mathbb{R}$, że

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{\sum_{i=m}^{\infty} x_i^2} \leqslant C \sum_{i=1}^{\infty} x_i.$$

Zadanie 1.4. Dany jest ciąg (x_n). Ciąg (y_n) jest zdefiniowany następująco:

$$y_n = x_{n-1} + 2x_n.$$

Udowodnić, że ciąg (y_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest ciąg (x_n).

Zadanie 1.5. Wyznaczyć sumę

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{2x_i^2+1}{(x_i^2-1)^2},$$

gdzie x_i, $i = 1, \ldots, 4$ są pierwiastkami równania $x^4 - x + 1 = 0$.

Zadanie 1.6. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(k+\frac{1}{n})}{n!} \right)^n .$$

Zadanie 1.7. Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze $[0, \infty)$ zdefiniowanym następująco:

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \qquad f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1.$$

(a) Znaleźć punktową granicę $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ dla $x \in [0, \infty)$.

(b) Pokazać, że $f_n \rightrightarrows f$ na zbiorze $[K, \infty)$ dla dowolnego $K > 0$, ale nie na zbiorze $[0, \infty)$.

Zadanie 1.8. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}.$$

Zadanie 1.9. Niech $x \geqslant 1$. Pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty} (2\sqrt[n]{x} - 1)^n = x^2.$$

Zadanie 1.10. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2\sqrt[n]{n} - 1)^n}{n^2} = 1.$$

Zadanie 1.11. Niech (x_n) będzie rosnącym, nieograniczonym ciągiem liczb rzeczywistych o tej własności, że

$$\tfrac{1}{4}(x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3}) \in \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}\}$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że ciąg (x_{n+1}/x_n) jest zbieżny i znaleźć jego granicę.

Zadanie 1.12. Znaleźć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)^n .$$

Zadanie 1.13. Znaleźć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)^2}}{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{1}{(2k)^2}}.$$

Zadanie 1.14. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Obliczyć

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+4}{(k+1)(k+2)(k+3)} \binom{n}{k}.$$

Zadanie 1.15. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Udowodnić, że

$$2^{n-1} \,\Big|\, \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 5^k.$$

Zadanie 1.16. Niech $x \in \mathbb{R}$ będzie liczbą niewymierną. Udowodnić, że zbiór

$$\mathcal{S}_x = \{k + lx \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$$

jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

Zadanie 1.17. Udowodnić, że dla każdej liczby niewymiernej $x \in (0, 2)$ liczba $\frac{\sqrt{3}}{2}$ jest punktem skupienia ciągu $\big(\sin(n\pi x)\big)$.

1.2. Ciągi rekurencyjne

Zadanie 1.18. Ciąg (x_n) jest zdefiniowany rekurencyjnie:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \qquad x_{n+3} = 3x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n \ \text{ dla } \ n \geqslant 0.$$

Znaleźć wzór na n-ty wyraz ciągu (x_n).

Zadanie 1.19. Ciąg (x_n) jest określony rekurencyjnie:

$$x_0 = x_1 = x_2 = 1, \qquad \det \begin{pmatrix} x_n & x_{n+1} \\ x_{n+2} & x_{n+3} \end{pmatrix} = n! \ \text{ dla } \ n \geqslant 0.$$

Udowodnić, że wszystkie elementy ciągu (x_n) są liczbami naturalnymi.

Zadanie 1.20. Ciąg (x_n) jest zadany rekurencyjnie:

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = 3x_n + \lfloor x_n \sqrt{5} \rfloor \ \text{ dla } \ n \geqslant 0.$$

Obliczyć x_{2007}.

Zadanie 1.21. Niech ciąg (x_n) będzie zadany rekurencyjnie:

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{\sqrt{3}x_n + 1}{\sqrt{3} - x_n} \ \text{ dla } \ n \geqslant 1.$$

Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{2013} x_n.$$

Zadanie 1.22. Udowodnić, że ciąg (x_n) zadany rekurencyjnie w następujący sposób:

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{2}{x_n}\Big) \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1$$

jest zbieżny.

Zadanie 1.23. Zbadać zbieżność ciągu (x_n) określonego w następujący sposób:

$$x_0 = 3, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2 - x_n + 4} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 0.$$

Zadanie 1.24. Udowodnić, że ciąg (x_n) zadany rekurencyjnie w następujący sposób:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \qquad x_{n+2} = 2^{-x_n} + \frac{1}{2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1$$

jest zbieżny i znaleźć jego granicę.

Zadanie 1.25. Udowodnić, że ciąg (x_n) zadany rekurencyjnie w następujący sposób:

$$x_0 = a \geqslant 0, \qquad x_n = \sqrt{2\big(x_{n-1} - \ln(1 + x_{n-1})\big)} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1$$

jest zbieżny.

Zadanie 1.26. Niech $a_1 = 1$ oraz $a_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$ dla $n \geqslant 2$. Udowodnić, że

(a) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geqslant \frac{2}{3}$,

(b) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \frac{7}{10}$.

Zadanie 1.27.

(a) Niech (a_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych spełniającym warunki:

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} > \frac{3}{2}a_n \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1.$$

Udowodnić, że ciąg

$$\frac{a_n}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$$

ma skończoną granicę lub jest rozbieżny do $+\infty$.

(b) Pokazać, że dla dowolnego $\alpha > 1$ istnieje taki ciąg (a_n), że

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} > \frac{3}{2}a_n \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}} = \alpha.$$