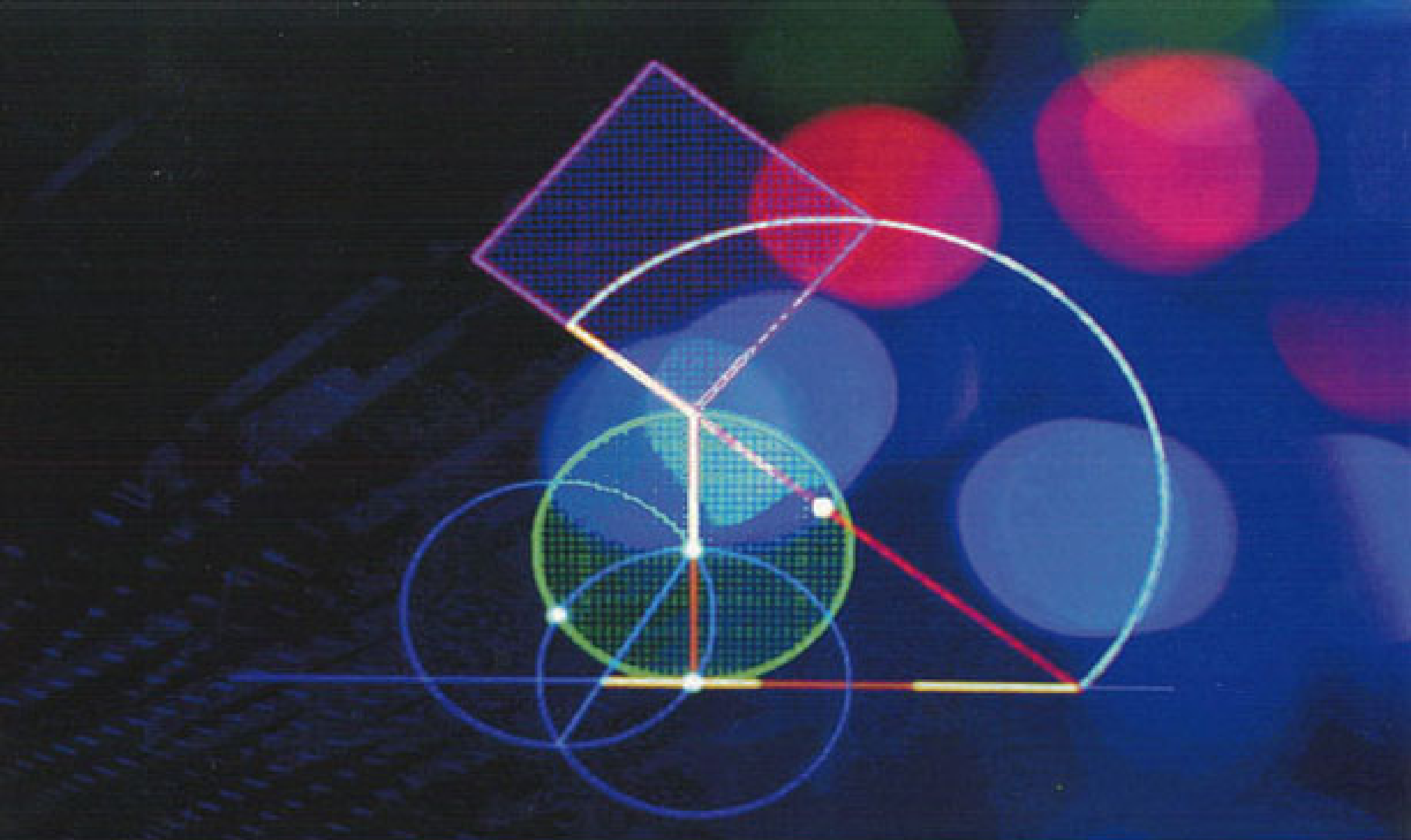


Dariusz Miklaszewski

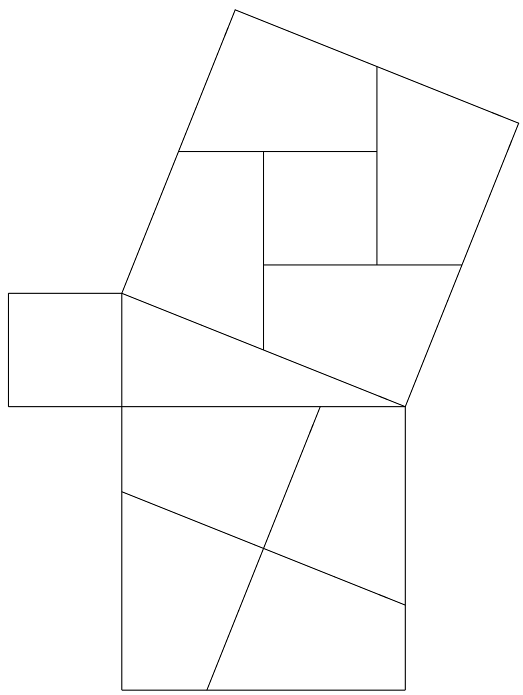
WSTĘP do matematyki

Wydawnictwo Naukowe
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika

Wstęp do matematyki

Dariusz Miklaszewski

Wstęp do matematyki



Toruń 2015

Recenzet **Krzysztof Ciesielski**

Korekta **Elżbieta Kossarzecka**

Projekt okładki **Tomasz Jaroszewski**

ISBN 978-83-231-3383-4

WYDAWNICTWO NAUKOWE UMK
ul. Gagarina 5, 87-100 Toruń
Redakcja: tel. (56)611 42 95; fax. (56) 611 47 05
e-mail: wydawnictwo@umk.pl
Dystrybucja: ul. Reja 25, 87-100 Toruń
tel./fax (56) 611 42 38, e-mail: books@umk.pl
www.wydawnictwoumk.pl
Druk: Drukarnia Wydawnictwa Naukowego UMK

SPIS TREŚCI

Przedmowa 7

1. Liczby naturalne 9

2. Rachunek zdań 27

3. Rachunek funkcyjny 39

4. Zbiory 53

5. Funkcje 69

6. Relacje równoważności 83

7. Pewnik wyboru 107

8. Równoliczność 135

9. Continuum 149

10. Częściowy porządek 169

11. Dobry porządek 187

12. Liczby porządkowe 205

13. Liczby rzeczywiste 219

14. Teoria liczb naturalnych 243

15. Twierdzenia Łosia i Gödla 257

Zakończenie 277

Skorowidz 294

Literatura 307

PRZEDMOWA

Książka ta jest zapisem „Wstępu do matematyki” wykładanego w latach 2013–14 i 2014–15 na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK. Materiał obejmuje przede wszystkim podstawy logiki i teorii mnogości.

Każdy z piętnastu rozdziałów zawiera zadania i uzupełnienia. Nieco inną strukturę ma ostatni rozdział poświęcony Wacławowi Sierpińskiemu.

Rolą zadań jest dostarczenie przykładów, a także miejsca dla tego, co wykładowca miałby niekiedy ochotę skwitować tradycyjną formułą „łatwo sprawdzić, że”.

Litery $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{C}$ oznaczają w książce odpowiednio zbiór liczb: – naturalnych, – naturalnych z zerem, – całkowitych, – wymiernych, – rzeczywistych, – nieujemnych (rzeczywistych), – zespolonych.

Rysunek na stronie tytułowej przedstawia jeden z dowodów twierdzenia Pitagorasa. Znaleziony w notatkach mojego Dziadka, nauczyciela szkoły powszechnej, tutaj jest zaproszeniem do lektury.

Panu profesorowi Romanowi Dudzie dziękuję za cenne informacje o historii Lematu Kuratowskiego-Zorna.

Dziękuję Krzysztofowi Ciesielskiemu za to, że uważnie pochylił się nad pierwszą wersją tej książki i przekazał mi w recenzji wiele cennych uwag.

Grzegorzowi Jarzembskiemu dziękuję za dyskusję o modelach i teorii liczb naturalnych.

Panu Zbigniewowi Ankowskiemu dziękuję za znalezienie związku zadania o „zagnieżdżonych pierwiastkach” z Olimpiadą Matematyczną.

Sebastianowi Ruszkowskiemu dziękuję za rozważania o pewniku ciągłości w modelu Cantora (zdawał wtedy u mnie egzamin).

Dziękuję wszystkim, bez pomocy których nie mógłbym tej książki napisać, w szczególności Nauczycielom, Profesorom, Studentom, Kolegom i Pracownikom Wydawnictwa.

Dariusz Miklaszewski

Rozdział 1

Liczby naturalne

Na początku wielkiej przygody intelektualnej człowieka związanej z rozwojem matematyki pojawiły się liczby naturalne. Zbiór liczb naturalnych $\{1, 2, 3, \ldots\}$ będziemy oznaczać literą $\mathbb{N}$. Przez $\mathbb{N}_0$ oznaczymy zbiór liczb naturalnych wraz z zerem. Wypada w tym miejscu wspomnieć, że niektórzy autorzy zaliczają zero w poczet liczb naturalnych.

Zbiór liczb naturalnych ma dwie dość oczywiste własności:

$$(i) \quad 1 \in \mathbb{N},$$

$$(ii) \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \; n + 1 \in \mathbb{N},$$

tzn. liczba jeden jest elementem zbioru liczb naturalych i dla każdej liczby naturalnej n liczba $n + 1$ jest liczbą naturalną.

Symbol $\forall$ nazywamy *kwantyfikatorem ogólnym* i czytamy: *dla każdego.*

Implikacją nazywamy każde zdanie postaci: *jeśli* α, *to* β. Zapisujemy je symbolicznie $\alpha \Rightarrow \beta$, przy czym symbol $\Rightarrow$ także nazywamy implikacją. Własność (ii) może być zapisana przy użyciu implikacji:

$$\forall_n \; (n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N}),$$

tzn. dla każdego n mamy, że jeśli n jest liczbą naturalną, to $n + 1$ jest liczbą naturalną.

Mówimy, że zbiór A jest *podzbiorem* zbioru B i piszemy $A \subset B$, gdy

$$\forall_x \; (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Łatwo się przekonać, że każdy podzbiór A zbioru $\mathbb{N}$ o własnościach (i) i (ii) ($1 \in A$ i $\forall_{n \in A} \; n + 1 \in A$) jest równy $\mathbb{N}$. W samej rzeczy: $1 \in A$; skoro