Tomasz Jarmużek

Formalizacja metod tablicowych dla logik zdań i logik nazw

WYDAWNICTWO NAUKOWE
UNIWERSYTETU MIKOŁAJA KOPERNIKA

Tomasz Jarmużek

Formalizacja metod tablicowych dla logik zdań i logik nazw

WYDAWNICTWO NAUKOWE
UNIWERSYTETU MIKOŁAJA KOPERNIKA

Toruń 2013

Recenzenci
prof. dr hab. Andrzej Pietruszczak
prof. dr hab. Marcin Tkaczyk

Projekt okładki
Anna Pietruszczak

Printed in Poland

© Copyright by Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika
Toruń 2013

ISBN 978-83-231-3023-9

Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika

Redakcja: ul. Gagarina 5, 87-100 Toruń
tel. 56 611 42 95, fax 56 611 47 05
e-mail: wydawnictwo@umk.pl
http://www.wydawnictwoumk.pl

Dystrybucja: ul. Reja 25, 87-100 Toruń
tel./fax 56 611 42 38
e-mail: books@umk.pl

Druk: WN UMK
ul. Gagarina 5, 87-100 Toruń, tel. 56 611 22 15

Spis treści

Słowo wstępne

Celem książki — zgodnie z jej tytułem — jest formalizacja metod tablicowych dla logik zdań oraz logik nazw. Przez metody tablicowe rozumiemy sposoby definiowania systemów tablicowych oraz pojęć, dzięki którym możemy w tych systemach ustalać zachodzenie relacji wynikania logicznego.

W książce zajmujemy się więc problemem formalnego zdefiniowania pojęć charakterystycznych dla takich systemów logicznych, w których zachodzenie relacji wynikania logicznego bada się za pomocą konstruowania tzw. tablicy lub drzewa dowodowego.

Nasze rozważania dotyczą wyłącznie tych systemów, które:

- po pierwsze zostały zbudowane dla logik określonych semantyką dwuwartościową — interpretacja formuł przypisuje każdej formule wartość prawdy albo wartość fałszu
- po drugie są systemami logik zdań lub logik nazw.

Obydwa warunki, jak zobaczymy dalej, mają istotny wpływ na charakter definiowanych, ogólnych pojęć dla metod tablicowych. Piszemy o ustalaniu zachodzenia relacji wynikania logicznego w systemie tablicowym, ponieważ w prezentowanym podejściu punktem wyjścia konstrukcji systemu tablicowego jest logika zdefiniowana semantycznie, dla której system tablicowy budujemy. Chcemy konstruować system tablicowy w taki sposób, aby relacja dowiedlności wyznaczona przez ten system pokrywała się z relacją wynikania logiki, dla której system określiliśmy. Inaczej rzecz biorąc, chcemy, aby zdefiniowany system tablicowy był pełny i adekwatny względem wyjściowej semantyki.

W wielu przypadkach możliwe jest oczywiście podejście odwrotne — można najpierw określić system tablicowy, a następnie ustalić odpowiednią dla niego semantykę. Przedstawione w książce metody również na to pozwalają.

Opisana w pracy formalizacja metod tablicowych oparta jest na gruncie teoriomnogościowym — wszystkie ważne pojęcia dla teorii metod tablicowych zdefiniowane są więc jako zbiory. W książce przeanalizowano m.in. pojęcia reguły tablicowej, gałęzi oraz tablicy, proponując ich ogólne i czysto formalne ujęcie. I tak np. pojęcie reguły tablicowej sprowadzamy do uporządkowanej n-ki zbiorów wyrażeń, w której pierwszy element jest zbiorem przesłanek, a elementy następne stanowią nadzbiory zbioru przesłanek — sposoby wyciągnięcia z niego wniosków. Z kolei gałęzie są zdefiniowane jako ciągi zbiorów, w których kolejne elementy stanowią rezultat zastosowania reguły tablicowej. Wreszcie tablice są zbiorami gałęzi, które spełniają pewne dodatkowe warunki.

Przedstawione ogólne i formalne pojęcia nie kolidują jednak z intuicyjnymi, standardowymi i stosowanymi w dydaktyce pojęciami tablicowymi. Jak pokażemy na końcu książki, te ostatnie można uznać za zastosowanie pojęć formalnych. Zaletą ujęcia formalnego jest natomiast możliwość generalizacji warunków, których spełnienie przez system tablicowy wystarcza do jego pełności i adekwatności względem przyjętej semantyki.

W pierwszym rozdziale Czytelnik będzie miał możliwość zapoznania się z przyjętą strategią formalizacji pojęć tablicowych oraz z intuicyjnym ujęciem podejścia, które jest rozwijane w książce.

W dalszych trzech rozdziałach szczegółowo omówione zostają trzy różne przypadki — różne pod względem zarówno składni języka, w którym przeprowadzamy dowód tablicowy, jak i semantyki. Zawarta w tych rozdziałach konstrukcja formalnych systemów tablicowych dla Klasycznej Logiki Zdań, Logiki Nazw oraz modalnej logiki **S5** stanowi punkt wyjścia do uogólnienia metod tablicowych, które zostaje dokonane w kolejnym rozdziale.

W rozdziale piątym opisujemy ogólną teorię konstrukcji systemów tablicowych i pojęć tablicowych. Efektem rozważań z tego rozdziału jest twierdzenie formułujące warunki wystarczające do tego, aby system tablicowy skonstruowany podaną metodą był pełny i adekwatny względem wyjściowej semantyki.

Ostatni rozdział opisuje zastosowania teorii przedstawionej w rozdziale piątym. Znajdziemy tam zastosowanie teorii do konstrukcji Modalnej Logiki Nazw w interpretacji *de re* oraz zastosowanie do teorii konstrukcji systemów tablicowych dla logik modalnych wyznaczonych przez semantykę możliwych światów. Kolejnym zagadnieniem, które poruszamy w tym rozdziale, jest pojęcie samego systemu tablicowego oraz pojęć, które należy podczas jego konstrukcji określić, a także wynikające z tego możliwości badania relacji pomiędzy systemami tablicowymi. W rozdziale tym prezentujemy również opis przejścia od abstrakcyjnie rozumianych w pracy pojęć tablicy i gałęzi do standardowych, nieformalnych pojęć gałęzi oraz tablicy. Przejście to również można uznać za zastosowanie ogólnych pojęć tablicowych.

Autor pracy chciałby najuprzejmiej podziękować recenzentom wydawniczym tej książki: prof. Andrzejowi Pietruszczakowi (UMK) oraz ks. prof. Marcinowi Tkaczykowi (KUL) za wnikliwe i cenne uwagi.

Rozdział 1

Wprowadzenie

1.1. Metody tablicowe

W niniejszej książce zajmujemy się metodami tablicowymi. Metody te służą do definiowania systemów logicznych, w których poprzez dowody — zwane dowodami tablicowymi — można wykazywać zachodzenie związków logicznych pomiędzy zbiorami przesłanek oraz wnioskami, a w szczególności zachodzenie związku wynikania logicznego.

Metody tablicowe pod wieloma względami stanowią interesującą alternatywę w stosunku do innych metod konstruowania systemów logiki. Są one interesujące także dlatego, że systemy tablicowe mają wiele zalet w stosunku do innych rodzajów systemów. Niestety, mają również swoje wady. Celem książki jest takie zdefiniowanie metod tablicowych, aby dla pewnej klasy systemów tablicowych wady te zminimalizować lub tam, gdzie się da, całkowicie je usunąć.

Naświetlmy pokrótce pewne cechy systemów tablicowych, porównując je z systemami aksjomatycznymi.

Jedną z zalet systemów tablicowych jest dość intuicyjny i prosty mechanizm dowodzenia twierdzeń. W większości przypadków, znając reguły tablicowe oraz sposób ich działania, możemy w sposób mechaniczny poszukiwać odpowiedzi na pytanie, czy dana formuła jest logiczną konsekwencją danego zbioru przesłanek. Działanie takie nie wymaga żadnej szczególnej pomysłowości. Dodatkową zaletą jest fakt, że w wypadku gdy odpowiedź jest negatywna, najczęściej — również intuicyjnie — na podstawie nieudanego dowodu tablicowego można zbudować tzw. kontrmodel, czyli model, w którym prawdziwe są przesłanki, ale fałszywy wniosek.

Niestety, wadą systemów tablicowych są komplikacje, które pojawiają się przy próbie ich precyzyjnej konstrukcji — występuje tam bowiem wiele złożonych pojęć teoretycznych. Możemy oczywiście używać intuicyjnych pojęć gałęzi/ścieżki dowodowej, tablicy/drzewa, tablicy otwartej, zamkniętej, kompletnej itd. Jednak, po pierwsze, nie mamy wtedy do czynienia z systemem formalnym, ale z systemem preformalnym, a więc potencjalnie obciążonym mniej lub bardziej poważnymi błędami logicznymi. Po drugie zaś, trudno — jeśli w ogóle jest to możliwe — uogólniać nasze wyniki, szukając metalogicznych zależności pomiędzy różnymi systemami tablicowymi, a także zależności pomiędzy klasami systemów — do takich działań potrzebne są bowiem ogólne pojęcia, których szczególne przypadki występują przy konstrukcji konkretnych systemów tablicowych.

Z kolei systemy aksjomatyczne mają precyzyjnie zdefiniowane podstawowe pojęcia i można te pojęcia uogólniać. Dla przykładu można przyjąć, że na każdy system aksjomatyczny składa się rozstrzygalny zbiór formuł jakiegoś języka For oraz zbiór reguł dowodzenia $\mathbf{R}$. Ponieważ aksjomaty systemu daje się opisać jako reguły zeroprzesłankowe, więc ogólne pojęcie *reguły dowodzenia* w systemie aksjomatycznym można przy danym zbiorze formuł For zdefiniować następująco:

$$R = \{\langle X, A\rangle : X \text{ jest podzbiorem } \mathsf{For}, A \text{ jest formułą}\}.$$

System aksjomatyczny stanowi najczęściej uporządkowaną parę $\langle \mathsf{For}, \mathbf{R}\rangle$, w której For jest rozstrzygalnym zbiorem formuł, natomiast $\mathbf{R}$ jest niepustym zbiorem reguł dowodzenia. W przypadku, gdy reguła jest regułą aksjomatyczną, należą do niej pary $\langle X, A\rangle$, gdzie X jest zbiorem pustym, natomiast A jest formułą wprowadzaną do dowodu bez przesłanek.

Mając system aksjomatyczny $\langle \mathsf{For}, \mathbf{R}\rangle$ możemy teraz zdefiniować ogólne pojęcie dowodu formuły A na gruncie zbioru przesłanek X. Powiemy, że A jest *dowiedlne* na gruncie przesłanek X wtw istnieje taki skończony ciąg formuł $B_1, \ldots, B_n$, że:

1. $B_n = A$
2. dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant n$ zachodzi co najmniej jeden z dwóch przypadków:
    - $B_i \in X$
    - istnieją: reguła $R \in \mathbf{R}$ oraz taka para $\langle Y, C\rangle \in R$, że
        - $C = B_i$
        - Y jest zbiorem pustym lub dla pewnego $m > 0$ oraz pewnych $0 < k_1, \ldots, k_m < i$, $Y = \{B_{k_1}, \ldots, B_{k_m}\}$.