Marcin Fałdziński

Teoria wartości ekstremalnych w ekonometrii finansowej

Wydawnictwo Naukowe
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika

Marcin Fałdziński

Teoria wartości ekstremalnych w ekonometrii finansowej

Wydawnictwo Naukowe
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika

Toruń 2014

Recenzent
prof. dr hab. Krzysztof Jajuga

Opracowanie wydawnicze
Elżbieta Kossarzecka

Projekt okładki
Monika Pest

ISBN 978-83-231-3184-7

Printed in Poland

WYDAWNICTWO NAUKOWE UNIWERSYTETU MIKOŁAJA KOPERNIKA
Redakcja: ul. Gagarina 5, 87-100 Toruń
tel. +48 56 611 42 95, fax +48 56 611 47 05
e-mail: wydawnictwo@umk.pl
Dystrybucja: ul. Reja 25, 87-100 Toruń
tel./fax +48 56 611 42 38
e-mail: books@umk.pl
www.wydawnictwoumk.pl

Druk: Drukarnia WN UMK
ul. Gagarina 5, 87-100 Toruń

Spis treści

Wstęp

Od momentu wprowadzenia rachunku ekonomicznego do działalności człowieka zdarzenia wyjątkowe (ekstremalne), charakteryzujące się niespotykanymi odchyleniami od sytuacji „normalnych", powodowały ogromne trudności w podejmowaniu decyzji ekonomicznych. Zdarzenia ekstremalne rozumiane negatywnie przysparzają największych trudności, ponieważ powodują one najdotkliwsze straty, czy też nawet skutkują upadkiem podmiotów gospodarczych. W związku z tym poznanie mechanizmów rządzących tymi wydarzeniami, modelowanie oraz prognozowanie ma kluczowe znaczenie dla prowadzenia wszelakiej działalności gospodarczej. Najlepiej widoczne jest to w zarządzaniu ryzykiem, gdzie zgodnie z regułą 20/80 można przyjąć założenie, że około 20% największych strat powoduje około 80% strat całkowitych. Oznacza to, że uchronienie się od tych 20% przypadków może mieć ogromne znaczenie w powodzeniu finansowym każdego przedsięwzięcia gospodarczego.

Do pewnego momentu, w klasycznym modelowaniu ekonometrycznym wszystkie obserwacje ekstremalne traktowane były jako obserwacje odstające, co skutkowało najczęściej pominięciem ich w badaniach. Takie podejście było niewłaściwe nie tylko z punktu widzenia wspomnianej reguły 20/80, ale również z punktu widzenia procesu generującego dany szereg obserwacji. Skoro rzeczywisty proces generujący dane (DGP) dopuszcza ekstremalne realizacje, to należy je uwzględnić w modelowaniu i prognozowaniu. Potwierdzeniem rangi analizy wydarzeń ekstremalnych w ekonomii jest wypowiedź wieloletniego szefa Fed, Alana Greespana, który podczas konferencji Joint Central Bank Research Conference w Waszyngtonie stwierdził: „Z punktu widzenia menedżera zarządzającego ryzykiem, niewłaściwe użycie rozkładu normalnego może prowadzić do zaniżenia ryzyka. Ze strony banku centralnego konsekwencje są jeszcze bardziej poważne, ponieważ często musimy koncentrować się na lewym ogonie rozkładu w formułowaniu polityki pożyczkodawcy ostatniej instancji. Polepszanie opisu rozkładu o wartości ekstremalne ma najwyższą wagę". Dlatego też powstanie teorii wartości ekstremalnych (ang. *Extreme Value Theory*, EVT), mogącej opisać ekstrema wszystkich klasycznych rozkładów statystycznych, miało kluczowe znaczenie dla zmiany spojrzenia na sytuacje ekstremalne, występujące w różnych dziedzinach życia i nauki. Pierwsze zastosowania teorii wartości ekstremalnych datuje się na lata 30. XX wieku, natomiast pierwsze zastosowania w ekonomii następowały około 2000 roku. Na gruncie ekonometrii finansowej uwzględnienie ekstremów w finansowych szeregach czasowych zbiegło się z wprowadzeniem do modeli klasy GARCH rozkładów warunkowych o grubszych ogonach niż ogony rozkładu normalnego (np. Engle, Bollerslev [1986], Osiewalski, Pipień [1999], Osiewalski, Pipień [2000], Fiszeder [2001], Piontek [2002]). Skutkowało to licznymi pracami, w których podejmowano próby ustalenia, jakiego rozkładu warunkowego należy użyć do opisu finansowych szeregów czasowych. Jednak opisane rozwiązanie nie próbuje ustalić rzeczywistego zachowania się ekstremów, powodując narażenie inwestora na straty w przypadku, kiedy zachowanie i charakter ekstremów zmienia się, co szczególnie może występować w okresach zwiększonej zmienności czy też, tym bardziej, w sytuacjach kryzysowych. W związku tym uwzględnienie w ekonometrii finansowej metod i narzędzi z teorii wartości ekstremalnych, mogących rozwiązać omawiane problemy, wydaje się bardzo użyteczne.

Wraz z uświadomieniem sobie ważności wydarzeń ekstremalnych i ich wpływu na działalność ekonomiczną człowieka nastąpił znaczny rozwój prac z zakresu zastosowań EVT w ekonomii. Wykorzystanie metod i narzędzi EVT w ekonomii i finansach doprowadziło do nowych rozwiązań i wniosków dotyczących takich problemów, jak: szacowanie ryzyka, możliwych maksymalnych strat (zysków) poniesionych przez inwestora czy też modelowania finansowych szeregów czasowych. Powyższe przesłanki skłoniły autora niniejszej pracy do podjęcia badań z przedstawionego zakresu.

Głównym celem pracy jest prezentacja i rozszerzenie możliwych zastosowań metod i narzędzi teorii wartości ekstremalnych w ekonometrii finansowej, ze szczególnym uwzględnieniem problemu mierzenia ryzyka rynkowego w finansach. Celami szczegółowymi pracy są:

- uporządkowanie i usystematyzowanie zagadnień związanych z teorią wartości ekstremalnych w ekonometrii finansowej,
- usystematyzowanie wiedzy na temat nieparametrycznych estymatorów indeksu wartości ekstremalnych oraz zbadanie estymatorów nieparametrycznych pod względem dokładności mierzenia grubości ogonów rozkładu,
- prezentacja parametrycznych metod estymacji teorii wartości ekstremalnych możliwych do zastosowania w ekonometrii finansowej,
- autorska modyfikacja metody POT, uwzględniająca modele zmienności,
- zastosowanie metody POT z modelami zmienności do szacowania wartości zagrożonej (VaR), oczekiwanego niedoboru (ES) oraz spektralnej miary ryzyka (SRM) w celu mierzenia ryzyka rynkowego,
- wyznaczenie średniej długości serii zwrotów ekstremalnych odpowiadających najczęściej za załamania miar ryzyka,
- zastosowanie modelu warunkowej zmienności wartości ekstremalnych (CEVV) do modelowania zmienności ekstremów,
- zastosowanie miary PML (PMG) do wyznaczenia prawdopodobnej maksymalnej straty (zysku) na rynku kapitałowym.

Omawiane zagadnienia rozpatrywane są z punktu widzenia ilościowego zarządzania ryzykiem (ang. *quantitative risk management*), przez które rozumie się używanie metod ekonometrycznych, służących do oszacowania ryzyka w procesie jego zarządzania. Należy rozróżnić ogólne pojęcie zarządzania ryzykiem, które jest znacznie szersze, od ilościowego zarządzania ryzykiem, skupiającego się na metodach mających oszacować ryzyko. W tym kontekście praca koncentruje się na estymacji takich miar ryzyka, jak: wartość zagrożona (VaR), oczekiwany niedobór (ES) oraz spektralna miara ryzyka (SRM) z wykorzystaniem teorii wartości ekstremalnych. W zakresie estymacji wartości zagrożonej powstało bardzo wiele prac, zarówno teoretycznych, jak i empirycznych (np. Alexander [2010d]), natomiast niewiele z nich *explicite* uwzględnia ekstrema. Z drugiej strony badań empirycznych dotyczących jakości estymacji oczekiwanego niedoboru, a szczególnie spektralnej miary ryzyka, jest bardzo niewiele. Skłoniło to autora niniejszej pracy do badań pogłębiających wiedzę na ten temat oraz badań przynoszących nowe wnioski, czy też rozwiązania. Należy wyjaśnić, że rozważania zaprezentowane w pracy skupiają się na zagadnieniach związanych z jednowymiarowym podejściem do EVT.

Praca składa się ze wstępu, trzech rozdziałów, zakończenia oraz załączników. Zakres poszczególnych rozdziałów przedstawia się następująco.

Rozdział pierwszy ma charakter wprowadzający do problemu grubych ogonów rozkładów i ekstremów w finansowych szeregach czasowych. W rozdziale tym przedstawione są podstawowe definicje z tego zakresu oraz powiązania własności finansowych szeregów czasowych z ekstremami tych szeregów. Ważną część stanowi tutaj określenie przyczyn powstawania ekstremów, a w konsekwencji grubych ogonów we wspomnianych szeregach. W dalszej części tego rozdziału zaprezentowane są podstawy teoretyczne EVT, w której to sformułowane jest fundamentalne twierdzenie Fishera i Tippetta dotyczące zbieżności ciągu ekstremów do uogólnionego rozkładu wartości ekstremalnych (ang. *Generalized Extreme Value Distribution*, GEV). W końcowej części tego rozdziału przedstawione są metody estymacji rozkładu GEV oraz drugiego rozkładu powiązanego bezpośrednio z ekstremami, czyli uogólnionego rozkładu Pareto (ang. *Generalized Pareto Distribution*, GPD).

W rozdziale drugim skupiono się na problemie metod estymacji w teorii wartości ekstremalnych. Przedstawione są tutaj dwie grupy metod: nieparametryczne oraz parametryczne. W pierwszej kolejności rozważono metody nieparametryczne, służące jako narzędzie oceny grubości ogonów rozkładu. Potwierdzenie obecności grubych ogonów rozkładu pozwala na stosowanie bardziej zaawansowanych metod teorii wartości ekstremalnych. W kontekście metod nieparametrycznych w pracy rozważono wiele estymatorów nieparametrycznych, zaczynając od estymatora Pickandsa, a kończąc na estymatorze zaproponowanym przez Fraga Alves i in. [2008]. Estymatory nieparametryczne zostały poddane badaniu symulacyjnemu ze względu na dokładność oszacowań, w celu wyboru tych najdokładniejszych. W drugiej części tego rozdziału zaprezentowano metody parametryczne w EVT z zastosowaniem do przykładów empirycznych. W szczególności przedstawiono tutaj takie koncepcje, jak: metodę bloków, poziom zwrotu, indeks ekstremalny oraz metodę przekroczeń powyżej progu (ang. *Peaks over Threshold*, POT). Omówienie powyższych koncepcji wsparte jest wieloma przykładami empirycznymi.

W rozdziale trzecim zaprezentowane zostały zastosowania teorii wartości ekstremalnych w ekonometrii finansowej. W tej części pracy przedstawione są metody estymacji miar ryzyka rynkowego (wartość zagrożona, oczekiwany niedobór, spektralna miara ryzyka) z wykorzystaniem EVT. Pokazane jest również połączenie modeli zmienności z metodami teorii wartości ekstremalnych, które stanowi bardzo ciekawe narzędzie uwzględnienia ekstremów w finansowych szeregach czasowych. W tym przypadku autor podaje własną koncepcję takiego połączenia, uzasadniając to z obu punktów widzenia: teoretycznego i empirycznego. W dalszej części tego rozdziału przedstawiony jest model warunkowej zmienności wartości ekstremalnych (ang. *Conditional Extreme Value Volatility*, CEVV), stanowiący oddzielne podejście do tematu modelowania zmienności w ekstremach. Na koniec zaprezentowana jest koncepcja prawdopodobnej maksymalnej straty (ang. *Probable Maximum Loss*, PML), miary umożliwiającej oszacowanie maksymalnej możliwej straty przez inwestora. Cały rozdział podparty jest licznymi wynikami empirycznymi z zakresu finansowych szeregów czasowych. Należy tutaj dodać, że „produktem ubocznym" pracy są pewne rozwiązania i miary dla metod testowania wstecznego (ang. *backtesting*) w kontekście mierzenia ryzyka.

Niniejsza praca przede wszystkim rozwija dotychczasowe badania z zakresu modelowania i prognozowania ekstremów w finansowych szeregach czasowych, ale również prezentuje nowe metody czy też rozwiązania w omawianym zakresie. Wyniki zawarte w pracy powstały częściowo w trakcie realizacji projektu badawczego pt. „Rynek kapitałowy Chin i jego powiązania z procesami gospodarczymi na świecie – analiza ekonometryczna" (N N111 328839), finansowanego w latach 2010–2012 przez Narodowe Centrum Nauki. Wszystkie obliczenia zostały wykonane w programie EViews v.7.2 zakupionym w ramach Projektu „Stypendia dla doktorantów 2008/2009 ZPORR", współfinansowanym w 75% ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego i w 25% ze środków Budżetu Państwa w ramach Działania 2.6 „Regionalne Strategie Innowacyjne i transfer wiedzy" Zintegrowanego Programu Operacyjnego Rozwoju Regionalnego. Teoria wartości ekstremalnych i jej narzędzia nie są standardowo oprogramowane. Dlatego wszystkie wykonane obliczenia wymagały przygotowania procedur autorskich.

Chciałbym podziękować wszystkim osobom, które przyczyniły się do powstania tej pracy. Podziękowania należą się osobom uczestniczącym w seminarium doktorskim prowadzonym przez Pana Profesora Józefa Stawickiego oraz Panią Profesor Magdalenę Osińską. Zawsze będę pamiętał dyskusje naukowe prowadzone podczas tych spotkań. Szczególne podziękowania należą się Pani Profesor Magdalenie Osińskiej za opiekę nad pracą, wszelkie uwagi krytyczne oraz pomysły na dalsze badania. Dziękuję także mojemu Kierownikowi, Panu Profesorowi Jerzemu W. Wiśniewskiemu, oraz Koleżankom i Kolegom z Katedry Ekonometrii i Statystyki na Wydziale Nauk Ekonomicznych i Zarządzania UMK za pomoc, wsparcie oraz inspiracje do ciągłej pracy nad tematem teorii wartości ekstremalnych.

1

Podstawy teorii wartości ekstremalnych

1.1. Grube ogony i ekstrema w finansowych szeregach czasowych

Ostatnie 30 lat przyniosło znaczny rozwój ekonometrii, zwłaszcza ekonometrii finansowej, w której nowa metodologia, jak również nowe możliwości w zakresie oprogramowania spowodowały szybki rozwój. Analiza finansowych szeregów czasowych stała się bardzo popularna w badaniach naukowych, ale nie oznacza to, że są one łatwe do opisania. Ekonometria finansowa wyłoniła się jako jedna z najbardziej tętniących życiem dyscyplin ostatniej dekady, skutkująca znaczną liczbą prac teoretycznych i ich zastosowań. Dane finansowe ukazane są w wielu formach i każda z nich ma swoje osobliwości (Pagan [1996]).

W badaniach empirycznych, jak również coraz częściej w praktyce, stosuje się szeregi czasowe stóp zwrotu instrumentów finansowych. Jest kilka powodów, dla których używa się stóp zwrotu, a nie samych szeregów czasowych cen. Jeden z najważniejszych jest związany z użytecznymi własnościami tych szeregów dla analizy statystycznej. Zwykłą (prostą) stopę zwrotu na okres *t* oznaczymy następująco:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} 100\% . \tag{1.1}$$

Logarytmiczna stopa zwrotu zostanie oznaczona w sposób następujący:

$$r_t = \ln(P_t / P_{t-1}) 100\% , \tag{1.2}$$

przy czym P_t oznacza cenę instrumentu finansowego w chwili *t*.

Z powodu lepszych własności statystycznych, do których można zaliczyć przyjmowanie przez stopy logarytmiczne wartości z całej osi rzeczywistej, co ma znaczenie przy modelowaniu ich za pomocą rozkładów prawdopodobieństwa z nieograniczonym nośnikiem, częściej stosowana jest logarytmiczna stopa zwrotu. Zarówno zwykłe stopy zwrotu, jak i logarytmiczne stopy zwrotu mają wady i zalety (patrz np. Fiszeder [2009]), jednak w niniejszej pracy, tak jak w zdecydowanej większości prac badawczych, użyto tych drugich.

Badania nad szeregami finansowymi doprowadziły do porozumienia w sprawie niektórych sporów podczas analizy własności tych szeregów, ale za to wygenerowały nowe wyzwania i kontrowersje. Łatwo sobie wyobrazić, że te same wydarzenia czy zbiory informacji nie mają koniecznie takiego samego wpływu na różne aktywa, a co za tym idzie – na różne rynki. Szeregi stóp zwrotu otrzymane z różnych rynków ujawnią nieco inne właściwości. Na przykład zwroty kursów walutowych mają nieco inne własności niż zwroty z notowań cen akcji, zwroty cen energii albo zwroty cen indeksów spółek technologicznych. Dlatego też więcej niż półwiekowe empiryczne wyniki badań nad finansowymi szeregami czasowymi wskazują, że ze statystycznego punktu widzenia pozornie przypadkowe wahania stóp zwrotu współdzielą pewne nietrywialne własności. Takie właściwości w wielu instrumentach, rynkach i okresach czasu nazywane są empirycznymi własnościami (cechami) szeregów finansowych (ang. *stylized empirical facts, stylized facts*). Empiryczne własności szeregów finansowych są uzyskane przez podniesienie do wspólnego mianownika własności zaobserwowanych w badaniach nad różnymi rynkami i instrumentami (Cont [2001]).

W ekonometrii finansowej często mówi się o grubych ogonach rozkładów, ale rzadko podaje się definicję rozkładów z grubymi ogonami. W teorii prawdopodobieństwa znane są następujące definicje:

Definicja (1.1). Rozkład z ciężkim ogonem (ang. *heavy-tailed distribution*) (Rolski i in. [1999], Asmussen [2003])

Rozkład zmiennej losowej X z pewną funkcją dystrybuanty F ma ciężki prawy ogon, jeżeli

$$\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x} P[X > x] = \infty \quad \forall \lambda > 0. \tag{1.3}$$

W przypadku lewego ogona ta definicja jest odpowiednio zmieniona. Rozkłady z ciężkimi ogonami są to rozkłady, których ogony nie są ograniczone wykładniczo, tzn. mają grubsze ogony niż rozkład wykładniczy[1]. Jeżeli granica w definicji (1.1) jest skończona, to rozkład zmiennej losowej X ma prawy lekki ogon (ang. *light-tailed*). Równoważnie (1.1) może być przedstawiona przy użyciu funkcji tworzącej (generującej) momenty. Funkcja tworząca (generująca) momenty (MGF) zmiennej losowej X jest określona następująco: $M_X(s) = E[e^{sX}], s \in \mathbb{R}$. Jeżeli funkcja tworząca momenty dystrybuanty F jest nieskończona ($M_F(s) = \infty$) dla każdego $s > 0$, to rozkład zmiennej losowej X opisanej dystrybuantą F ma ciężki prawy ogon. Inaczej mówiąc, jeżeli rozkład zmiennej losowej X na zbiorze $\mathbb{R}^+$ jest taki, że nie wszystkie momenty są skończone, tzn. $\int_0^\infty x^k f(x)dx = \infty$ dla pewnego k, wtedy dystrybuanta F ma prawy ciężki ogon. W tym przypadku możemy znaleźć takie $k \geq 1$, że k-ty moment jest nieskończony, kiedy moment $k-1$-szy jest skończony. Przykładami rozkładów z ciężkim ogonem są: rozkład Pareto, rozkład logarytmiczno-normalny, rozkład Léviego, rozkład Cauchy'ego, rozkład Burr[2] czy też rozkład t-Studenta.

[1] Rozkład wykładniczy opisuje czas pomiędzy zdarzeniami podlegającymi procesowi Poissona, tj. procesowi, w którym zdarzenia pojawiają się w sposób ciągły i niezależny ze stałym średnim tempem pojawiania się. Formalnie funkcja gęstości prawdopodobieństwa (PDF) rozkładu wykładniczego zadana jest następująco: $f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$, a dystrybuanta (CDF) rozkładu wykładniczego następująco: $F(x;\lambda) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0$.

[2] Rozkład Burr, pomimo pewnych trudności estymacyjnych (Wang, Keats, Zimmer [1995]), ostatnimi czasy staje się coraz bardziej popularny w teorii wartości ekstremalnych (Shao [2004], Nadarajah, Kotz [2006]).

Definicja (1.2). Rozkład z długim ogonem (ang. *long-tailed distribution*) (Asmussen [2003], Foss i in. [2011])

Rozkład zmiennej losowej X z pewną funkcją dystrybuanty F ma długi prawy ogon jeżeli $\forall t > 0$

$$\lim_{x\to\infty} P[X > x+t \mid X > x] = 1 \tag{1.4}$$

albo równoważnie

$$\overline{F}(x+t) \sim \overline{F}(x) \text{ kiedy } x \to \infty, \text{gdzie } \overline{F}(x) = 1 - F(x) = P[X > 0],$$

gdzie $\overline{F}(x)$ jest funkcją ogona (ang. *tail function*)[3].

Intuicyjna interpretacja rozkładów z długimi ogonami jest następująca: jeśli ogon rozkładu przekracza pewien wysoki poziom (prawdopodobieństwo zbiega do 1), tzn. że przekroczy jakikolwiek wysoki poziom. Jeżeli wiemy, że sytuacja jest zła, tzn. że prawdopodobnie jest gorsza, niż myślimy. Wszystkie rozkłady z długimi ogonami mają ciężkie ogony. Twierdzenie przeciwne jest fałszywe.

Rozkłady z długimi ogonami posiadają użyteczne własności (Foss i in. [2011]). Załóżmy, że niezależne zmienne losowe $X_1,...X_n$ z odpowiadającymi dystrybuantami $F_1,...F_n$ mają długie ogony. Wtedy:

1. Dla dowolnej stałej c_1 oraz $c_2 > 0$ dystrybuanta zmiennej losowej $c_1X_1 + c_2$ ma długi ogon.
2. Jeśli $\overline{F}(x) \sim \sum_{k=1}^{n} c_k \overline{F}_k(x)$, gdzie $c_1,...,c_n > 0$, wtedy dystrybuanta F ma długi ogon.
3. Jeśli $F(x) = \min(F_1(x),...,F_n(x))$, wtedy dystrybuanta F ma długi ogon.
4. Jeśli $F(x) = \max(F_1(x),...,F_n(x))$, wtedy dystrybuanta F ma długi ogon.
5. Dystrybuanta zmiennej losowej $\min(X_1,...,X_n)$ ma długi ogon.
6. Dystrybuanta zmiennej losowej $\max(X_1,...,X_n)$ ma długi ogon.

Definicja (1.3). Rozkład z grubymi ogonami (ang. *fat-tailed distribution*)

Rozkład zmiennej losowej X ma gruby ogon, jeżeli

$$\lim_{x\to\infty} P[X > x] \sim \frac{L(x)}{x^{\alpha}} = x^{-\alpha} L(x), \tag{1.5}$$

gdzie $L(x)$ jest wolno zmieniającą się funkcją (ang. *slowly-varying function*)[4], (np. funkcja logarytmiczna albo stała), natomiast α jest wykładnikiem potęgi.

Wartość α świadczy o kształcie ogona rozkładu, przy czym najczęściej wyróżnia się następujące przypadki:

- Bardzo grube ogony $0 < \alpha < 1$:
- Zarówno pierwszy moment zwykły, jak i drugi moment centralny zmiennej X są nieskończone. Ten przypadek jest rzadki na rynkach finansowych.
- Grube ogony z nieskończonym drugim momentem $1 \le \alpha \le 2$:
- Często obserwowany przypadek, w którym średnia jest skończona, natomiast wariancja jest nieskończona.
- Grube ogony ze skończoną wariancją $\alpha > 2$: Ten przypadek jest również częsty dla finansowych szeregów czasowych.

[3] Przedstawiona definicja również jest spełniona w przypadku, kiedy wstawimy $-t$ do równania (1.4).

[4] Formalna definicja wolno zmieniających się funkcji będzie podana w późniejszej części pracy (podrozdział 1.3).